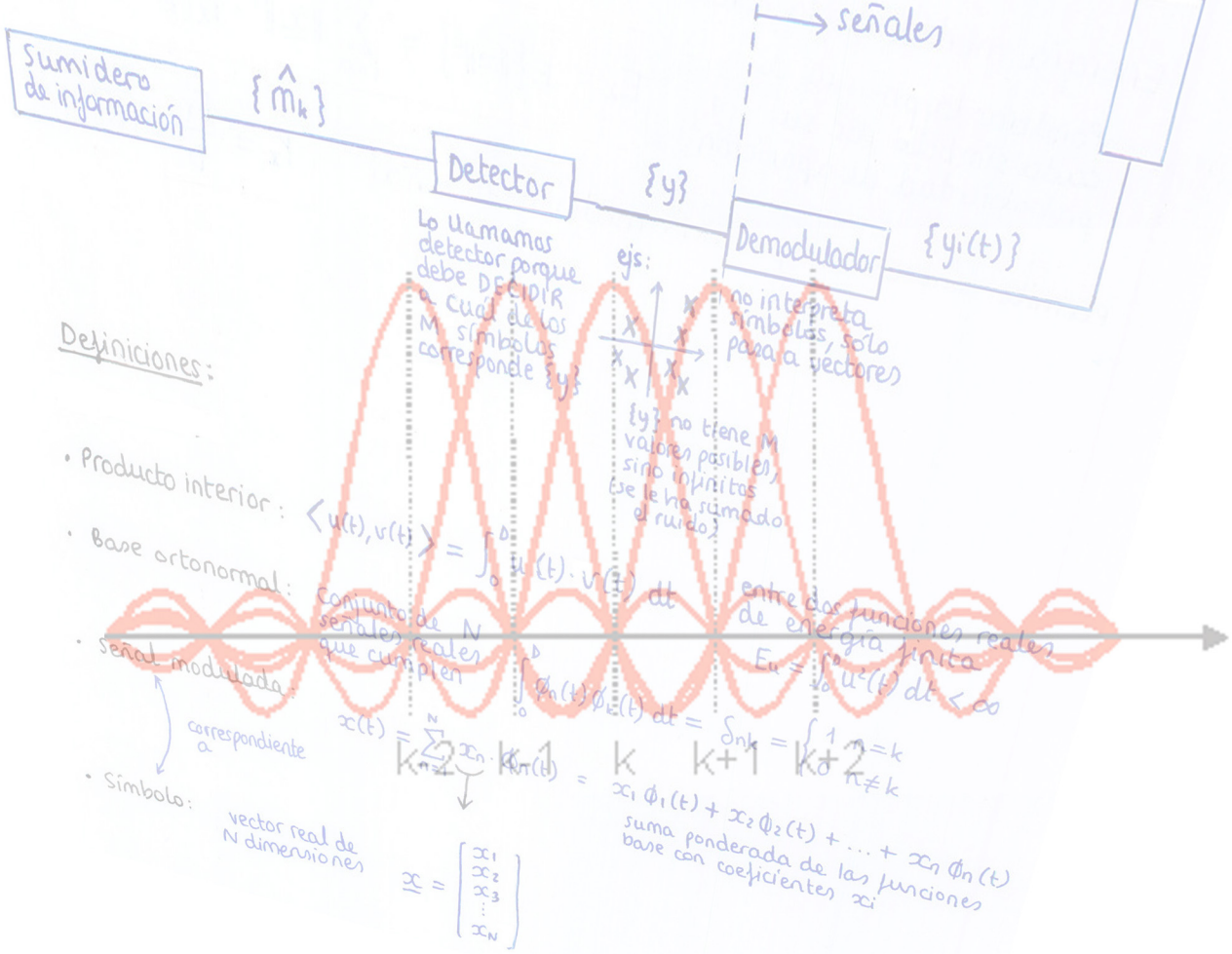
ETSI Telecomunicación

Comunicaciones Digitales Avanzadas



Apuntes de Pak

Comunicaciones Digitales Avanzadas

Apuntes de Pak (Fco. J. Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 5º curso
Curso 2007/2008

Contenido

- Referencia rápida de la asignatura
- Apuntes extensos: solamente temas 1 al 3

Fecha de última actualización: 8 Noviembre 2008

Tema 1. Teoría básica de señales y detección digital

1. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES

Conceptos básicos:

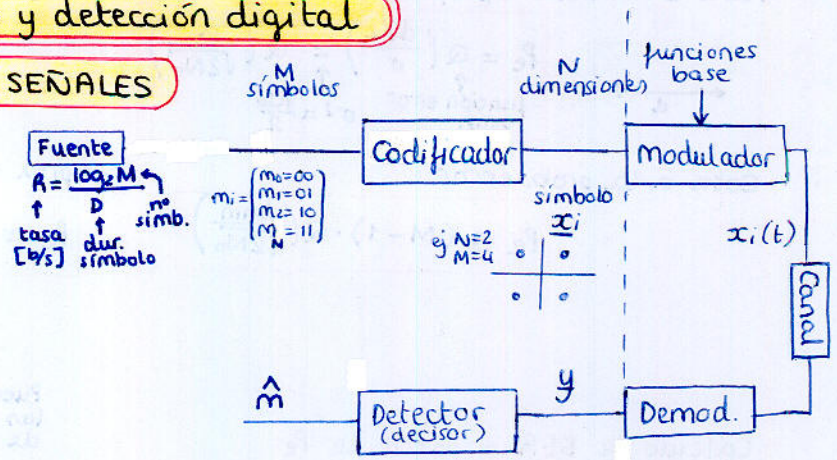
Producto interior: $\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^D u(t) \cdot v(t)\, dt$

Base ortonormal: $\langle \phi_n(t), \phi_k(t) \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$

Símbolo asociado a una señal: $x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \phi_n(t)$ (suma ponderada de funciones base)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

y cada componente se puede calcular como $x_n = \langle \underline{x}, \underline{\phi}_n \rangle = \langle x(t), \phi_n(t) \rangle$



→ Canal Vectorial

Energía de símbolo = Energía de señal modulada

$$E_{si} = \|\underline{x}_i\|^2 = \langle \underline{x}_i, \underline{x}_i \rangle$$

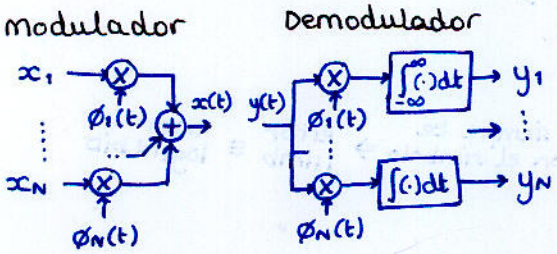
Energía de la constelación

$$E_x = E\{\|\underline{x}_i\|^2\} = \sum P_x(\underline{x}=\underline{x}_i) \cdot \|\underline{x}_i\|^2$$

Potencia media de señal

$$P_x = \frac{E_x}{D}$$

funciones $p_y(\underline{y}|\underline{x}_1)$, $p_y(\underline{y}|\underline{x}_2)$, ⋮, $p_y(\underline{y}|\underline{x}_M)$



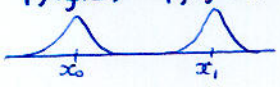
2. DETECCION DE SEÑALES DIGITALES

- Relación señal a ruido: $SNR = \frac{E_x}{\sigma^2}$
- Energía media por dimensión: $\overline{E}_x = \frac{E_x}{N}$
- Figura de mérito de la constelación: $CFM = \frac{(d_{min}/2)^2}{\overline{E}_x}$

M funciones densidad de probabilidad

$$\begin{cases} p_y(\underline{y}|\underline{x}_1) \\ p_y(\underline{y}|\underline{x}_2) \\ \vdots \\ p_y(\underline{y}|\underline{x}_M) \end{cases} \Rightarrow$$

ej 2D: $p_y(\underline{y}|\underline{x}_0)$, $p_y(\underline{y}|\underline{x}_1)$



Detector MAP (óptimo) max. a posteriori

$$\hat{m} = \max_{m_i} \{p_y(\underline{y}|\underline{x}_i) \cdot P_x(\underline{x}_i)\}$$

Detector ML (coincide con MAP si simb equiprob) max likelyhood

$$\hat{m} = \max_{m_i} \{p_y(\underline{y}|\underline{x}_i)\}$$

→ regiones de decisión

$\hat{m} \to m_i$ si: $P_x(x_i)\, p_n(\underline{y}-\underline{x}_i) \geq P_x(x_j)\, p_n(\underline{y}-\underline{x}_j)$

$$P_x(x_i)\, e^{-\frac{\|\underline{y}-\underline{x}_i\|^2}{N_0}} \geq P_x(x_j)\, e^{-\frac{\|\underline{y}-\underline{x}_j\|^2}{N_0}}$$

tomando ln

$\|\underline{y}-\underline{x}_i\|^2 = \|\underline{y}\|^2 - 2\langle \underline{y}, \underline{x}_i \rangle + \|\underline{x}_i\|^2$

3. EL CANAL AWGN

- media $E\{n_i\} = 0$
- varianza $\sigma_{n_i}^2 = N_0/2$ $\quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$
- d.e.p. $G_{n_i}(f) = N_0/2$
- autocorrelación $R_{n_i}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ ↳ incorreladas
- fdp $p_n(\underline{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\underline{n}\|^2}$

↳ muestras indep.

$p_y(\underline{y}|\underline{x}_i) = p_n(\underline{y}-\underline{x})$

↳ Detección óptima (MAP)

(1) Mínima distancia euclídea

$$\|\underline{y}-\underline{x}_i\|^2 - C_i \geq \|\underline{y}-\underline{x}_j\|^2 - C_j \quad \forall j \neq i$$

con $C_k = N_0 \ln P_x(\underline{x}=\underline{x}_k)$ ↳ no afecta si son equiprobables

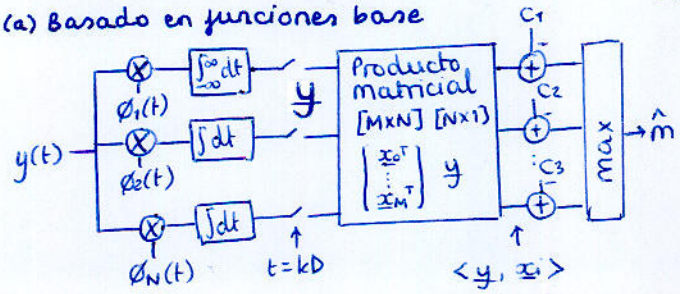
(2) Producto interior por cada símbolo

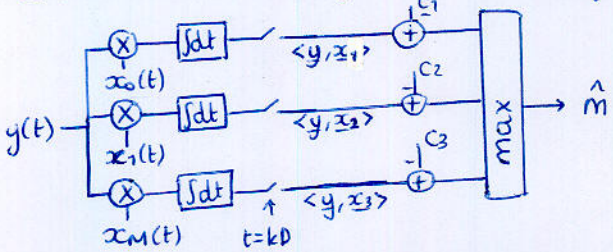
$$\langle \underline{y}, \underline{x}_i \rangle - C_i \geq \langle \underline{y}-\underline{x}_j \rangle - C_j$$

con $C_k = \frac{\|\underline{x}_k\|^2}{2} - \frac{N_0}{2} \ln P_x(\underline{x}=\underline{x}_k)$ ↳ no afecta si son equiprobables y tienen igual energía

Dos implementaciones

- (a) Basado en funciones base
- (b) Basado en señales moduladas directamente
  - No interesa cuando M>N ej 32QAM, QPSK, ...
  - Puede interesar cuando M=N ej FSK (i.e. modulaciones ortogonales)



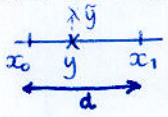


4. PROBABILIDAD DE ERROR PARA EL CANAL AWGN

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} \left[P_x(x_i) \cdot P_y(y \notin D_i \mid x_i) \right]$$

Invarianza de P_e frente a
- rotaciones
- traslaciones

- Para 2 símbolos equiprobables



$$P_e = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Q: función error comp. ; $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

- Cota a la prob. error

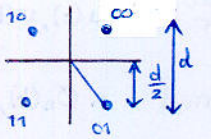
$$P_e \leq (M-1) \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

- Aprox a la P_e

$$P_e \simeq N_e \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

N_e: Nº medio de vecinos a d_{min} de cada símbolo
Puede tener en cuenta las distintas prob. de cada símbolo

lo típico es poner d en función de E_b y QPSK



$E_x = \frac{d^2}{2}$

$E_b = \frac{E_x}{2} = \frac{d^2}{4}$

por tanto

$$P_e \simeq 2Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

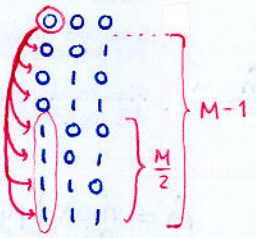
- Cálculo de BER a partir de P_e
  - modulaciones no ortogonales

Suponiendo código Gray y que sólo te equivocas con los símbolos adyacentes $\Rightarrow$ error 1 simb $\equiv$ error 1 bit $\Rightarrow$ por cada error de simb te equivocas en 1 de cada $\log_2 M$

$$\frac{P_e}{\log_2 M} \leq BER \leq P_e$$

P_e: suponiendo que siempre te equivocas con el símbolo $\Rightarrow$ error 1 simb $\equiv$ error $\log_2 M$ bits contrario

  - modulaciones ortogonales (ej FSK)

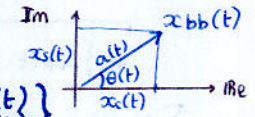


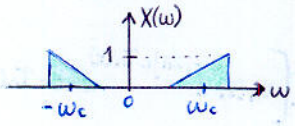
$$BER \simeq P_e \cdot \frac{M/2}{M-1}$$

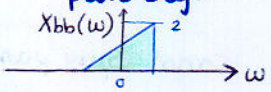
Tema 2. Canales en sistemas de comunicaciones digitales

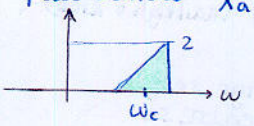
1. ANÁLISIS DE SISTEMAS PASO BANDA

$x(t)$ real y paso banda $\longleftrightarrow$ $\{x_c(t), x_s(t)\}$ o $\{a(t), \theta(t)\}$ reales y paso bajo $\longleftrightarrow$ $x_{bb}(t)$ compleja paso bajo $\longleftrightarrow$ $x_a(t)$ compleja paso banda





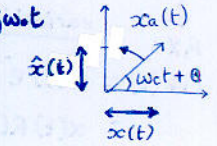




$$x_a(t) = x_{bb}(t)\cdot e^{j\omega_c t}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{x_a(t)\}$$

$$\hat{x}(t) = \mathrm{Im}\{x_a(t)\}$$



$$X_a(\omega) = (1+\mathrm{sgn}(\omega))\,X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega<0 \\ X(\omega) & \omega=0 \\ 2X(\omega) & \omega>0 \end{cases}$$

Canal Paso Banda

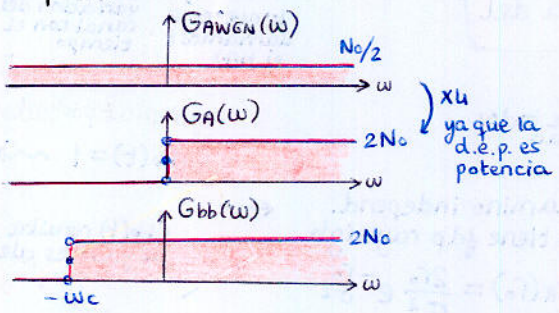
$x(t) \rightarrow [H(t)] \rightarrow y(t)$

$Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega)$

$Y_a(\omega) = X_a(\omega)\cdot \underbrace{\frac{1}{2}H_a(\omega)}_{H(\omega)\ \text{ya que}\ \omega>0}$

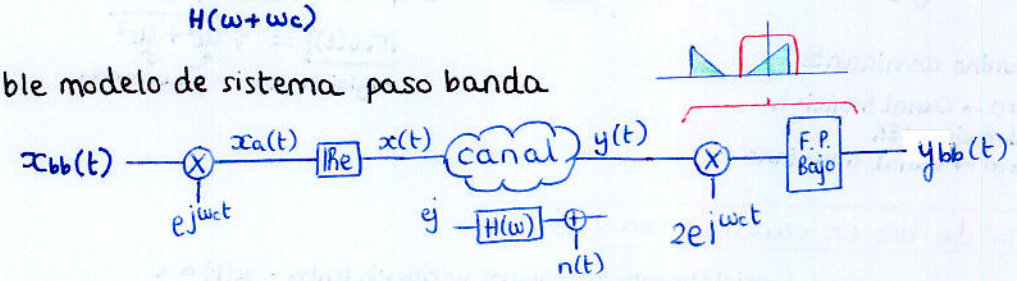
$Y_{bb}(\omega) = X_{bb}(\omega)\cdot \underbrace{\frac{1}{2}H_{bb}(\omega)}_{H(\omega+\omega_c)\ \omega>0}$

Espectros de ruido



x4 ya que la d.e.p. es potencia

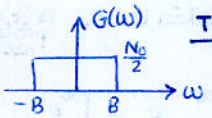
Posible modelo de sistema paso banda



2.1 CANAL DE COMUNICACIONES FIJO

(Fijo = no móvil)

- modelo: SLI con $|H(\omega)|$ plana, $\angle H(\omega)$ lineal } y si no, se consigue mediante ecualización
- ruido: blanco limitado en banda



$\xrightarrow{TF^{-1}}$ $R_n(\tau) = \overbrace{\frac{N_0}{2}\cdot 2B}^{N_0 B}\,\mathrm{sinc}(2B\tau)$

- capacidad: Teorema de Shannon: máxima vel. de tx sin errores (BER=0):

$$\frac{C}{B} = \log_2(1+SNR)\ \left[\frac{b/s}{Hz}\right]$$

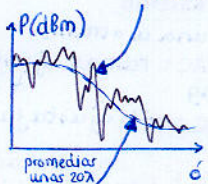
2.2 RADIO CANAL MÓVIL

Efecto multicamino

- Dominio t
  - Ensanchamiento temporal
  - Delay Spread σ
- Dominio f
  - canal instantáneo selectivo en frecuencia
  - AB de coherencia B_c

|H(f)| cte fase lineal

2 efectos simultáneos e indep.



- fading a pequeña escala: distrib. Rayleigh o Ricean
- fading a gran escala (shadowing montañas, edificios): distrib. log-normal

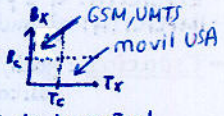
Movimiento (variación temporal)

- Dominio t
  - Tiempo de coherencia
  - T_c: tiempo durante el cual se considera el canal constante
- Dominio f
  - Ensanchamiento frecuencial
  - Doppler Spread

$$f_d = \frac{v\cos\alpha}{\lambda}$$

B_x: ancho de banda (paso bajo) de la señal transmitida

- Frequency selective fading → Hay ISI; Requiere ecualización (para |H(f)| cte fase lineal)
- Flat fading



T_x: duración temporal de la señal entre sucesivas estimaciones del canal

- Fast fading → Hay que estimar canal para ecualizar cada poco tiempo; muy difícil de combatir; mejora: usar entrelazado
- Slow fading

Caracterización de fading

TX: $s_{bb}(t) = R(t)e^{j\phi(t)}$

RX: $r_{bb}(t) = \alpha(t)e^{-j\theta(t)} s_{bb}(t)$ (variación amplit. y fase)

$= \alpha(t)R(t)\cdot e^{j(\phi(t)-\theta(t))}$ → envolvente recibida

$\alpha(t) = m(t)\cdot r_0(t)$

- $m(t)$: fading a gran escala (shadowing) (log-normal)
- $r_0(t)$: fading a pequeña escala (multicamino) (Raileigh o Rice)

Los dos fadings se multiplican entre sí ⚠

Caracterización del multicamino

Suponemos sin fading a gran escala $m(t)=1$

TX: $s(t) = \mathrm{Re}\{s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$

RX: $r(t) = \sum_n \alpha_n(t)\cdot s(t-\tau_n(t))$ (multicamino n-ésimo · amplitud α_n · retardo τ_n)

$= \mathrm{Re}\{s_{bb}(t-\tau_n(t))e^{j2\pi f_c(t-\tau_n(t))}\}$

$= \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\sum_n \alpha_n(t)s_{bb}(t-\tau_n(t))\cdot e^{-j2\pi f_c\tau_n(t)}}_{r_{bb}(t)}\cdot e^{j2\pi f_c t}\right\}$

Canal equiv paso bajo

$s_{bb}(t) \rightarrow [C_{bb}(\tau,t)] \rightarrow r_{bb}(t)$

$C_{bb}(\tau,t) = \sum_n \left[\alpha_n(t)e^{-j2\pi f_c\tau_n(t)}\delta(t-\tau_n(t))\right]$

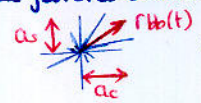
- $C_{bb}(\tau,t)$: lo que en SI llamamos ej $h(t)$
- variación del canal con el tiempo

nota de Pak: ¿No faltaría aquí un 2 para que $r_{bb}(t) = \frac{1}{2}C_{bb}(t) * s_{bb}(t)$?

ejemplo: portadora sin modular

$s_{bb}(t)=1 \rightsquigarrow r_{bb}(t) = \sum \alpha_n(t)e^{-j2\pi f_c\tau_n(t)}$, $\theta_n(t)$

- $r_{bb}(t)$ resulta ser suma de fasores aleatorios
- $\alpha_n(t)$: proceso aleat gaussiano
- $\theta_n(t)$: proceso aleat fdp unif $[0,2\pi]$



con partes real e imag. gaussianas

$|r_{bb}(t)| = \sqrt{a_c^2 + a_s^2}$ (rayleigh ⇐ gaussianas)

Clasificación estadística del canal móvil

1. Canal Gaussiano
   - SLI con AWGN
   - BER gaussiano ← a lo que todos aspiran
2. Canal Rayleigh
   - Componentes multicamino independ.

   $r_0 = \sqrt{a_c^2+a_s^2}$ r_0 tiene fdp rayleigh

   $\phi = \tan^{-1}(a_c/a_s)$ (a_c, a_s gaussianas)

   $f_R(r_0) = \frac{2r_0}{\sigma^2}e^{-\frac{r_0}{\sigma^2}}$
3. Canal Rician
   - multicamino pero con camino dominante

   $k = \frac{\text{Pot dominante}}{\text{Pot scatter}}$ { $k=0 \rightarrow$ Canal Rayleigh ↓ mejora BER; $k=\infty \rightarrow$ Canal Gaussiano

Probabilidad de error de bit en canales con fading

$r_{bb}(t) = \alpha(t)e^{-j\phi(t)}s_{bb}(t) + n_{bb}(t)$

Si suponemos detección coherente (se estima y corrige $\phi(t)$)

$r_{bb}(t) = \alpha(t)s_{bb}(t) + n_{bb}(t)$

- Inicialmente suponemos variación lenta $\alpha(t)=\alpha$

  $r_{bb}(t) = \alpha\cdot s_{bb}(t) + n_{bb}(t)$

  se define $\gamma_b = \alpha^2\frac{E_b}{N_o}$ y basta sustituir E_b/N_o por γ en las fórmulas de P_b
- si dejamos de suponer variación lenta $\alpha(t)$ proceso aleat $\Rightarrow \gamma_b(t)$ proceso aleat

  Basta con tener en cuenta cada posible γ_b, ponderado por su prob. $P_b = \int_0^\infty P_b(\gamma_b)\cdot \underbrace{p(\gamma_b)}_{\text{fdp}}\, d\gamma_b$

- Flat fading: α Rayleigh $\Rightarrow \gamma_b$ chi^2 $p(\gamma_b) = \frac{1}{\bar\gamma_b}e^{-\frac{\gamma_b}{\bar\gamma_b}}$ siendo $\bar\gamma_b = \bar\alpha^2\frac{E_b}{N_o}$
- Fast fading: imposible estimar $\phi(t)$ [no detección coherente] Usar DPSK (que no requiere) → sin fading $P_b = \frac{1}{2}e^{-\gamma_b}$ → flat fast fading $P_b = \frac{1}{2(1+\bar\gamma_b)}$

2.3 CANAL VIA SATÉLITE

- Fijo: (GEO)
  - gaussiano
  - Desv. por lluvia $f > 10$ GHz
  - Limitación en pot (no vale QAM)
- Satélite-móvil:
  - LOS
  - Rician

3. TÉCNICAS DE DIVERSIDAD

Varias réplicas de misma señal
- EXPLÍCITA: ej 2 polarizaciones
- IMPLÍCITA: ej multicamino

- Espacial: fácil, antenas $d > 10\lambda$ para fadings indep. distancia de coherencia, plano horiz.
- en Ángulo: varios haces estrechos no solapados switched beams vs. smart antennas
- en Frecuencia: AB adicional, combinar en rx, $\Delta f > B_c$ espaciado entre portadoras
- en Polarización: explícita: tx 2 polariz implícita: tx 1 polariz, rx 2 antenas limitado a 2 polariz ortogonales

  usado en BS para rx de MS con orientación aleatoria
- Temporal: Tx bits varias veces: $\Delta t = f(T_c)$ $= f(v, f_c)$

  caso particular: ecos de multicamino, siempre y cuando la señal tenga AB suficiente.

TECNICAS DE COMBINACION DE DIVERSIDAD

- Selección: escoger la de mayor C/N (una u otra...)
- Combinación de máxima probab. MRC: ramas ajustan pesas y fases para minimizar el fading
- Combinación de ganancia igual ERC: sólo ajusta fases → similares resultados

4. TÉCNICAS DE ACCESO MÚLTIPLE

2 tipos de canal

Canal MAC: usuarios comparten medio

Canal BC (broadcast) 1 tx, varios rx la info puede ser distinta para cada rx (i)

- FDMA: cada usuario una subbanda (canales de guarda evitan interf. cocanal)
- TDMA: slots, tiempos de guarda, síncrona
- CDMA: códigos ortogonales en mismo tiempo y frec.

  Ventajas: - Rechaza interferencias - No interfiere con banda estrecha en mismas frecs. - Reutiliza frec. en celdas adyacentes - Mitiga desvanecimientos

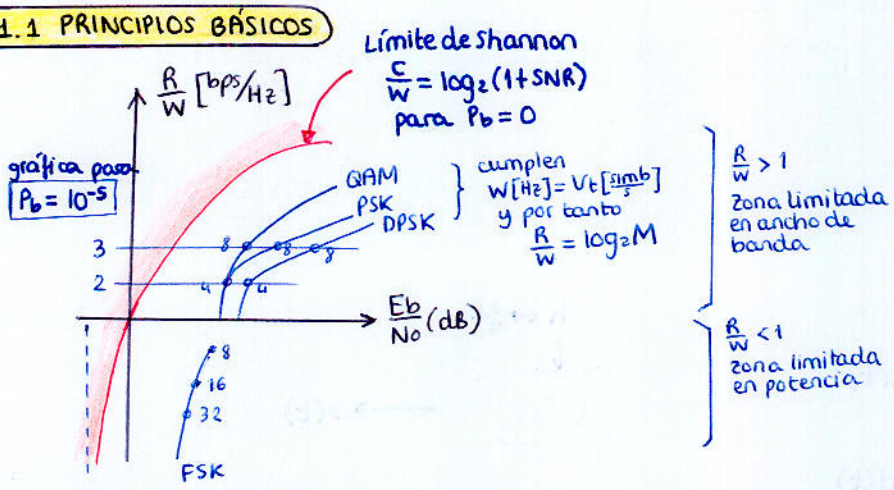
  Técnicas: Direct Sequence (DS) o Frequency Hopping (FH)
- TRMA: time random multiple access

Tema 3. Modulaciones Digitales Avanzadas

y Fundamentos de modems
leer transparencias

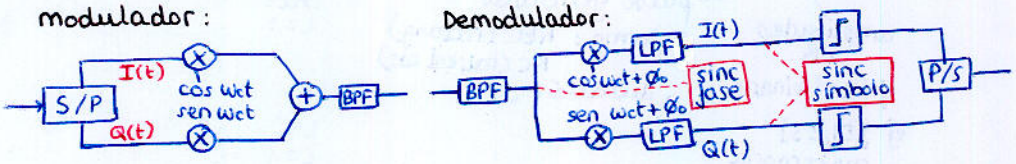
1. TÉCNICAS DE MODULACIÓN DIGITAL

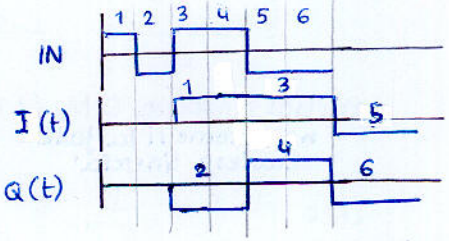
1.1 PRINCIPIOS BÁSICOS

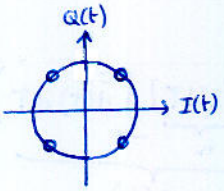


1.2 MODULACIONES CON EFICIENCIA <= 2 bps/Hz

QPSK



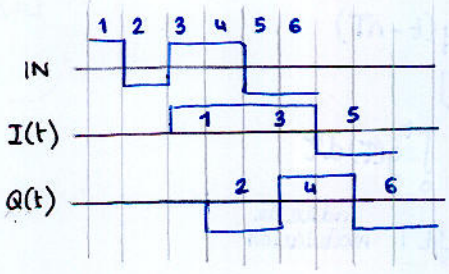




Problemas
- cambios de fase 180° (anula la envolvente) (sobrepasa pot sat)
- Requiere demodulación coherente (Φ_o)

OQPSK offset

- se introduce un retardo $\Delta t = T_b = \frac{T_s}{2}$ en Q(t)



Evita cambios de fase de 180°

$\frac{\pi}{4}$QPSK

- Rota la constelación $\pi/4$ en cada símbolo

- Eficiente en ancho de banda
- Buena Pb
- Sencillo de implementar
- Admite codificación diferencial

} características propias de QPSK

- Evita transiciones de π en la fase } característica especial

DQPSK Diferencial

- La información no va en la fase del símbolo sino en la diferencia de fase respecto al anterior

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Delta\Phi_n$$

ej: D $\frac{\pi}{4}$QPSK

$[a_{2n-1}, a_{2n}]$	$\Delta\Phi_n$
0 0	$+\pi/4$
0 1	$+3\pi/4$
1 0	$-\pi/4$
1 1	$-3\pi/4$

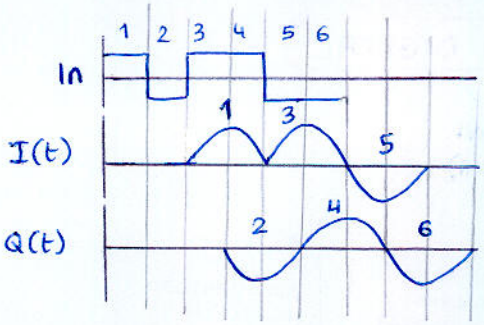
Ventajas: no requiere demodulación coherente

Desventaja: Ligero incremento en Pe (los errores vienen en pareja)

MSK

Dos formas de verla:

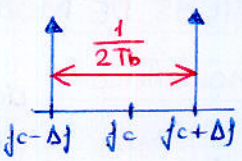
OQPSK con pulsos seno

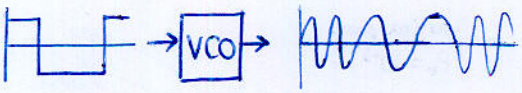


$I^2 + Q^2 = cte$

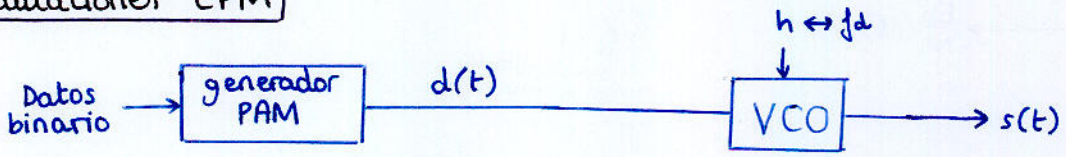
Fase continua en la circunferencia

I CPFSK LREC L=1 h=0'5





Modulaciones CPM

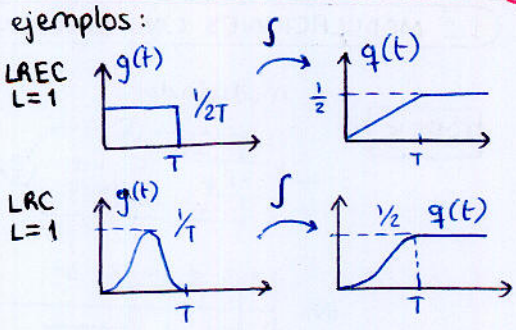


- señal PAM d(t)

$$d(t) = \sum a_n \cdot g(t - nT)$$

- a_n: amplitudes BB
  - ej $\{\pm 1\}$ binaria
  - ej $\{\pm 1, \pm 3\}$ cuaternaria
- $g(t)$: pulso generador
  - forma: REC (rectang.), RC (raised cos)
  - duración LT

ejemplos:



- señal de salida s(t)

$$s(t) = A\cos\left(\omega_c t + \varphi_0 + \underbrace{2\pi \underbrace{[2fdT]}_{h} \int_{-\infty}^{t} d(\tau)\,d\tau}_{\varphi(t)}\right)$$

fase de la salida: $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \underbrace{\pi h \sum a_k}_{\phi_n} + 2\pi h\, a_n\, q(t - nT)$$

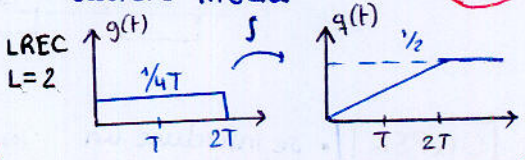
$$= 2\pi \sum_k [a_k h_k\, q(t - kT)]$$

$$h = 2fdT$$ índice de modulación

$$q(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau$$

Partial response CPM ($L > 1$) ← menor AB

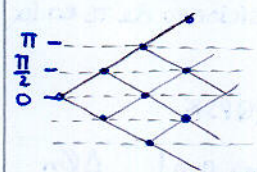
hace como si la fase tuviese 'inercia'



q(t) es la forma que sigue la fase ponderada por $2\pi h a_k$ en cada símbolo

si h↑ → AB↑ ☹, trayectoria de fase ↑, más robusto ☺

ej: MSK = CPFSK, L=1, h=0'5

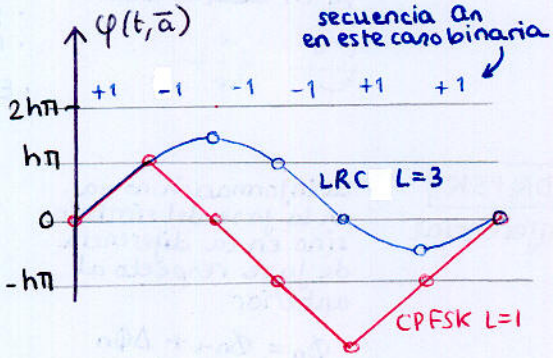


si $a_n = +1$ → fase $+\frac{\pi}{2}$

si $a_n = -1$ → fase $-\frac{\pi}{2}$

El diagrama Trellis de fase suele dibujarse envolviendo la fase en $[0, 2\pi[$

La fase a la salida sigue una **trayectoria** de fase

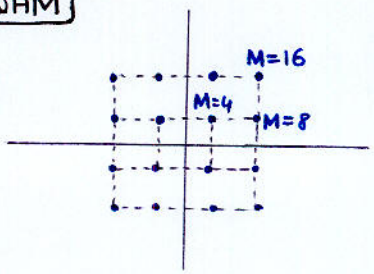


En la constelación no son puntos sino que la fase se mueve de forma continua

1.3 MODULACIONES CON EFICIENCIA >= 2 bps/Hz

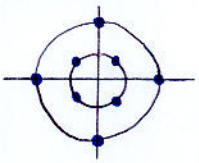
2 grupos { MQAM ; señaliz. resp. parcial (PRS)

M-QAM

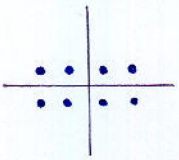


ej M=8

matemáticamente óptima:



sencilla:

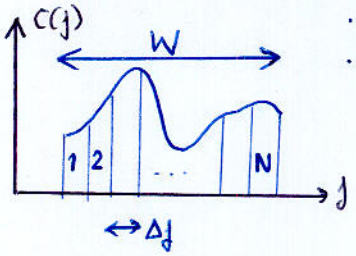


2. MODULACIONES MULTIPORTADORA

Problema banda ancha: duración símbolo pequeña sensible a ISI

Solución: tx en portadoras en paralelo, cada una con duración de símbolo grande

División en subbandas



- Canal no ideal C(f)
- Subbandas ancho Δf tal que canal ≃ ideal $\frac{|C(f)|^2}{Gn(f)} \simeq cte$

Capacidad:

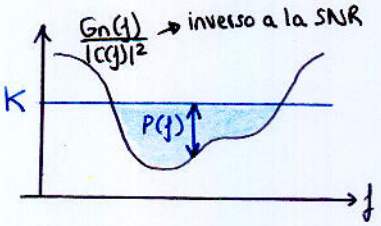
$$C = \sum C_i$$
$$= \sum \Delta f \cdot \log_2\left(1 + \frac{\Delta f\, P(f_i)\,|C(f_i)|^2}{\Delta f \cdot Gn(f_i)}\right)$$
$$= \sum \Delta f \log_2\left(1 + \frac{P(f_i)\,|C(f_i)|^2}{Gn(f_i)}\right) \xrightarrow[\Delta f \to 0]{\lim}$$
$$= \int_W \log_2\left(1 + \frac{P(f)\,|C(f)|^2}{Gn(f)}\right) df$$

Water Filling (Shannon, 1949)

se maximiza la capacidad si

$$P(f) = \begin{cases} K - \frac{Gn(f)}{|C(f)|^2} & f \in W \\ 0 & f \notin W \end{cases}$$

Hay que transmitir más potencia allá donde haya mejor SNR

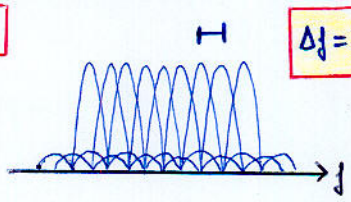


El caso peor para aprovechar esto es $\frac{Gn(f)}{|C(f)|^2}$ plano

i.e. si el canal es plano, el peor ruido es el blanco

Ejemplos multiportadora { DMT: Discrete Multitone Transmission (ADSL) ; OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing (DAB y DVB)

OFDM



$\Delta f = \frac{1}{T_s}$ mínima separación que logra ortogonalidad

$\int_0^T \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t\, dt = 0$

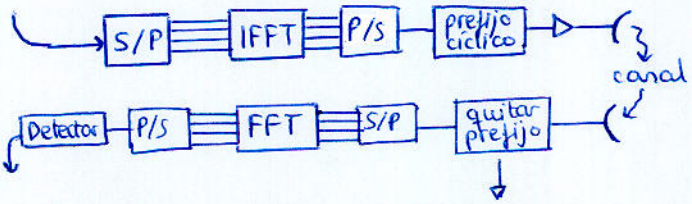
- FDM con máxima eficiencia espectral
- canales individuales no selectivos
- Lóbulos laterales caen rápidamente (pocas interf)

Problema: No es de envolvente cte. La señal suma presenta picos (malo en satélites y soportes magnéticos)

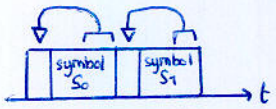
Implementación con FFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum X[k]\, e^{i\frac{2\pi k}{N}n}$$

señal tx; en cada símbolo $\in \mathbb{C}$ metemos un vector (PSK, QAM, ...); senos ortog



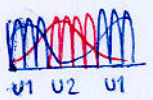
- Inserción al principio de la última parte del símbolo
- En recepción todas las portadoras tienen un nº entero de periodos (simplifica la ecualiz.)



Problema: Desvanecimiento puede hacer desaparecer portadora

Solución protección { codif canal (bloque, convol) ; entrelazado ; modulación codificada

aprovechar para OFDMA (multiple acceso)

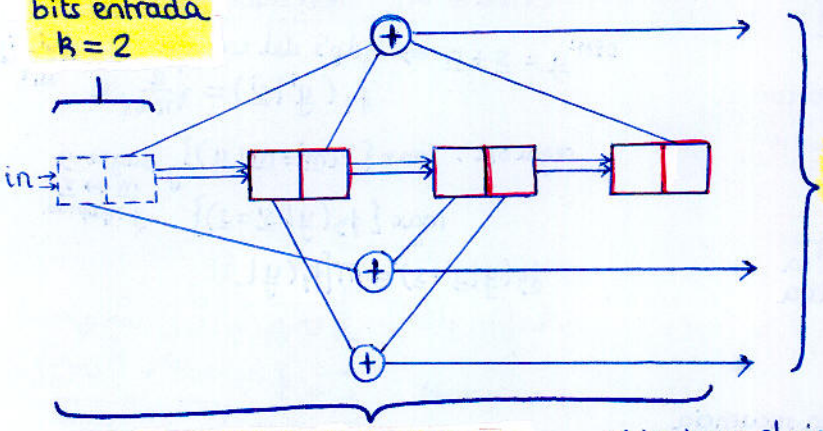


Tema 4. Modulación Codificada

Recuerda:
- Codificación { de fuente: comprimir; de canal: proteger { de bloque; convolucional }
- Código sistemático: los bits de entrada aparecen a la salida.

1. FUNDAMENTOS DE CODIFICACIÓN CONVOLUCIONAL

ejemplo: Parámetros del codificador



Longitud de influencia $K = 4$ ← sí incluye el ciclo de 'entrada'

memoria $M = 6$ ← nº cajitas sin contar las de entrada (ya que no requieren memoria)

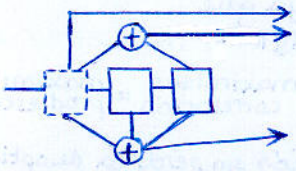
estados $S = 2^M$

Ratio de codificación: $R_c = k/n$

distancia libre d_{free}: mínima distancia hamming (nº de bits '1') a la salida entre dos estados cero

Ganancia de codificación: $G_c \leq 10 \log (R_c d_f)$

Diagramas para describir un codificador



K=3, k=1, n=3
4 estados a,b,c,d

Diagrama de árbol

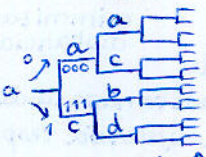


Diagrama de estados

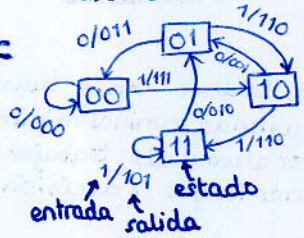
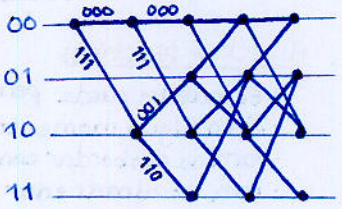


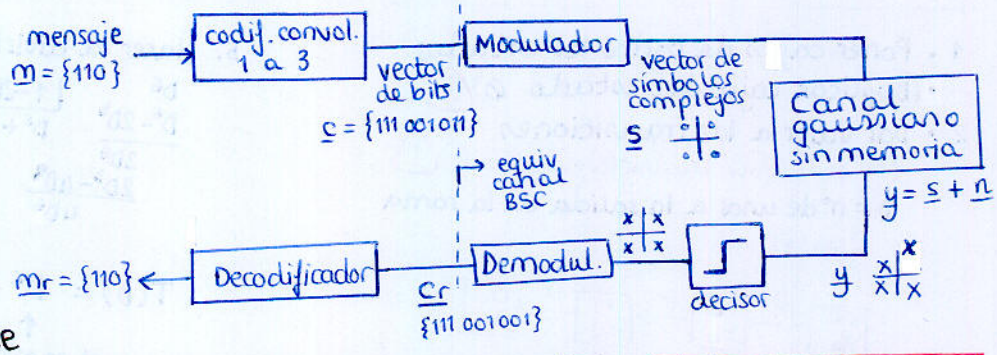
Diagrama de rejilla



2. DECODIFICACIÓN DE CÓDIGOS CONVOLUCIONALES EN CANALES SIN MEMORIA

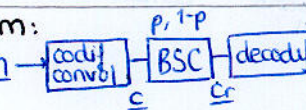
- Detección de máxima verosimilitud
  - minimiza la prob. error
  - Sigue siendo óptimo si se utiliza para detectar la secuencia entera (escoger el chorro de bits posible que con más probabilidad ha dado lugar a lo recibido)

Detector firme



Criterio ML: Detección firme

Dem:



$f_{c_r}(\underline{c}_r^i \mid \underline{c}^i) = \begin{cases} p & \underline{c}_r^i \neq \underline{c}^i \\ 1-p & \underline{c}_r^i = \underline{c}^i \end{cases}$

decido $m_r = m^i$ si: (regla óptima)

$P(\underline{m}^i = \underline{m} \mid \underline{c}_r) \geq P(\underline{m}^k = \underline{m} \mid \underline{c}_r)$ → Bayes

$\frac{P(\underline{m}^i = \underline{m}) f(\underline{c}_r \mid \underline{m}^i = \underline{m})}{f(\underline{c}_r)} \geq \frac{P(\underline{m}^k = \underline{m}) f(\underline{c}_r \mid \underline{m}^k = \underline{m})}{f(\underline{c}_r)}$ → equiprob. y $m^i \leftrightarrow c^i$ uno a uno

$\max \{ f(\underline{c}_r \mid \underline{c}^k = \underline{c}) \}$

$f(\underline{c}_r \mid \underline{c}_k) = \prod_j f(c_{rj} \mid c_{kj})$ para cada bit

$\ln(\underline{c}_r \mid \underline{c}_k) = \sum_j \ln(f(c_{rj} \mid c_{kj}))$ Log likelyhood

$= d \ln p + (N-d) \ln(1-p)$

$= d \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + N \ln(1-p)$

(maximizar si $p < 1/2$; común)

$\min d \Leftarrow$

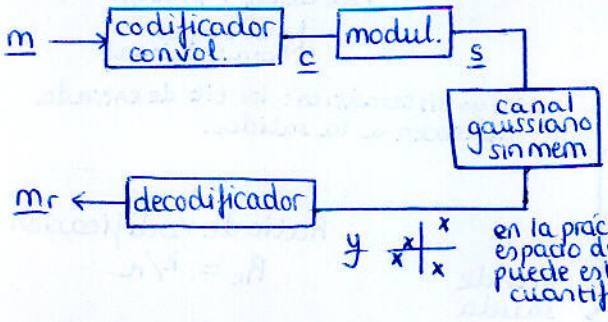
Criterio ML

⇕

Escoger la palabra código con menor nº de bits distintos (distancia Hamming)

Detector indeciso

- no hay circuito de decisión
- el vector selecciona $\underline{m}_r$ directamente de y
- Funciona mejor ya que utiliza toda la información disponible en el receptor



en la práctica, el espacio de vectores puede estar cuantificado

Criterio ML ⟺ Escoges la palabra código cuya modulación tenga la menor distancia euclídea con el vector de símb. rx

Criterio ML : Detección indecisa

DEM: $\underline{y} = \underline{s} + \underline{n} \Rightarrow$ fdp's del canal: $f_y(\underline{y}^i | \underline{s}^i) = \sqrt{\frac{2}{\pi N_0^2}} e^{-\frac{2(y^i - s^i)^2}{N_0^2}}$ (sobran los dosses!!)

regla opt: $\max\{P(\underline{m}^i = \underline{m} | \underline{y})\}$ → Bayes y $\underline{m} \leftrightarrow \underline{s}$ y equiprob.

$\max_i \{f_y(\underline{y} | \underline{s}^i = \underline{s})\}$

$f_y(\underline{y} | \underline{s}^k) = \prod f_y(y^j | s_k^j)$

$\ln[f_y(\underline{y} | \underline{s}^k)] = \sum \ln f_y(y^j | s_k^j)$ (log likelyhood)

$= -\frac{2}{N_0^2} \sum_j (y_j - s_k^j)^2 + \frac{M}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi N_0^2}\right)$

↑ minimizar ↕ maximizar; $\sum (y_j - s_k^j)^2$ = dist euclídea; $\frac{M}{2} \ln(\frac{2}{\pi N_0^2})$ = común

Algoritmo de Viterbi

Para encontrar la secuencia más probable sin probar todas las posibles

- Partimos del estado 0 con 0 errores acumulados
- Para cada ciclo; en cada estado destino calculamos el error acumulado como suma del error acumul. en el estado origen más el error introducido en la rama que los une (distancia hamming entre lo recibido ese ciclo y la salida de la rama)
- Si a un estado se puede llegar con varias ramas, tomamos la que da lugar a un error acumulado menor en dicho estado, podando las demás

- Viterbi detector fijo: el error es la distancia hamming (nº bits distintos)
- Viterbi detector indeciso: el error es la distancia euclídea entre el/los símbolos recibidos y el/los símbolos generados por el codificador para esa rama

Se puede implementar con un banco de correladores ya que

$\|\underline{y} - \underline{x}_i\|^2 = \|\underline{y}\|^2 - 2\langle \underline{y}, \underline{x}_i \rangle + \|\underline{x}_i\|^2$

minimizar distancia = maximizar correlación = maximizar prod. escalar

Aspectos prácticos

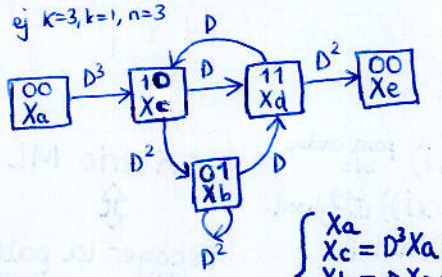
- El indeciso puede permitirse trabajar con y cuantificado
- Si en algún momento se fusionan caminos mínimos, puede tomarse la decisión sin pérdida de optimidad
- Para no desbordar con el error acumulado, trabajar con la diferencia respecto a la mínima
- Para no almacenar caminos largos → decisión anticipada (long 6K sin pérdida apreciable)

Función de transferencia (o función generadora de caminos)

- Todos los caminos posibles entre estado 0 y 0 (que por ser lineal, son TODOS los caminos posibles)

1. Poner cajas de todos los estados (Duplicar caja del estado 0) ⚠
2. Dar valor a las transiciones (no considerar transición de 0 a 0) ⚠
   D = nº de unos a la salida de la rama

ej K=3, k=1, n=3



3. Escribir ecuaciones

$$\begin{cases} X_a \\ X_c = D^3 X_a + D X_b \\ X_b = D X_c + D X_d \\ X_d = D^2 X_c + D^2 X_d \\ X_e = D^2 X_b \end{cases}$$

4. Despejar la función de transferencia (importante sacar factor común y pasar dividiendo)

$$T(D) = \frac{X_e}{X_a} = \frac{D^6}{1 - 2D^2}$$

5. Hacer la división (dejas siempre resto)

$$\begin{array}{l} D^6 \\ \underline{D^6 - 2D^8} \\ 2D^8 \\ \underline{2D^8 - 4D^{10}} \\ 4D^{10} \end{array} \quad \frac{1 - 2D^2}{D^6 + 2D^8 + 4D^{10} + \dots}$$

$$T(D) = D^6 + 2D^8 + 4D^{10}$$

- D^6: el camino con mínimo nº de unos tiene 6
- $2D^8$: dos caminos con ocho unos
- $4D^{10}$: cuatro caminos con diez unos

↓

Distancia libre

· Distancia libre

d_{free} = mínimo nº de unos desde estado ∅ hasta ∅ = mínimo nº de bits erróneos que pueden dar lugar a una secuencia válida

i.e. se detectan todos los errores de menos de d_{free} bits

más típico tabla con $K = \frac{M}{k} + k = M+1$ (si k=1)

M	d_{free} max alcanzable			
	$R_c = 1/2$		$R_c = 1/3$	
	sistemático	no sist.	sistem.	no sist.
1	3	3	5	5
2	4	5	6	8
3	4	6	8	10
⋮	⋮	⋮		

ej: $G_c = 10 \log(6 \cdot 1/2)$

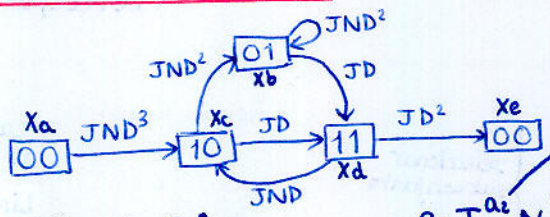
ej: $G_c = 10 \log(10 \cdot 1/3)$ ($d_{free} \cdot R_c$)

Es importante tener una d_{free} ↑ para lograr G_c ↑

↑ interesa R_c alto (i.e. pocas bits salida) ya que si no 'no tiene mérito' pero con R_c altos se pueden tener d_{free} mayores

· Función de transferencia (con más info)

N: bit entrada fue 1
J: siempre (contador)
D: nº de 1s a la salida



nº ciclos recorridos
nº unos a la entrada
nº unos a la salida

$a_1 J^{a_2} N^{a_3} D^{a_4}$ → nº de combinaciones que existen

$$T(D,N,J) = \frac{Xe}{Xa} = \dots = J^3 N D^6 + J^4 N^2 D^8 + \dots$$

si eliminamos la J=1

$$T(D,N) = \sum_d \sum_h N_{dh} D^d N^h$$

d: nº de unos a la salida
h: nº de unos a la entrada
N_{dh}: nº de combinaciones posibles con 'h' unos a la entrada y 'd' a la salida

· Probabilidad de error de bit

Lo calculamos suponiendo que se transmite todo ceros y por tanto el nº de errores es el nº de unos a la salida (sin pérdida de generalidad por ser lineal) ⓘ

$$N_e \leq \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d \cdot P_2(d)$$

N_e: nº medio de bits entregados erróneos cada ciclo

d_{free}: promedio para cada d

$P_2(d)$: Probabilidad de equivocarse de rama si hay 'd' bits erróneos

creetelo:
$$P_2(d) \leq \begin{cases} [4p(1-p)]^{\frac{d}{2}} & \text{firme} \\ Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} R_c d}\right) & \text{indeciso} \end{cases}$$

β_d: nº medio de unos a la salida (y por tanto de bits erróneos a la salida) si hay 'd' unos a la entrada (y por tanto 'd' errores)

$$\beta_d = \sum_h N_{dh} \cdot h$$

promedio de h (unos a la salida) para todas las posibles ramas con d unos a la entrada

calculable con $\left.\frac{\partial T(D,N)}{\partial N}\right|_{N=1} = \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d \cdot D^d$

se obtienen todas las β_d (para cada d)

y finalmente

$$P_b = \frac{N_e}{k}$$

· Ganancia de codificación

Incremento que necesitaría SNR para obtener la misma Pe sin usar codificación

- De las expresiones anteriores
- Para BPSK o QPSK ⇒ $G_c \leq 10 \log(d_{free} \cdot R_c)$

4dB con K=3 R_c=1/2
7dB con K=7 R_c=1/2

G_c baja 2dB al usar detección firme en lugar de indecisa

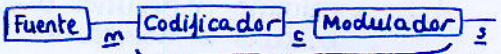
¿como aumentar d_{free}?

↳ aumentar memoria M
aumentar long. influencia k

↳ aumentar bits salida n
(reducir R_c)

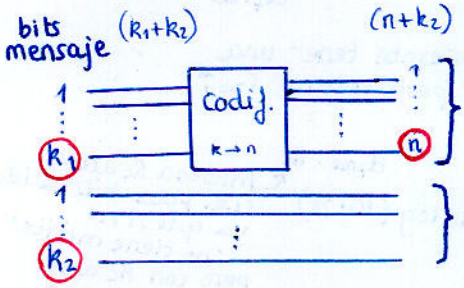
3. TCM: Modulación codificada por rejilla

Idea básica de la modulación codificada



- Mejora P_e para igual potencia y AB
- Desarrollado por Ungerboek años 80 (TCM)
- Se incorpora a modems CCITT V.t

Codificador de Ungerboek:



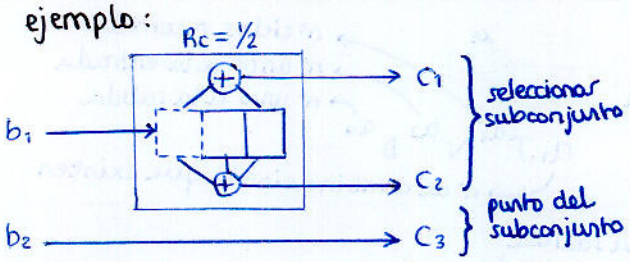
Los bits codificados seleccionan el subconjunto $(1, 2, \dots, 2^n)$ → y por tanto se mapean juntos en la constelación

Los bits sin codif. (representan las ramas paralelas en la rejilla de Trellis) seleccionar el punto del subconjunto $(1, 2, \dots, 2^{k_2})$ → por tanto aparecen lo más separados posibles en la constelación

⇒ El número de señales aumenta, permitiendo bits de redundancia sin sacrificar ancho de banda

- Se utiliza codificación convolucional para introducir dependencia entre símbolos
- Se utiliza decodificación indecisa en el receptor.

ejemplo:



Esto podría mapearse con QPSK

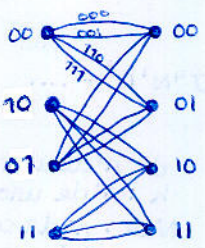
Esto lo mapeamos con el mismo ancho de banda en 8PSK

[símbolos mas juntos: P_e ↑ ; se ha usado $R_c = 1/2$: P_e ↓]

Al final resulta que sí merece la pena.

¿Porqué no codificamos todos los bits y usamos una R_c menor (mayor n)?
→ mejoraría la ganancia G_c
→ PERO El decodificador sería mas complejo

Rejilla Trellis

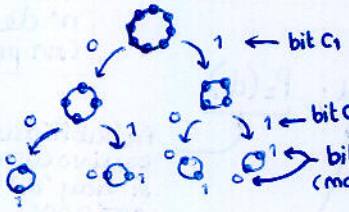


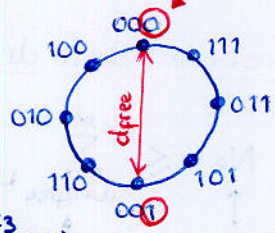
Las ramas paralelas corresponden a los bits sin codificar.

Se limita la máxima d_{free} del código a la distancia entre ramas paralelas:

Por eso hay que mapear los 2 valores del bit sin codificar a la mayor distancia euclídea posible

Partición de conjuntos





• Ganancia de codificación

Primera aproximación para códigos de pocos estados

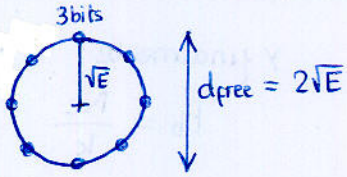
$$G_c = 10 \log\left(\frac{d_{free}^2}{d_{ref}^2}\right)$$

Con más estados la G_c crece

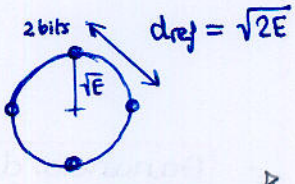
ej: Ungerboek 8PSK frente a 4PSK

Estados	G_c (dB)
4	3
8	3.6
16	4.1
32	4.6

d_{free}: distancia libre del código



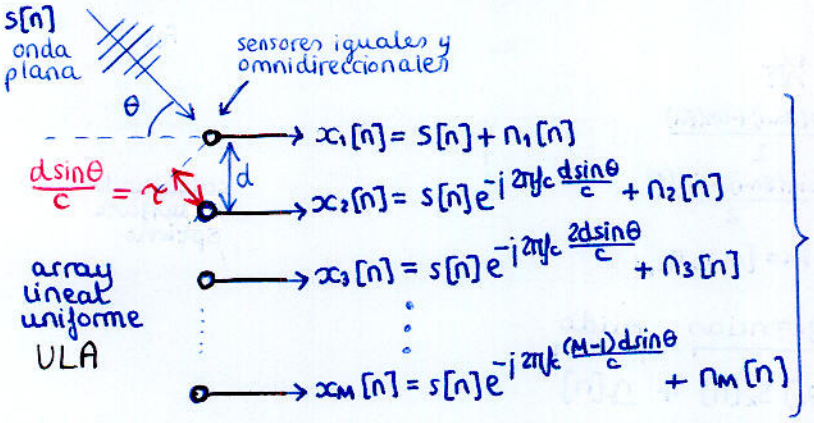
d_{ref}: distancia mínima en la modulación sin codificar (menos símbolos) para misma energía por bit



→ Nota Pak: en transparencia pone misma energía POR BIT, pero luego en el ejemplo usa la misma energía POR SIMBOLO

Tema 5. Introducción al procesado en array

1. INTRODUCCIÓN. MODELO DE SEÑAL



SNAPSHOT:

$$\underline{x}[n] = \underline{a}(\theta_s) \cdot s[n] + \underline{n}[n]$$

$$\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ \vdots \\ x_M[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_c \frac{d\sin\theta}{c}} \\ e^{-j2\pi f_c \frac{2d\sin\theta}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d\sin\theta}{c}} \end{bmatrix} s[n] + \begin{bmatrix} n_1[n] \\ n_2[n] \\ n_3[n] \\ \vdots \\ n_M[n] \end{bmatrix}$$

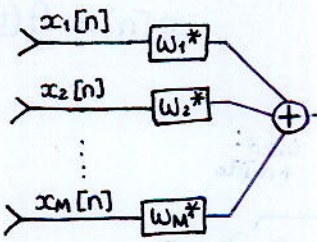
STEERING VECTOR — Vector de ruidos

Nota: suponemos $B \ll f_c \Rightarrow s[n - i\tau] \simeq s[n]$ el retardo no afecta a la señal, sólo a la fase de la portadora

2. CONFORMACIÓN DE HAZ (BEAMFORMING)

Análogo a un filtro FIR pero espacial

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}$$



por tradición matemática se ponen conjugados

$$y[n] = [w_1^* \; w_2^* \ldots w_M^*] \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_M[n] \end{bmatrix}$$

$$y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n]$$

Relación señal a ruido

- En un sensor m-ésimo $SNR|_{\text{sensor m}} = \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$
- A la salida del beamform $SNR|_{\text{array}} = \dfrac{|\underline{w}^H \underline{a}(\theta)|^2}{\|\underline{w}\|^2} \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$

GANANCIA DEL ARRAY

pem:

$$y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n] = \underline{w}^H (\underline{a}(\theta) s[n] + \underline{n}[n]) = \underline{w}^H (\underline{a}(\theta) s[n]) + \underline{w}^H \underline{n}[n]$$

$$E[|\cdot|^2] = |\underline{w}^H \underline{a}(\theta)|^2 \sigma_s^2 \qquad E[|\cdot|^2] = \|\underline{w}\|^2 \sigma_n^2$$

$\underline{w}^H \underline{a}(\theta)$: un escalar

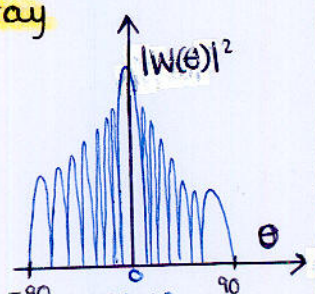
maximizar $SNR|_{\text{array}}$ → Filtro adaptado $\underline{w} = \underline{a}(\theta)$

Beampattern o Función de array

$$|W(\theta)|^2 = \frac{|\underline{w}^H \cdot \underline{a}(\theta)|^2}{M}$$

si $d = \lambda/2$

- M sensores → M-1 lóbulos
- Lóbulos en broadside ($\theta = 0°$) más estrechos que en endfire ($\theta = 90°$) (anchura cte si dibujáramos $\sin\theta$ en lugar de θ)

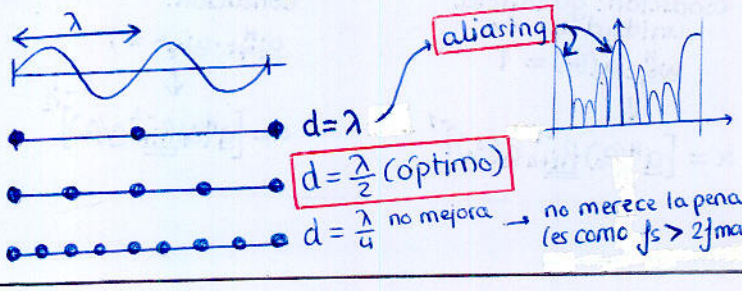


ej M=16, $d = \lambda/2$

Conceptos análogos a muestreo

Longitud total del array —análogo→ tiempo de observación ⇒ Resolución $\Delta\theta_{-3dB} \simeq \frac{\lambda}{L}$ ancho de haz

Distancia d entre elementos —análogo→ $\frac{1}{f_s} = T_s$

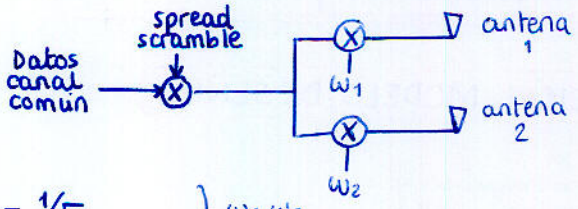


Filtro adaptado

Maximiza SNR|array $\boxed{\underline{w} = \underline{a}(\theta)}$

- para una dirección θ (compensa los retardos del array en esa θ)
- No tiene en cuenta interf.

ejemplo: Closed-mode Loop en estándar UMTS



$$\begin{cases} \omega_1 = 1/\sqrt{2} \\ \omega_2 = \dfrac{\cos(\phi_{n-1}) + \cos(\phi_n)}{2} + j\dfrac{\sin(\phi_{n-1}) + \sin(\phi)}{2} \end{cases}$$

con $\phi_n = \{0, \pi, \pi/2, -\pi/2\}$

$\omega_1\ \omega_2$ → genera pesos ← n

Feedback usuario (2 bits en cada trama) $n = 1,2,3,4$ calculando el desfase óptimo

Considerando interferencias

nuevo snapshot

$$\underline{x}[n] = \overbrace{\underline{a}(\theta_0)\cdot s_0[n]}^{\text{señal deseada}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{K}\underline{a}(\theta_k)\, s_k[n]}^{\text{interferencias}} + \overbrace{\underline{n}[n]}^{\text{ruido}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j2\pi f_c \frac{d\sin\theta_0}{c}} & e^{-j2\pi f_c \frac{d\sin\theta_1}{c}} & \cdots & e^{-j2\pi f_c \frac{d\sin\theta_K}{c}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d\sin\theta_0}{c}} & e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d\sin\theta_1}{c}} & \cdots & e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d\sin\theta_K}{c}} \end{bmatrix}}_{\underline{a}(\theta_0)\ \ \underline{a}(\theta_1)\ \cdots\ \underline{a}(\theta_K)} \cdot \begin{bmatrix} s_0[n] \\ s_1[n] \\ \vdots \\ s_K[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1[n] \\ n_2[n] \\ \vdots \\ n_M[n] \end{bmatrix}$$

señal deseada + interferentes

$\underline{\underline{A}}(\theta)$ steering matrix

$$\boxed{\underline{x}[n] = \underline{\underline{A}}(\theta)\cdot \underline{s}[n] + \underline{n}[n]}$$

y por tanto tras el filtro espacial

$$y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n]$$

potencia

$$E[|y[n]|^2] = \underline{w}^H \cdot \left(\underline{\underline{R}}_s + \overbrace{\underline{\underline{R}}_i + \underline{\underline{R}}_n}^{\underline{\underline{R}}_{i+n}}\right)\underline{w}$$

(señal útil; interf + ruido)

$$= \underline{w}^H \cdot \underline{\underline{R}}_s \cdot \underline{w} + \underline{w}^H\left(\underline{\underline{R}}_i + \underline{\underline{R}}_n\right)\underline{w}$$

$\underline{\underline{R}}_s$: $\sigma_{s_0}^2 \underline{a}(\theta_0)\underline{a}^H(\theta_0)$

$\underline{\underline{R}}_i$: $\sum_i \sigma_{s_i}^2 \underline{a}(\theta_i)\underline{a}^H(\theta_i)$

$\underline{\underline{R}}_n$: $\sigma_n^2 \underline{\underline{I}}$

$\underline{\underline{R}}_{i+n}$

matrices de autocorrelación

$$= \sigma_{s_0}^2 |\underline{w}^H \underline{a}(\theta_0)|^2 + \underline{w}^H \underline{\underline{R}}_{i+n}\underline{w}$$

Relación señal a interf+ruido

$$SINR = \frac{\sigma_{s_0}^2 |\underline{w}^H \underline{a}(\theta_0)|^2}{\underline{w}^H \underline{\underline{R}}_{i+n}\underline{w}} \xrightarrow{\max}$$

Beamformer óptimo

$$\underline{w}_{opt} = \alpha \cdot \underline{\underline{R}}_{i+n}^{-1}\cdot \underline{a}(\theta_0)$$

maximiza la SINR

α: cte: grado de libertad

Posibles valores del parámetro α: (fijar una condición)

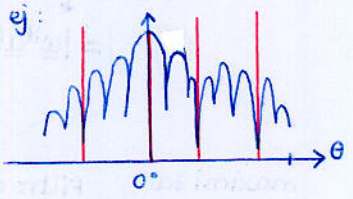
- **MVDR**: mínima varianza sin distorsión.
  Condición: ganancia unidad en θ_0
  $\underline{w}_{opt}^H \underline{a}(\theta_0) = 1$
  ↓
  $\alpha = [\underline{a}^H(\theta_0)\underline{\underline{R}}_{i+n}^{-1}\underline{a}(\theta_0)]^{-1}$

- Ganancia unidad del ruido
  Condición:
  $\underline{w}_{opt}^H \cdot \underline{w}_{opt} = 1$
  ↓
  $\alpha = [\underline{a}^H(\theta)\underline{\underline{R}}_{i+n}^{-2}\underline{a}(\theta_0)]^{-1/2}$

- Ganancia unidad del ruido + interf
  Condición:
  $\underline{w}_{opt}^H \underline{\underline{R}}_{i+n}\underline{w}_{opt} = 1$
  ↓
  $\alpha = [\underline{a}^H(\theta)\underline{\underline{R}}_{i+n}^{-1}\underline{a}(\theta_0)]^{-1/2}$

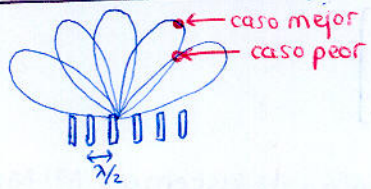
No sólo tiene máximo en la señal útil sino que anula las interf:

ej:



Aplicación a wireless

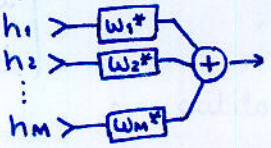
Phased arrays: basados en filtro adaptado
incluye los
Switched beam array



se conmuta entre distintos haces al que apunte al usuario (mejor S/N)

Maximal Ratio Combining

Más general: cada antena no sólo recibe un desfase distinto sino un canal distinto.
El peso óptimo es el filtro adaptado



óptimo tras estimar el canal:

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix}$$

---

3. ESTIMACIÓN DE LA DIRECTION OF ARRIVAL (DOA)

Estimar la dirección de llegada de las distintas señales que inciden en el array
(Radar, sonar, wireless, ...)

señales de antenas: $\underline{x}[n] = \underline{\underline{A}}(\underline{\theta}) \cdot \underline{s}[n] + \underline{n}[n]$

matriz de covarianza: $\underline{\underline{R_x}} = E[x[n] \cdot x^H[n]] = \underline{\underline{A}}(\underline{\theta}) \cdot \underline{\underline{R_s}}\, \underline{\underline{A}}^H(\underline{\theta}) + \underline{\underline{R_n}}$

Métodos espectrales — Obtienen el espectro de la señal en ángulo

- **Estimador de Bartlett**
  equivalente al periodograma espacial

$$P_{Bartlett}(\theta) = \frac{1}{M}\, \underline{a}^H(\theta)\, \underline{\underline{R_x}}\, \underline{a}(\theta)$$

  - complejidad: búsqueda 1D
  - requiere señales incorreladas
  - sesgado

Dem:
beamformer: $y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n] \overset{\text{F.A.}}{=} \underline{a}(\theta) \cdot \underline{x}[n]$
↓ pot.
$E[|y[n]|^2] = \underline{a}^H(\theta) \cdot \underline{\underline{R_x}} \cdot \underline{a}(\theta)$

- **Estimador de Capon**

$$P_{capon}(\theta) = \frac{1}{\underline{a}^H(\theta)\, \underline{\underline{R_x}}^{-1}\, \underline{a}(\theta)}$$

  - complejidad: búsqueda 1D
  - requiere señ. incorreladas
  - sesgado

Dem: basado en beamformer óptimo MVDR
MVDR → $y[n] = \left[\underbrace{\frac{\underline{\underline{R_x}}^{-1}\underline{a}(\theta)}{\underline{a}^H(\theta)\underline{\underline{R_x}}^{-1}\underline{a}(\theta)}}_{\underline{w}}\right]^H \cdot \underline{x}[n]$
↓ pot
$P_y(\theta) = \ldots = P_{capon}(\theta)$

- **Método MUSIC**

$$P_{Music}(\theta) = \frac{M}{\underline{a}^H(\theta) \cdot \underline{\underline{\Pi_n}} \cdot \underline{a}(\theta)}$$

  - complejidad: búsqueda 1D + EVD (eigenvalue decomposition)
  - requiere señales incorreladas
  - insesgado

Enfoque algebraico: Descomponer $\underline{\underline{R_x}}$ en subespacios

$$\underline{\underline{R_x}} = \underline{\underline{U_s}}\, \underline{\underline{\Lambda_s}}\, \underline{\underline{U_s}}^H + \sigma_n^2\, \underline{\underline{U_n}}\, \underline{\underline{U_n}}^H$$

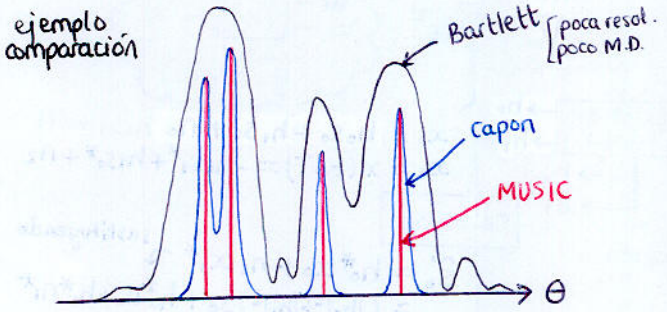
$\underline{\underline{U_s}}$: autovectores de los K+1 mayores autovalores → subespacio de la señal
$\underline{\underline{U_n}}$: autovectores de los otros M−(K+1) autovalores → subespacio de ruido
ortogonales entre sí

Si voy tomando $\underline{a}(\theta)$ para $\theta \in [-90°, 90°]$ y voy proyectando sobre el subespacio de ruido, allá donde haya dirección de llegada habrá un nulo

$\underline{\underline{U_n}}^H \underline{a}(\theta) = 0$ para $\theta = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_K$

$\underline{\underline{\Pi_n}} = \underline{\underline{U_n}}\, \underline{\underline{U_n}}^H$ matriz de proyección sobre el espacio de ruido

ejemplo comparación



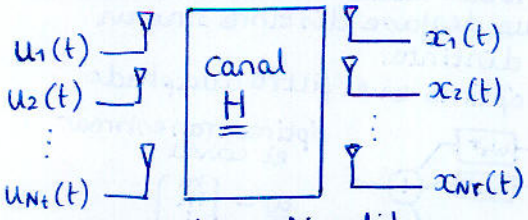
Métodos paramétricos — Basados en el modelo de señal

- ML y variantes (permite señales correladas entre sí)
- ESPRIT

- complejidad: búsqueda (K+1)dimensional
- insesgado

4. SISTEMAS MIMO (Multiple Input Multiple Output)

se está acabando el estándar WiFi 802.11 n



Nt entradas Nr salidas

$$\underline{x} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{Nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1Nt} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{Nr1} & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{Nt} \end{bmatrix}$$

Modelo de señal Single-User

antenas tx · multi caminos · respuesta antena i-ésima · fading complejo camino l · envolvente compleja tx de antena j con retardo de camino l

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{Nt} \sum_{l=1}^{Lj} a_i(\theta_l) \cdot \alpha_l(t) \cdot u_j(t - \tau_l)$$

simplificación: slow fading: $\alpha_l(t) = \alpha_l$; flat fading: $\tau_l \simeq 0$

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{Nt} \sum_{l=1}^{Lj} \underline{a}(\theta_l) \cdot \alpha_l \cdot u_j(t)$$

$u_j(t)$ = señal TX por antena j

$$u_j(t) = \sum_n s_j[n] g(t - nT)$$

añadiendo ruido y muestreando cada T

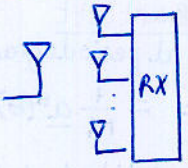
$$\underline{x}[n] = \underline{\underline{H}}\, \underline{s}[n] + \underline{n}[n]$$

$\underline{x}[n]$: respuesta del canal a cada símbolo
- efecto de respuesta del array
- forma de onda del pulso
- fading

Estrategias de sistemas MIMO

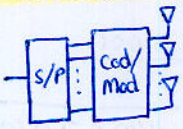
- Combatir el fading: con óptima ecualización de canal y cancelación de interf. multicam.
  - requiere estimación previa del canal
- Aprovechar la propag. multicamino y su incorrelación para aumentar la capacidad

• DIVERSIDAD:



Ganancia en potencia
- que sean incorrelados
- límites teóricos: máxima SNR y ecualiz. perfecta
- permite beamforming

• MULTIPLEXACIÓN



Ganancia en régimen binario

interesa poder separar en rx:
- FDM
- TDM
- Codif. espacio-tiempo

Consideraciones de capacidad

Dem:

Canal SISO → $y = \alpha \cdot s + n \rightarrow \frac{C}{W} = \log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma_z^2}|\alpha|^2\right)$

Canal MIMO → $\underline{y} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{s} + \underline{n} \rightarrow$

$$\frac{C}{W} = \log_2\left(\det\left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{\sigma_z^2}\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{H}}^H\right)\right)$$

$\underline{\underline{Q}} = E\{\underline{x} \cdot \underline{x}^H\}$

repartiendo pot. por igual $\underline{\underline{Q}} = \frac{P}{Nt}$ (sería más óptimo water-filling)

$$\frac{C}{W} = \log_2\left(\det\left(\underline{\underline{I}} + \frac{P/Nt}{\sigma_z^2}\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^H\right)\right)$$

canales incorrelados $\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{H}}^H = \underline{\underline{I}}$

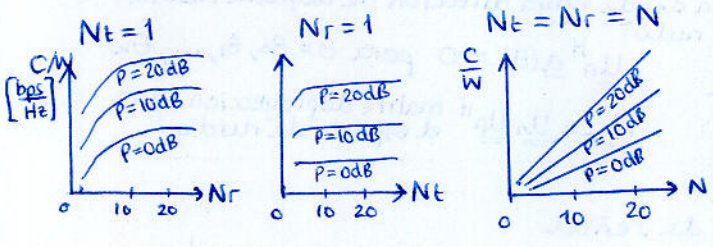
$$\frac{C}{W} = Nr \cdot \log_2\left(1 + \frac{P/Nt}{\sigma_z^2}\right)$$

¡¡ Lineal con N !! ↑ con $Nt \geq Nr$

- Hasta ahora $C = W \log_2(1 + SNR)$ había que aumentar exponencialmente SNR para aumentar C
- Ahora (Telatar demostró en 1999) el incremento de la capacidad es aproximadamente lineal con $\min(Nt, Nr)$

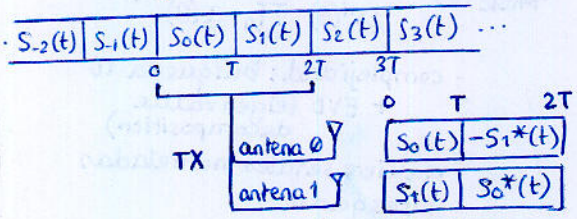
No sirve aumentar sólo Nt o Nr

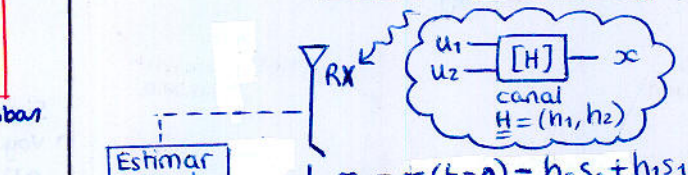
- hay que aumentar ambas
- C crece linealmente!



Codificación espacio-temporal STTD

- Spatial Time Transmission Diversity
- Propuesto: Alamouiti en 1998 → sencillo y funciona bien (2 antenas TX y 1 RX)
- Estándar UMTS señal digital QPSK ó 16QAM





Estimar canal → h_0, h_1

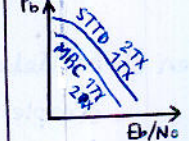
$$x_0 = x(t=0) = h_0 s_0 + h_1 s_1 + n_1$$
$$x_1 = x(t=T) = -h_0 s_1^* + h_1 s_0^* + n_2$$

Combiner (sustituyendo)

$$\tilde{s}_0 = h_0^* x_0 + h_1 x_1^* = (|h_0|^2 + |h_1|^2) s_0 + h_0^* n_0 + h_1 n_1^*$$
$$\tilde{s}_1 = h_1^* x_0 - h_0 x_1^* = (|h_0|^2 + |h_1|^2) s_1 - h_1^* n_0 - h_0 n_1^*$$

Proporcionales a s_0 y s_1 con $|h_0|^2 + |h_1|^2$ → MUY robusto frente a fading

Comparación:



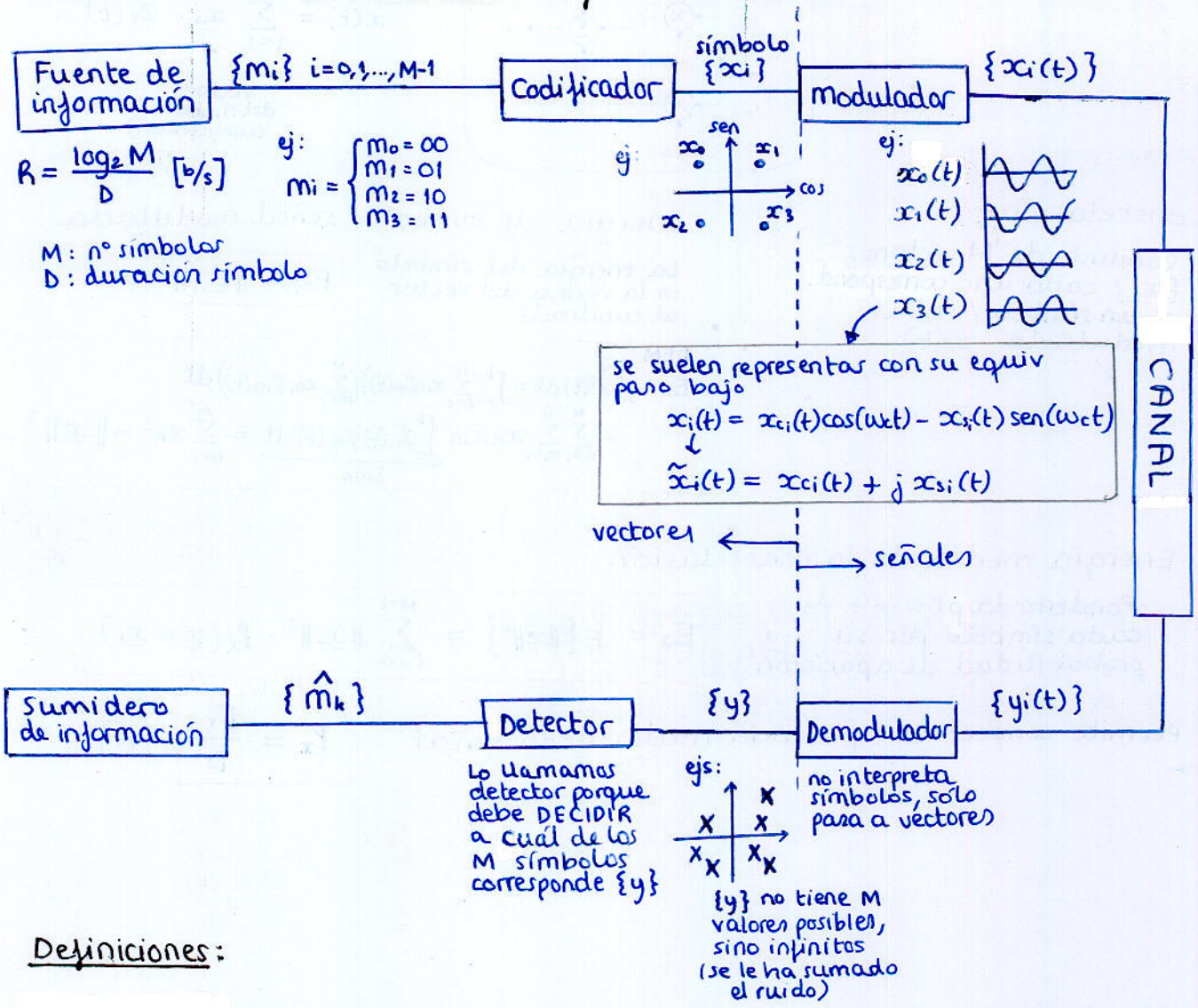
STTD peor por 3 dB

Ventaja: TX no necesita conocer canal

Tema 1. Teoría básica de señales y detección digital

1. Representación geométrica de señales

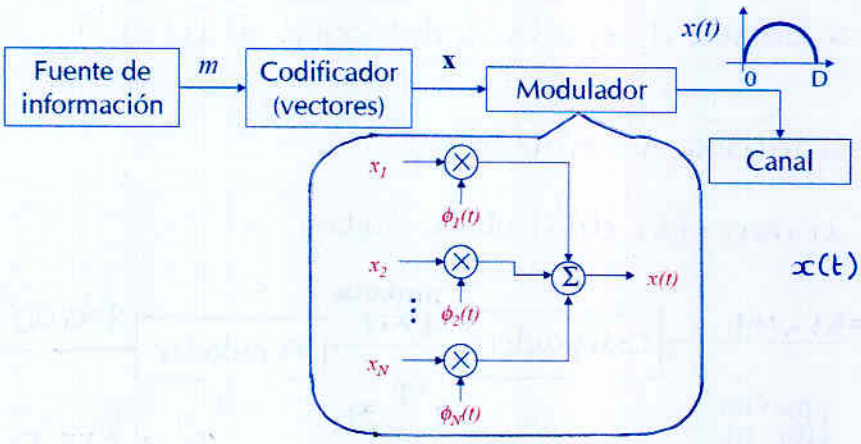
Fundamentos de la transmisión digital de datos:



Definiciones:

- Producto interior: $\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^D u(t) \cdot v(t)\, dt$ entre dos funciones reales de energía finita $E_u = \int_0^D u^2(t)\, dt < \infty$
- Base ortonormal: conjunto de N señales reales que cumplen $\int_0^D \phi_n(t)\, \phi_k(t)\, dt = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$
- Señal modulada: $x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \phi_n(t) = x_1 \phi_1(t) + x_2 \phi_2(t) + \ldots + x_n \phi_n(t)$ suma ponderada de las funciones base con coeficientes x_i
- Símbolo: vector real de N dimensiones (correspondiente a la señal modulada) $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$

Generación de la señal modulada



funciones base que tanto modulador como demodulador deben conocer a priori

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \phi_i(t)$$

x_i: vector del símbolo (coeficientes)

constelación:

Conjunto de M vectores $\{x_i\}$ cada uno asociado a un símbolo / señal modulada $x(t)$

Energía de símbolo / señal modulada

La energía del símbolo es la norma del vector al cuadrado

$$E_{s_i} = \|\underline{x}_i\|^2$$

DEM:

$$E_s = \int_0^D x^2(t)\,dt = \int_0^D \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \phi_n(t)\right)\left(\sum_{m=1}^{N} x_m \phi_m(t)\right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_n x_m \underbrace{\int_0^D \phi_n(t)\phi_m(t)\,dt}_{\delta_{nm}} = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 = \|\underline{x}\|^2$$

Energía media de la constelación

(i) típico en exámenes

Ponderar la energía de cada símbolo por su probabilidad de aparición

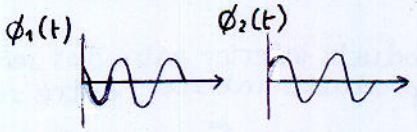
$$E_x = E\{\|x\|^2\} = \sum_{i=0}^{M-1} \|\underline{x}_i\|^2 \cdot P_x(\underline{x} = \underline{x}_i)$$

Permite conocer la potencia media de la señal

$$P_x = \frac{E_x}{D} \quad [W]$$

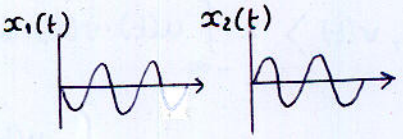
- Ejemplo 1: BPSK (*Binary Phase-Shift Keying*)
  - **Base ortonormal:**

$$\phi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{D}}\cos\left(\frac{2\pi t}{D}+\frac{\pi}{4}\right);\quad \phi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{D}}\cos\left(\frac{2\pi t}{D}-\frac{\pi}{4}\right),\ 0\le t\le D$$



  - **Señales moduladas:**

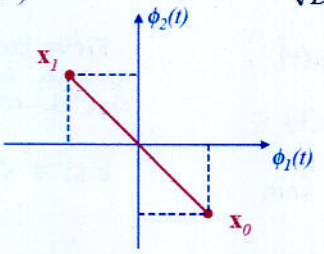
$$x_0(t)=\phi_1(t)-\phi_2(t)=-\frac{2}{\sqrt{D}}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{D}\right);\quad x_1(t)=\phi_2(t)-\phi_1(t)=\frac{2}{\sqrt{D}}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{D}\right)$$



  - **Símbolos asociados:**

$$\mathbf{x}_0=[1\quad -1]^T$$
$$\mathbf{x}_1=[-1\quad 1]^T$$

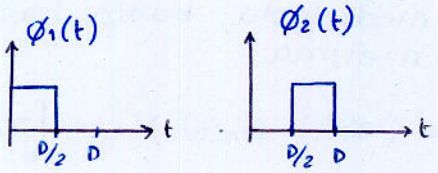
  - **Constelación:**



la constelación es igual, pero la modulación no tiene nada que ver

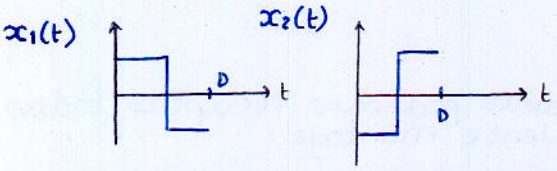
- Ejemplo 2: Código FM ó Código Manchester (Ethernet)
  - **Base ortonormal:**

$$\phi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{D}}\prod\left(\frac{t-D/4}{D/2}\right);\quad \phi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{D}}\prod\left(\frac{t-3D/4}{D/2}\right),\ 0\le t\le D$$



  - **Señales moduladas:**

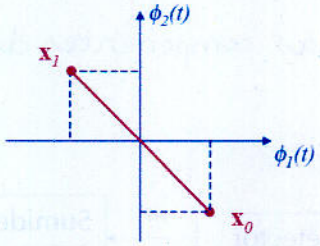
$$x_0(t)=\phi_1(t)-\phi_2(t);\quad x_1(t)=\phi_2(t)-\phi_1(t)$$



  - **Símbolos asociados:**

$$\mathbf{x}_0=[1\quad -1]^T$$
$$\mathbf{x}_1=[-1\quad 1]^T$$

  - **Constelación:**



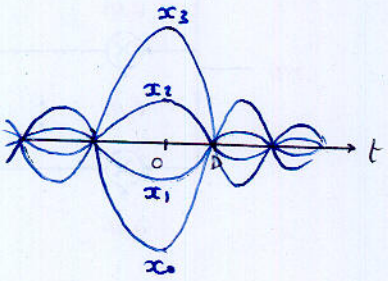
Ultimamente está de moda usar funciones base ortogonales mediante no coincidencia en el tiempo, con pulsos de nanosegundos (ultra wideband)

- Ejemplo 3: Canal Telefónico RDSI ($R=64$ Kbps)
  - **Base ortonormal:**

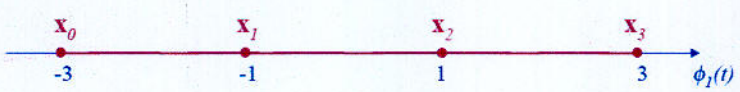
$$\phi_1(t)=\sqrt{\frac{1}{D}}sinc\left(\frac{t}{D}\right)$$

  - **Señales moduladas ($M=4$):**

$$x_0(t)=-3\phi_1(t);\ x_1(t)=-\phi_1(t);\ x_2(t)=\phi_1(t);\quad x_3(t)=3\phi_1(t)$$



  - **Constelación:**



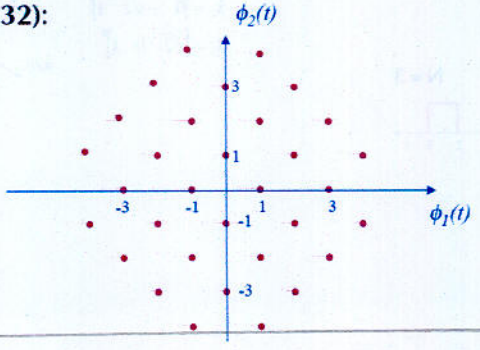
- Ejemplo 4: Modem V.32 - 32CR (9600 bps)
  - **Base ortonormal:**

$$\phi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{D}}\cos\left(\frac{\pi t}{D}\right);\quad \phi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{D}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{D}\right),\ 0\le t\le D$$

  - **Señales moduladas ($M=32$):**

32 cross ó 32 CR

  - **Constelación:**



Obtención del vector a partir de la señal modulada

Dem: Producto interior entre dos señales moduladas es igual al producto interior entre sus vectores

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot v_n = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$$

sabiendo $u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n \phi_n(t)$

$v(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n \phi_n(t)$

$\int \phi_n(t) \cdot \phi_m(t)\, dt = \delta_{nm}$

Sirve también como demostración de que la energía de un símbolo coincide con el modulo del vector

$$E_{s_i} = \langle u_i(t), u_i(t) \rangle = \langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle = \|u_i\|^2$$

Por tanto, para hallar la componente n-ésima del vector asociado a una señal modulada, basta hacerle el producto interior con la función base n-ésima

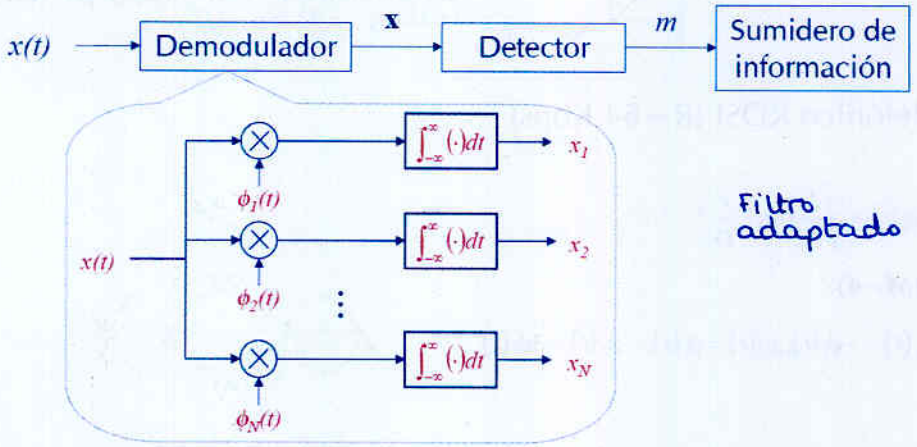
$$x_{i_n} = \langle x_i(t), \phi_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \phi_n(t)\, dt$$

dem: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = x_2$

vector asociado a $x(t)$ — vector asociado a $\phi_2(t)$

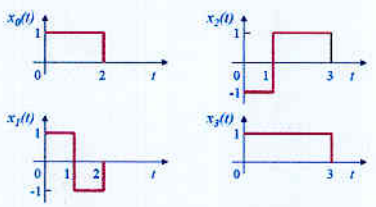
Por tanto podemos recuperar todas las componentes del vector con el siguiente montaje:

- Demodulador por correlación:



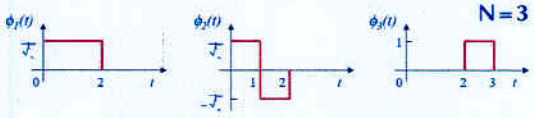
Filtro adaptado

Ejercicio 1



M=4

Ortonormalización de Gram-Schmidt



N=3

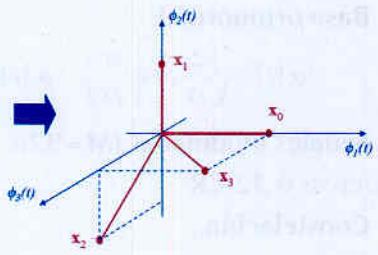
Constelación

$\mathbf{x}_0 = [\sqrt{2} \;\; 0 \;\; 0]^T$

$\mathbf{x}_1 = [0 \;\; \sqrt{2} \;\; 0]^T$

$\mathbf{x}_2 = [0 \;\; -\sqrt{2} \;\; 1]^T$

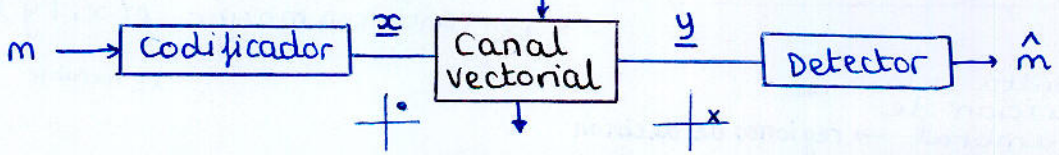
$\mathbf{x}_3 = [\sqrt{2} \;\; 0 \;\; 1]^T$



2. Detección de señales digitales

Ahora vamos a lidiar con el detector, que debe decidir qué símbolo se ha recibido.

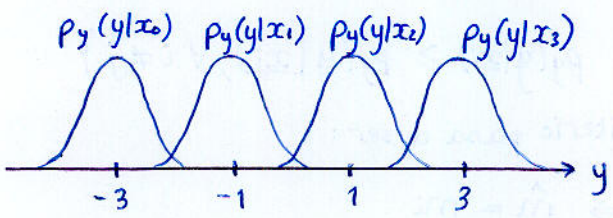
Para ello agrupamos modulador + canal + demodulador en un único modelo de canal vectorial



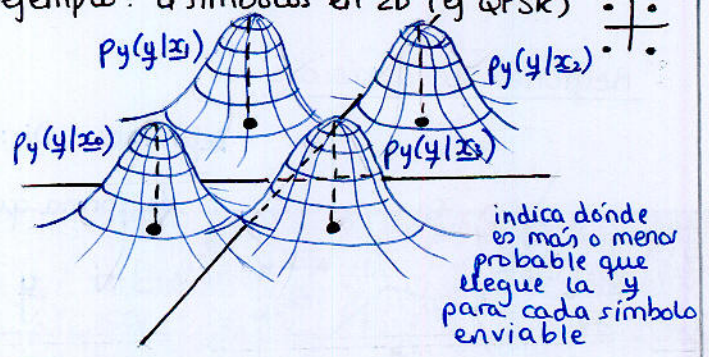
al canal se le puede modelar como un conjunto de M funciones de densidad de probabilidad

$$\left\{ \begin{array}{l} p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_1) \\ p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_2) \\ p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_3) \\ \vdots \\ p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_M) \end{array} \right\}$$

ejemplo: 4 símbolos en única dimensión



ejemplo: 4 símbolos en 2D (ej QPSK)



Detección óptima de los datos

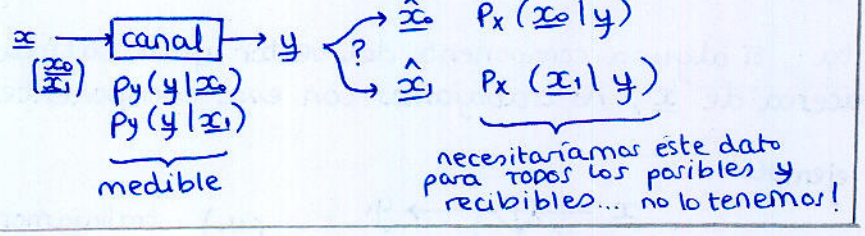
Aquella que minimice la probabilidad de error $P_e = P\{\hat{m} \neq m\}$

- **Detector MAP (maximum a posteriori)**

Se trata de escoger el símbolo más probable dada la y recibida

$$\hat{m} = \max_{m_i} \{ P_x(\underline{x}_i\,|\,\underline{y}) \}$$

ej: para 2 símbolos



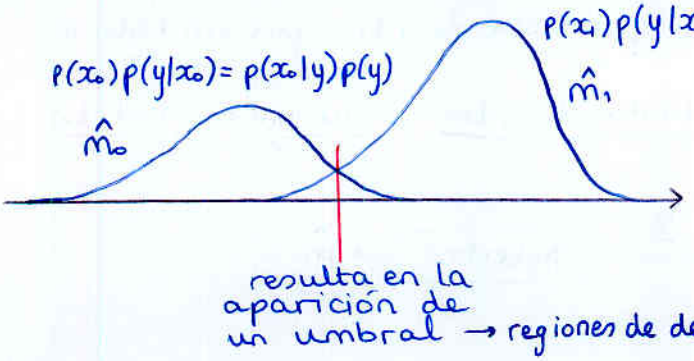
solución: obtener $P_x(\underline{x}_i\,|\,\underline{y})$ a partir de $p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_i)$ y $P(\underline{x}_i)$ (ambos medibles) empleando el teorema de Bayes

$$P_x(\underline{x}_i\,|\,\underline{y}) = \frac{p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_i) \cdot P(\underline{x}_i)}{p_y(\underline{y})}$$

y para la decisión podemos obviar $p_y(\underline{y})$ al comparar, al ser común a todos los casos.

$$\text{MAP: } \hat{m} = \max_{m_i} \{ p_y(\underline{y}\,|\,\underline{x}_i) \cdot P_x(\underline{x}_i) \}$$

MAP: $\hat{m} = \max_{m_i} \{ p_y(\underline{y}|\underline{x}_i) \cdot P_x(\underline{x}_i) \}$



resulta en la aparición de un umbral → regiones de decisión

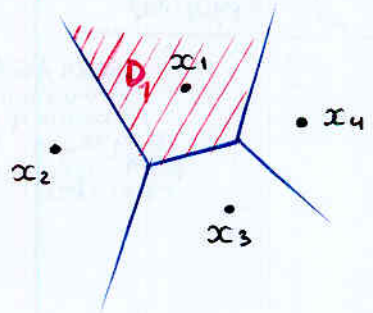
Para cada valor recibido escojo el símbolo con mayor $P(x_i) \cdot p(y|x_i)$ ← medible
y por tanto con mayor $p(x_i|y)$ ↑ no medible

Detector ML (maximum likelihood)

ML: $\hat{m} \Rightarrow m_i$ si $p_y(\underline{y}|\underline{x}_i) \geq p_y(\underline{y}|\underline{x}_j) \quad \forall i \neq j$

Coincide con el MAP y por tanto con el óptimo sólo si los símbolos son equiprobables $P_x(x_i) = 1/M$

Regiones de decisión



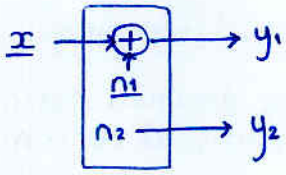
Definimos $D_i : \{ \underline{y} \mid p_y(\underline{y}|\underline{x}_i) \geq p_y(\underline{y}|\underline{x}_j), \forall i \neq j \}$

de forma que el criterio pasa a ser:

si $\underline{y} \in D_i \Rightarrow \hat{m} = m_i$

Nota: Si alguna componente del vector y de salida no contiene información acerca de $\underline{x}$, no trabajamos con esa componente

ejemplo



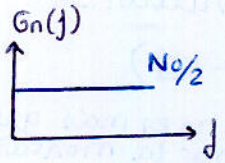
$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ trabajamos sólo con y_1

es como proyectar sobre las dimensiones relevantes

3. El canal AWGN (additive white gaussian noise)

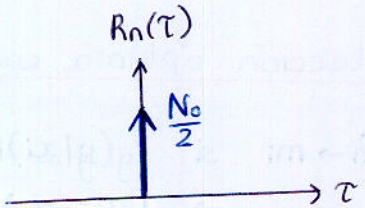
El ruido AWGN

- Modelo válido para el ruido térmico de los receptores analógicos
- media nula $E[n_i] = 0$
- varianza $\sigma^2 = var(n_i) = \frac{N_0}{2}$
- blanco:
  - → d.e.p. $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ ↕ TF



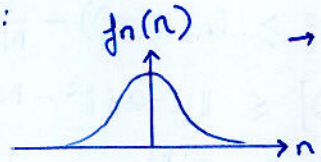
  - → autocorrelación:

$$R_n(\tau) = E[n(t) \cdot n(t+\tau)] = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$



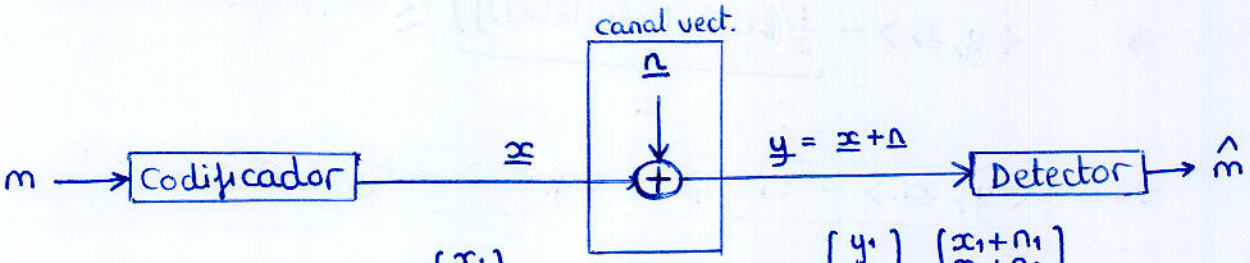
  - → las muestras están incorreladas

- gaussiano:



→ nos indica que las muestras son independientes (un paso más allá de incorreladas)
(ya que la fdp gaussiana se forma para conjuntos de V.A. indep. entre sí)

Modelo de canal vectorial AWGN



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + n_1 \\ x_2 + n_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

las componentes vectoriales asociadas a $n(t)$ se obtienen como cualquier otra señal

$$n_i = \langle n(t), \phi_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \cdot \phi_i(t)\, dt$$

y por tanto

$$p_y(\underline{y}|\underline{x}) = p_n(\underline{y} - \underline{x})$$

↑ fdp del ruido (gaussiana)

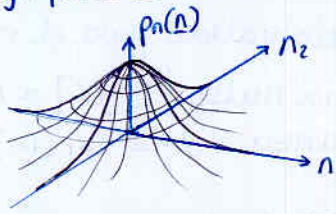
Las componentes de $n(t)$ WGN resultan ser también indep. entre sí y de varianza $N_0/2$

fdp del ruido blanco gaussiano vectorial

$$p_n(\underline{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\underline{n}\|^2}$$

$$= \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{N_0}\|\underline{n}\|^2}$$

ej: para $\underline{n}$ vector bidimensional



y las fdp's del canal resultan ser

$$f_y(y \mid \underline{x}_i) = f_n(y - \underline{x}_i)$$

que no es más que centrar la montañita en $\underline{x}_i$

Detección óptima con el canal AWGN

Dem:

$\hat{m} \to m_i$ si $f_y(y|\underline{x}_i) \cdot P_x(\underline{x}_i) \geq f_y(y|\underline{x}_j) \cdot P_x(\underline{x}_j)$ criterio MAP

$\Rightarrow f_n(y-\underline{x}_i) P_x(\underline{x}_i) \geq f_n(y-\underline{x}_j) \cdot P_x(\underline{x}_j)$ ↘ sustituyendo f_n y eliminando $\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}$ a ambos lados

$\Rightarrow P_x(\underline{x}_i) e^{-\frac{1}{N_0}\|y-\underline{x}_i\|^2} \geq P(\underline{x}_j) \cdot e^{-\frac{1}{N_0}\|y-\underline{x}_j\|^2}$ ↘ tomando logaritmos

$\Rightarrow \ln(P_x(\underline{x}_i)) - \frac{1}{N_0}\|y-\underline{x}_i\|^2 \geq \ln(P_x(\underline{x}_j)) - \frac{1}{N_0}\|y-\underline{x}_j\|^2$

$\Rightarrow \boxed{\|y-\underline{x}_i\|^2 - N_0 \ln[P_x(\underline{x}_i)] \leq \|y-\underline{x}_j\|^2 - N_0 \ln[P_x(\underline{x}_j)]}$ (1)

↓ desarrollando $\|y-\underline{x}_i\|^2$

$\Rightarrow \|y\|^2 - 2\langle y, \underline{x}_i\rangle + \|\underline{x}_i\|^2 - N_0 \ln[P_x(\underline{x}_i)] \leq \cdots$ ↘ eliminando $\|y\|^2$ y dividiendo entre -2

$\Rightarrow \langle y, \underline{x}_i\rangle - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\|\underline{x}_i\|^2 - N_0 \ln[P_x(\underline{x}_i)]\right)}_{c_i} \geq \cdots$

$\Rightarrow \boxed{\langle y, \underline{x}_i\rangle - c_i \geq \langle y, \underline{x}_j\rangle - c_j}$ (2)

Partiendo del criterio MAP y aplicando el modelo de canal AWGN hemos llegado a dos criterios equivalentes para decidir el símbolo

- distancia euclídea al símbolo
- producto interior con el símbolo

Detección óptima usando mínima distancia euclídea al símbolo

MAP: $\hat{m} \to m_i$ si $\|y - x_i\|^2 - N_0 \ln[P_x(x_i)] \leq \|y - x_j\|^2 - N_0 \ln[P_x(x_j)]$

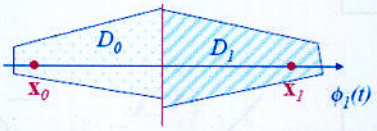
↓ para símbolos equiprobables

ML: $\hat{m} \to m_i$ si $\|y - x_i\|^2 \leq \|y - x_j\|^2 \quad \forall i \neq j$

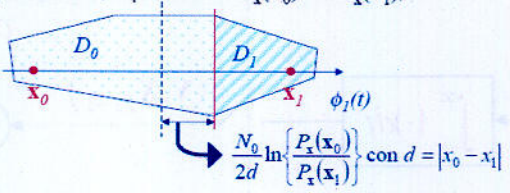
equivale al cuadrado de una distancia euclídea

- Ejemplo: Detector binario de símbolos antipodales

1. Criterio ML:



2. Criterio MAP: El umbral aumenta la región de decisión del símbolo más probable (Suponemos $P_x(x_0) > P_x(x_1)$)



Detección óptima usando producto interior por cada símbolo

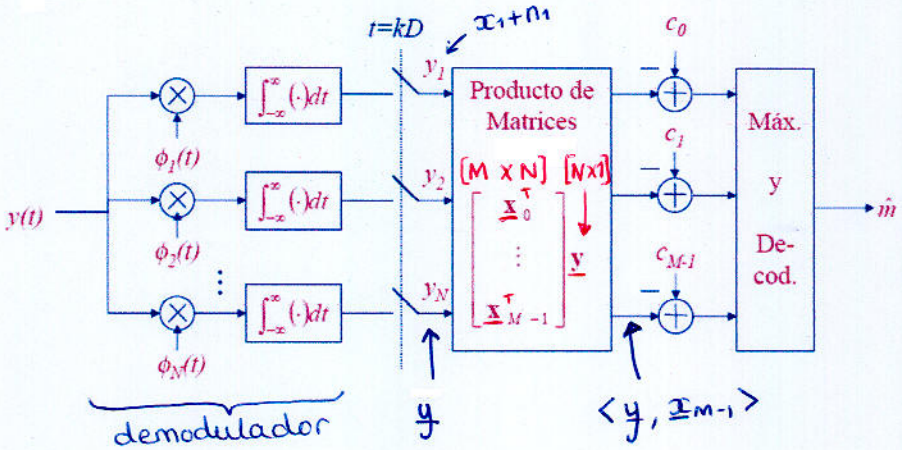
MAP: $\hat{m} \to m_i$ si $\langle y, x_i \rangle - c_i \geq \langle y, x_j \rangle - c_j$

donde $c_i = \frac{\|x_i\|^2}{2} - \frac{N_0}{2} \ln[P_x(x_i)]$

$= \frac{E_{x_i}}{2} - \frac{N_0}{2} \ln[P_x(x_i)]$

La c_i no afecta si los símbolos son equiprobables y ADEMÁS todos los símbolos IGUAL ENERGÍA

- Receptor óptimo basado en las funciones base:

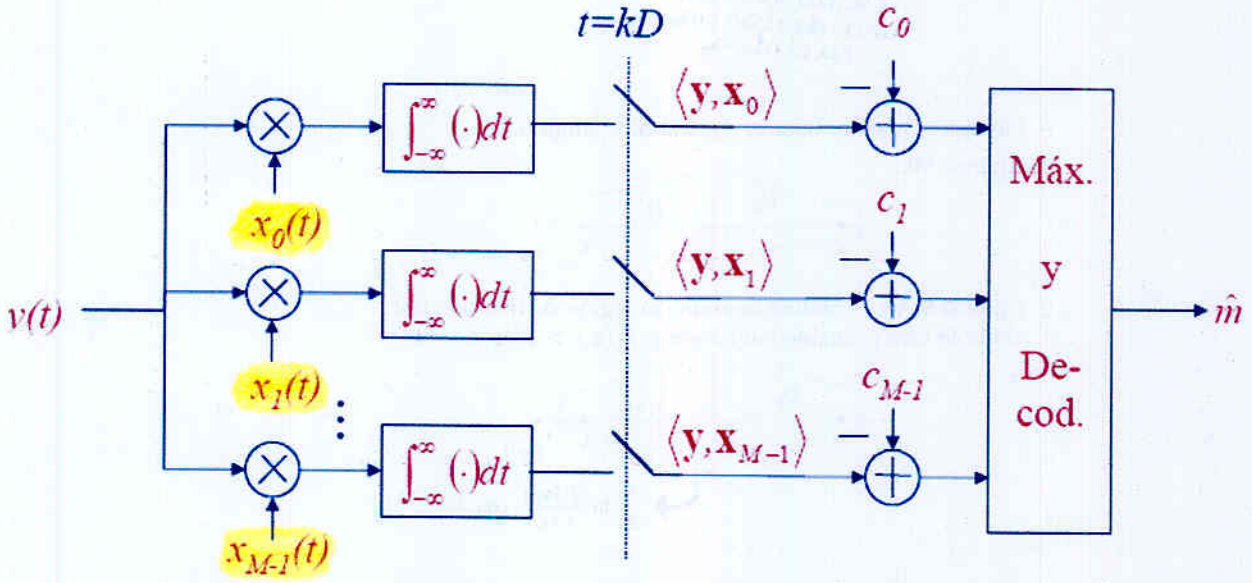


· Receptor óptimo basado en las señales moduladas

Normalmente hay menos funciones base (dimensiones N) que símbolos (M)

ej: 32 QAM → 2 funciones base
↳ 32 símbolos

Pero a veces hay tantas funciones base como símbolos (típico en modulaciones de frecuencia) y entonces es viable compactar el demodulador y detector de ésta forma:



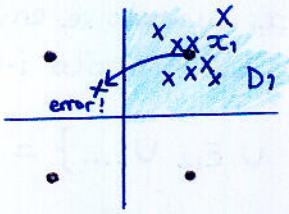
4. Probabilidad de error para el canal AWGN

Probabilidad de error por símbolo

Probabilidad media (promedio) de detectar un símbolo erróneamente

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} \left[P_x(x_i) \cdot P_y(y \notin D_i \mid x_i) \right]$$

- $P_x(x_i)$: suma ponderada por la prob. de cada símbolo
- $P_y(y \notin D_i \mid x_i)$: el vector recibido no está en la región del símbolo txido


x
x
x

Cota superior de la prob error P_e

Demostración

ε_{ij} = detectar $\underline{x}_i$ cuando se envió $\underline{x}_j$

P_{ei} = prob. error del símbolo i-ésimo $\longrightarrow$ $P_e = \sum_{i=0}^{M-1} P_x(x_i) \cdot P_{ei}$

$$P_{ei} = P\{\varepsilon_{i0} \cup \varepsilon_{i1} \cup \varepsilon_{i2} \cup \dots\} = P\left\{\bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} \varepsilon_{ij}\right\} = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} P\{\varepsilon_{ij}\}$$

ε_{ij} mutuamente excluyentes

entonces:

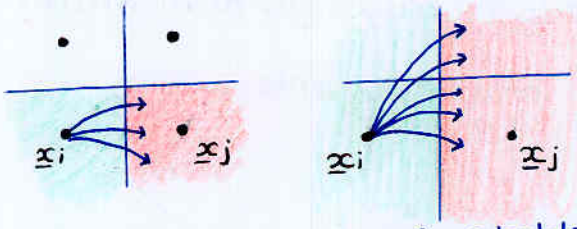
$$P_{ei} = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} P\{\varepsilon_{ij}\} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} P_2(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$$

Prob de error del símbolo i-ésimo cuando sólo hubiera 2 símbolos en la constelación

$$P_2(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right)$$

$$d_{ij} = \| \underline{x}_i - \underline{x}_j \|$$

$P\{\varepsilon_{ij}\} \leq P_2(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$



es más probable equivocarse si la equivocación abarca una región mayor

$$P_{ei} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right)$$

Por tanto:

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} P_x(\underline{x}_i) \cdot P_{ei} \leq \sum_{i=0}^{M-1} P_x(\underline{x}_i) \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right)$$

y como $Q(x)$ es una función decreciente $Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right) \leq Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=0}^{M-1} P_x(\underline{x}_i)}_{1} \cdot \underbrace{(M-1)\,Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)}_{cte}$$

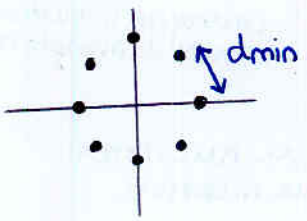
Es como suponer que todos los símbolos están separados de todos los demás en d_{min}

$$P_e \leq (M-1)\,Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

Depende de la constelación, ésta cota puede ser cercana al valor real o sobrepasarlo por mucho

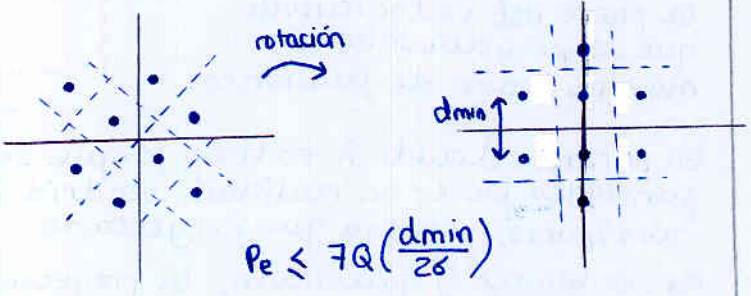
ejemplos:

8-PSK



$P_e \leq 7Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$

8AMPM



$P_e \leq 7Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$

Aproximación de la P_e basada en los vectores más cercanos

En lugar de, para cada símbolo, suponer que todos los demas están a d_{min}, lo que hacemos es considerar sólo los que realmente están a d_{min} y despreciar todos los demás (podría entonces parecer una cota inferior, pero aún hacemos la cota de $P\{e_{ij}\} \leq P_2(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$)

$$P_e \approx Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{M-1} N_i \cdot P_x(\underline{x}_i)}_{N_e}$$

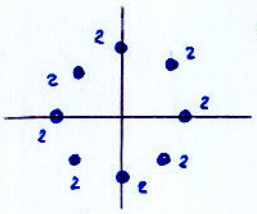
N_i: número de símbolos a d_{min} de $\underline{x}_i$

N_e: Número medio de vecinos más cercanos

$$\boxed{P_e \approx N_e \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)}$$

ejemplos:

8-PSK

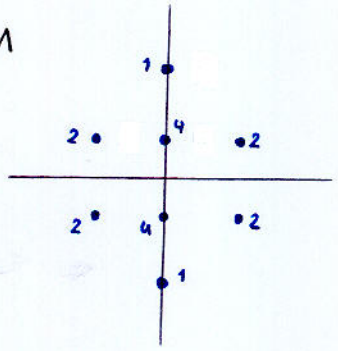


cada símbolo tiene 2 vecinos a d_{min}

$$N_e = \frac{2+2+\ldots+2}{8} = 2$$

$$P_e \simeq 2\,Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

8 AMPM



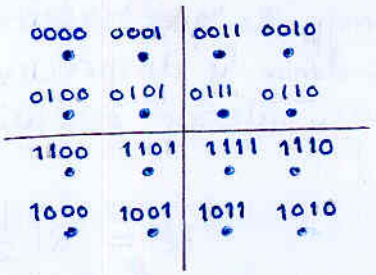
$$N_e = \frac{1+2+4+2+2+4+2+1}{8} = 2'25$$

$$P_e \simeq 2'25\,Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

BER. Bit Error Rate. Tasa de error por bit

Caso 1. Formas de onda no ortogonales (PSK, QAM)

- Código Gray: dos símbolos adyacentes difieren sólo en un bit
- suponemos que el error sólo ocurre en símbolos adyacentes (E_b/N_0 suficientemente grande)



$$BER \leftarrow \frac{n^o \text{ bits err}}{n^o \text{ bits}} = \frac{n^o \text{ simb err}}{n^o \text{ simb.}} \cdot \log_2 M$$

n^o simb err / n^o simb. $\rightarrow P_e$

$$\frac{P_e}{\log_2 M} \leq BER \leq P_e$$

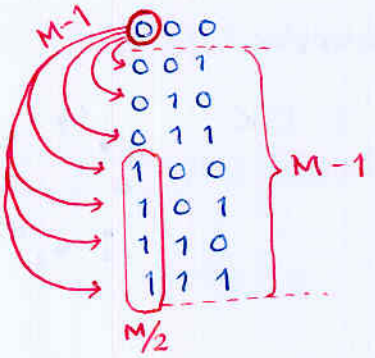
caso peor: elegimos el símbolo que tiene todos los bits distintos

Caso 2. Formas de onda ortogonales (FSK)

todos los símbolos son ortogonales entre sí

Todos los símbolos erróneos igualmente probables

Dado un determinado bit, un error de símbolo supone un error en dicho bit sólo en $M/2$ casos de los $M-1$ posibles



$$BER = \frac{M/2}{M-1} \cdot P_e \simeq \frac{P_e}{2}$$

$M \uparrow\uparrow$

5. Clases de constelaciones. Ejemplos

· Definiciones interesantes para comparar señales

Potencia media $\quad P = \frac{E_x}{D} \longrightarrow E_x = \sum_{i}^{M} P_x(x_i) \cdot \|x_i\|^2$

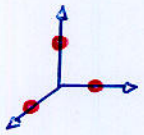
Energía media por dimensión $\quad \overline{E}_x = \frac{E_x}{N}$

Relación señal a ruido $\quad SNR = \frac{E_x}{\sigma^2}$

Figura de merito de la constelación $\quad CFM_x = \frac{\left(d_{min}/2\right)^2}{\overline{E}_x}$

$\overline{E}_x$ → energía media por dimensión

· Constelaciones ortogonales



Aquellas donde cada símbolo está en su propia dimensión
(i.e. $M = N$)

ejemplos: FSK
Modulación de pulsos en duración (PDM)
Modulación de pulsos en posición (PPM)

$$P_e \simeq \underbrace{(M-1)}_{\substack{\text{nº simb} \\ \text{mas cercanos} \\ = \text{TODOS}}} \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

$$BER \simeq \frac{M/2}{M-1} P_e = \frac{M}{2} \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

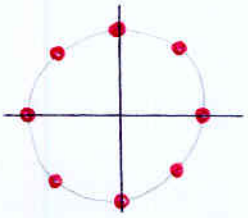
La CFM no es representativa en este tipo de modulaciones

Modulaciones lineales

Juegan con amplitud y fase de una portadora

M-PSK
M-QAM

- **Constelaciones circulares**

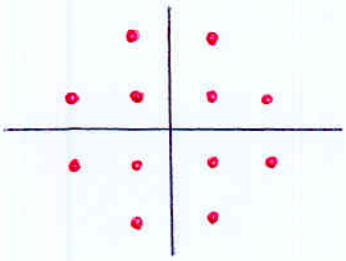


Modulaciones de fase de M símbolos (M-PSK) con puntos equiespaciados en una circunferencia de radio $\sqrt{E_x}$

$$P_e \simeq 2\,Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

Aparentemente independiente de M, pero d_{min} depende de M

- **Constelaciones rectangulares**



Puntos equiespaciados en una o dos dimensiones

Muy usadas; típicamente QAM (forma cuadrada, cruz, hexagonal, ...)

Problema 1

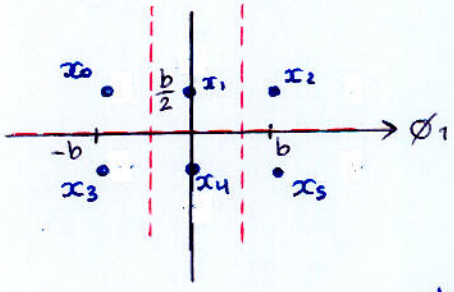
Canal AWGN

$x_0 = (-b, b/2)$
$x_1 = (0, b/2)$
$x_2 = (b, b/2)$
$x_3 = (-b, -b/2)$
$x_4 = (0, -b/2)$
$x_5 = (b, -b/2)$

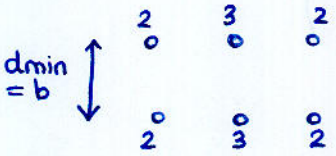
a) · Símbolos equiprobables
· Umbrales de decisión paralelos a los ejes y equiespaciados de los símbolos
· Hallar Pe en función de "b" y "σ"

Canal AWGN ⇒ $P_e \simeq N_e Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$
Detector ML ⇒

↑ Hay que verificar las condiciones



Coincide con los umbrales del criterio ML, por tanto podemos aplicar la aprox. de Pe



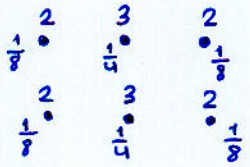
$N_e = \sum P_x(x_i) \cdot N_i$

$N_e = \frac{2+3+2+2+3+2}{6} = 2'3\hat{3}$

$P_e = 2'3\hat{3} \cdot Q\left(\frac{b}{2\sigma}\right)$ //

b) · Hallar Pe con mismo detector sabiendo
$P_x(x_0) = P_x(x_2) = P_x(x_3) = P_x(x_5) = 1/8$
$P_x(x_1) = P_x(x_4) = 1/4$

mismo detector → ya no será el óptimo



$N_e = \sum P_x(x_i) \cdot N_i$
$= \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 2$
$= 7/3$

c) ¿cuál Pe es mayor y por qué motivo?

Hay mayor Pe en el segundo caso, ya que los símbolos más desfavorables (con más probabilidad de equivocarse) tienen mayor probabilidad de aparición

d) Si la relación señal a ruido se define

$SNR = \frac{Ex}{\sigma^2}$ → Energía media de la constelación

Calcule la Pe de los apartados anteriores en función de SNR

a) $Pe = \frac{7}{3} Q\left(\frac{b}{2\sigma}\right)$ b) $Pe = \frac{5}{2} Q\left(\frac{b}{2\sigma}\right)$

a) $Ex = \sum_{i=0}^{5} P_x(x_i) \cdot Ex_i$

$= \frac{1}{6}\left[4 \cdot \underbrace{\left(b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}_{\|\underline{x}\|^2} + 2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{11}{12} b^2 = \sigma^2 SNR$

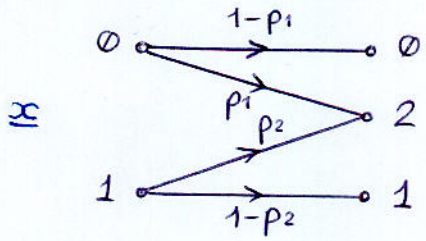
↑ equiprob

Por tanto $\frac{b}{2\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{12}{11} SNR}\right)$

$$Pe = \frac{7}{3} \cdot Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{11} SNR}\right)$$

Ejercicio 3

b) Canal BEC (Binary Erasure Channel)



Suponiendo: · símbolos equiprobables
· $p_1 < p_2 < 1/2$

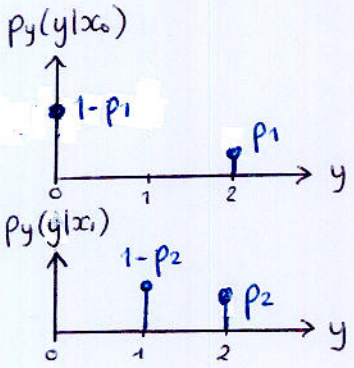
Obtener el criterio ML

En este caso $\underline{x}$ es unidimensional, y además sólo 2 valores

si $p_y(y|\underline{x}_i) \geq p_y(y|\underline{x}_j)\ \forall i \neq j \Rightarrow \hat{m} = m_i$

Para empezar, necesitamos las funciones

$$p_y(y|x_0) = (1-p_1)\delta(y) + p_1\delta(y-2)$$
$$p_y(y|x_1) = (1-p_2)\delta(y-1) + p_2\delta(y-2)$$



El criterio ML queda como:

si $y = 0 \longrightarrow \hat{m} = 0$
si $y = 1 \longrightarrow \hat{m} = 1$
si $y = 2 \longrightarrow \hat{m} = 1$ (ya que $p_2 > p_1$)

Ejercicios Propuestos CDA

Tema 1. Teoría Básica de Señales y Detección Digital

Ejercicio 1

a. Demuestre que las siguientes funciones forman una base ortonormal:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(\sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

b. Considere ahora las siguientes señales moduladas:

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_5(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_6(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_7(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t)) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_{i+8}(t) = -x_i(t) \quad i = 0, \ldots, 7$$

Dibuje los puntos de la constelación de estas señales moduladas utilizando la base ortonormal del apartado (a).

c. Calcule la energía media de la constelación $E_{\mathbf{x}}$ para los siguientes casos:

1. Todos los símbolos son equiprobables.
2. Las probabilidades de símbolo vienen dadas por:

$$P_x(x_0) = P_x(x_4) = P_x(x_8) = P_x(x_{12}) = \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad P_x(x_i) = \frac{1}{24} \quad \text{para el resto}$$

d. Sea $y_i(t) = x_i(t) + 4\phi_3(t)$, donde

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Calcule la energía media de la nueva constelación, $E_{\mathbf{y}}$ para el caso de símbolos equiprobables.

Ejercicio 2 Este ejercicio utiliza MATLAB para calcular el mínimo número de funciones base ortonormales para un conjunto dado de señales.

Supongamos que cada columna de la matriz **A** dada a continuación constituye un símbolo para un conjunto de funciones base ortonormales predeterminado $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_6(t)\}$, pero queremos averiguar si el mismo conjunto de símbolos puede ser representado por un **menor número** de funciones base.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Utilice la función **orth.m** de MATLAB para construir una base ortonormal para las columnas de **A**.

b. ¿Cuántas funciones base son realmente necesarias para representar el conjunto de señales? ¿Cuáles son las nuevas funciones base expresadas en función de las antiguas $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_6(t)\}$?

c. Encuentre la nueva matriz $\mathbf{A}_1$ representante de los símbolos utilizando el nuevo conjunto (más pequeño) de funciones base que ha encontrado en (b). $\mathbf{A}_1$ debería tener 8 columnas, una para cada símbolo, y el número de filas debería ser igual a la dimensión del nuevo conjunto de funciones base que encontró en (b).

Ejercicio 3

a. El denominado **Canal Binario Simétrico** (BSC de las iniciales inglesas *Binary Symmetric Channel*) tiene una entrada y una salida binaria (0 ó 1). La probabilidad de detectar correctamente cada bit es $1-p$, mientras que la probabilidad de equivocarse en cualquier bit es p. Suponiendo que ambas entradas (0 ó 1) son equiprobables, enuncie los criterios de decisión MAP y ML para el BSC con $p < \frac{1}{2}$. ¿Cuáles son los nuevos criterios de decisión si $p > \frac{1}{2}$?

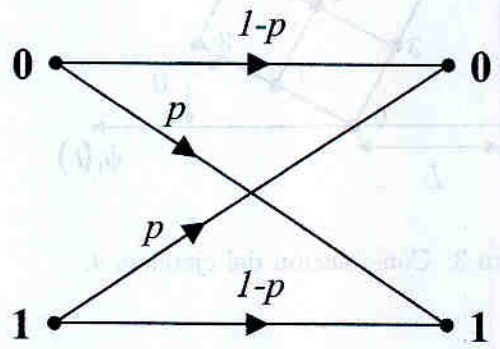


Figura 1: El Canal Binario Simétrico (BSC).

b. El denominado **Canal Binario Borrador** (BEC de las iniciales inglesas *Binary Erasure Channel*) tiene las mismas entradas que el BSC. Sin embargo, las salidas posibles son tres: Cuando se transmite un 0, se recibe un 0 con probabilidad $1-p_1$ y un 2 con probabilidad p_1. Asimismo, cuando se transmite un 1, se recibe un 1 con probabilidad $1-p_2$ y un 2 con probabilidad p_2. Suponiendo que ambas entradas (0 ó 1) son equiprobables, enuncie los criterios de decisión MAP y ML para el BEC cuando $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$. ¿Cuáles son los nuevos criterios de decisión si $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$?

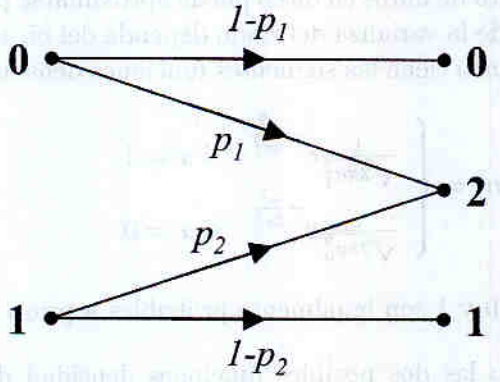


Figura 2: El Canal Binario Borrador (BEC).

Ejercicio 4 Considere la constelación de la figura 3 que se transmite a través de un canal AWGN con varianza $\sigma^2 = 0.1$.

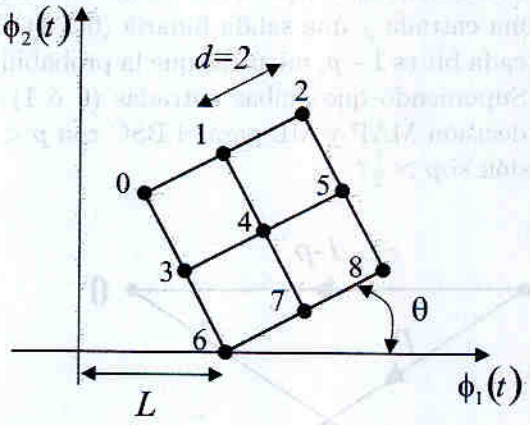


Figura 3: Constelación del ejercicio 4.

a. ¿La probabilidad de error por símbolo P_e depende de L y θ?

b. Calcule la cota de la probabilidad de error por símbolo, P_e, utilizando solamente los vecinos más cercanos, con un detector ML y suponiendo que todos los símbolos son equiprobables.

c. Suponga ahora que existe la restricción de usar una constelación de mínima energía. ¿Cuál sería dicha constelación. Dibújela.

d. En vista del resultado obtenido en el apartado (c) ¿Cómo afecta el ángulo θ a la energía media de la constelación?

Ejercicio 5 El almacenamiento de datos en disco puede aproximarse por un canal AWGN dependiente de la entrada, donde la varianza del ruido depende del bit transmitido (en este caso almacenado). El ruido blanco tiene las siguientes funciones densidad de probabilidad:

$$p_n(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_1^2}} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

siendo $\sigma_1^2 = 31\sigma_0^2$. Los bits 0 y 1 son igualmente probables a priori.

a. Dibuje en un mismo gráfico las dos posibles funciones densidad de probabilidad del vector recibido condicionado a que se envió un 0 ó a que se envió un 1. Indique cualitativamente las regiones de decisión que aparecen. *Nota:* Ayúdese de MATLAB si es necesario.

b. Determine el receptor óptimo en función de σ_1^2 y σ_0^2. Para ello calcule los valores de y (umbrales) en donde $p_y(y/0) = p_y(y/1)$.

c. Calcule σ_1^2 y σ_0^2 si la relación señal-a-ruido SNR es de 15 dB. *Nota:* La SNR viene definida como $SNR = \frac{E_x}{(\sigma_0^2+\sigma_1^2)/2}$.

d. Determine la probabilidad de error por símbolo, P_e, cuando SNR=15 dB.

e. ¿Qué ocurre cuando $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \to 0$? En concreto, considere la situación realista en que la varianza σ_1^2 tiene un valor finito y $\sigma_0^2 \to 0$.

Ejercicio 6 Considere la constelación 64-QAM de la figura 4 (círculos) con $d_{min} = 2$. A partir de ella se obtiene la constelación 32-QAM Híbrida (puntos señalados con una cruz) simplemente tomando uno de cada dos puntos. Este problema estudia las propiedades de dicha constelación híbrida. Suponga para todos los apartados que los símbolos son equiprobables.

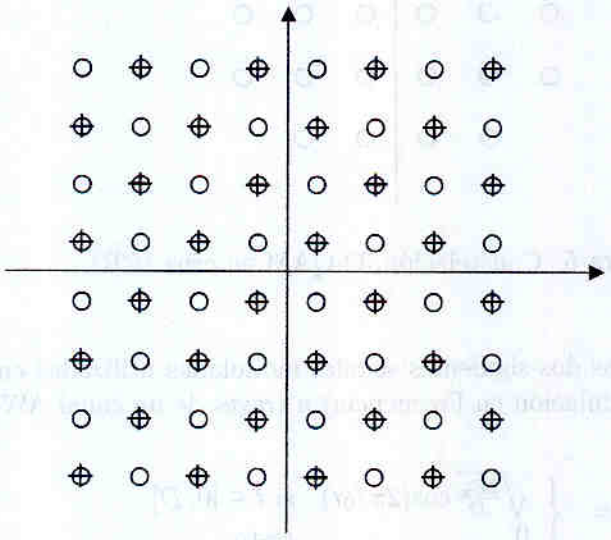


Figura 4: Constelación 32-QAM Híbrida (cruces) incluida en la constelación 64-QAM (círculos).

a. Calcule la energía media de la constelación 64-QAM y de la 32-QAM híbrida y compare los resultados.

b. Calcule la cota de la probabilidad de error basada en los vecinos más cercanos para ambas constelaciones. ¿Cuál tiene mejores prestaciones? ¿Porqué? *Nota:* Para ello ayúdese de MATLAB y dibuje las diferentes P_e obtenidas en función de σ, utilizando apropiadamente la función **erfc.m**.

c. Cuál debería ser la distancia mínima, d_{min}, de una constelación 32-QAM en cruz (32CR) como la de la figura para que tuviera la misma energía que la 32-QAM híbrida?

d. Calcule la cota de la probabilidad de error basada en los vecinos más cercanos para la modulación 32CR-QAM anterior. Compárela con los resultados obtenidos para la 32-QAM híbrida, ¿cuál tiene mejores prestaciones? ¿Porqué?

e. Calcule la figura de mérito, CMF, de ambas constelaciones 32-QAM. ¿El resultado obtenido es consistente con el obtenido en el apartado (d)?

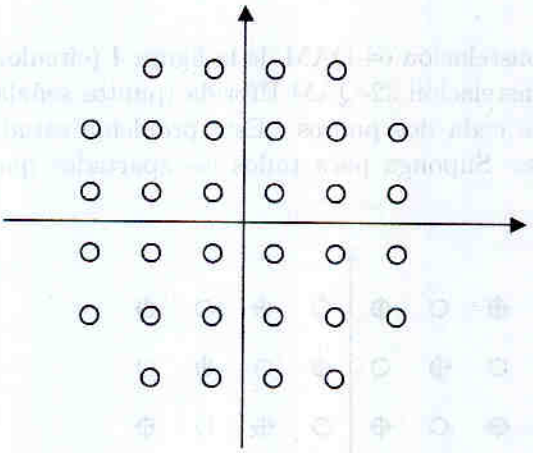


Figura 5: Constelación 32-QAM en cruz (CR).

Ejercicio 7 Considere las dos siguientes señales moduladas utilizadas en un sistema de comunicaciones FSK (Modulación en Frecuencia) a través de un canal AWGN:

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_x}{D}}\cos(2\pi f_0 t) & \text{si } t \in [0, D] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_x}{D}}\cos(2\pi (f_0 + \Delta) t) & \text{si } t \in [0, D] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde $D = 100\mu s$, $f_0 = 10^5$Hz, $\sigma^2 = 0.01$ y $E_x = 0.32$.

a. Obtenga una base ortonormal para las señales anteriores y dibuje la constelación resultante si $\Delta = 10^4$.

b. Calcule la probabilidad de error P_e para el caso anterior.

c. Calcule el mínimo valor de $|\Delta|$ para mantener la misma probabilidad de error que la calculada en el apartado anterior. Para ello tenga en cuenta que la d_{min} no debe cambiar, ni la constelación tampoco.

Ejercicio 8 Considere la siguiente constelación utilizada en un canal AWGN:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= (-1,-1) \\ \mathbf{x}_1 &= (1,-1) \\ \mathbf{x}_2 &= (-1,1) \\ \mathbf{x}_3 &= (1,1) \\ \mathbf{x}_4 &= (0,3) \end{aligned}$$

a. Calcule la cota superior de la probabilidad de error para esta constelación utilizando un detector ML. *Nota:* Deje el resultado de los apartados (a) y (b) en función de σ.

b. Calcule la cota superior de la probabilidad de error **basada en los vecinos más cercanos** para esta constelación utilizando un detector ML.

c. Si la relación señal-a-ruido es de 14 dB, calcule el valor numérico de las dos cotas anteriores y compare los resultados.

Ejercicio 9 Dado un canal con las funciones densidad de probabilidad condicionadas $p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ dadas por la figura 6, donde $p_1 = 0.05$:

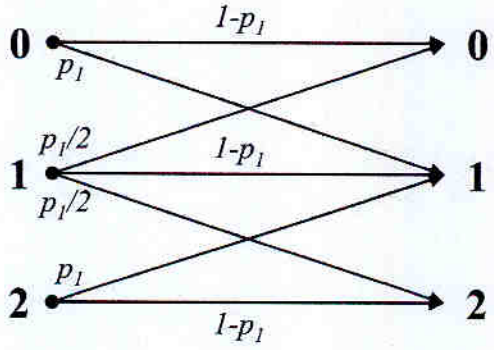


Figura 6: Canal discreto sin memoria usado en el ejercicio 9.

a. Suponiendo símbolos equiprobables, encuentre la regla de decisión óptima.

b. Calcule la probabilidad de error P_e usando el detector del apartado (a).

c. Calcule la nueva probabilidad de error usando un detector MAP si las probabilidades de cada símbolo son $P_{\mathbf{x}}(0) = P_{\mathbf{x}}(1) = \frac{1}{6}$ y $P_{\mathbf{x}}(2) = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 10 Se utiliza una constelación de 1 dimensión para transmitir por un canal con ruido aditivo, $y = x + n$, de distribución uniforme:

$$p_n(n) = \begin{cases} \frac{1}{L} & |n| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & |n| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

donde $L/2$ es el valor máximo de ruido que se alcanza. La constelación utiliza símbolos antipodales tal que $x = \pm 1$ con igual probabilidad.

a. Diseñe el detector óptimo, en concreto especifique las regiones de decisión correspondientes.

b. ¿Qué valores de L dan una probabilidad de error menor que 10^{-6}?

c. Calcule la SNR en función de L.

La función error complementario Q(x)

La función error complementario $Q(x)$ se define como la probabilidad de que una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza unidad sea mayor que un cierto valor x:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Esta función no puede ser calculada, solo puede ser tabulada, por lo que se utiliza la siguiente figura:

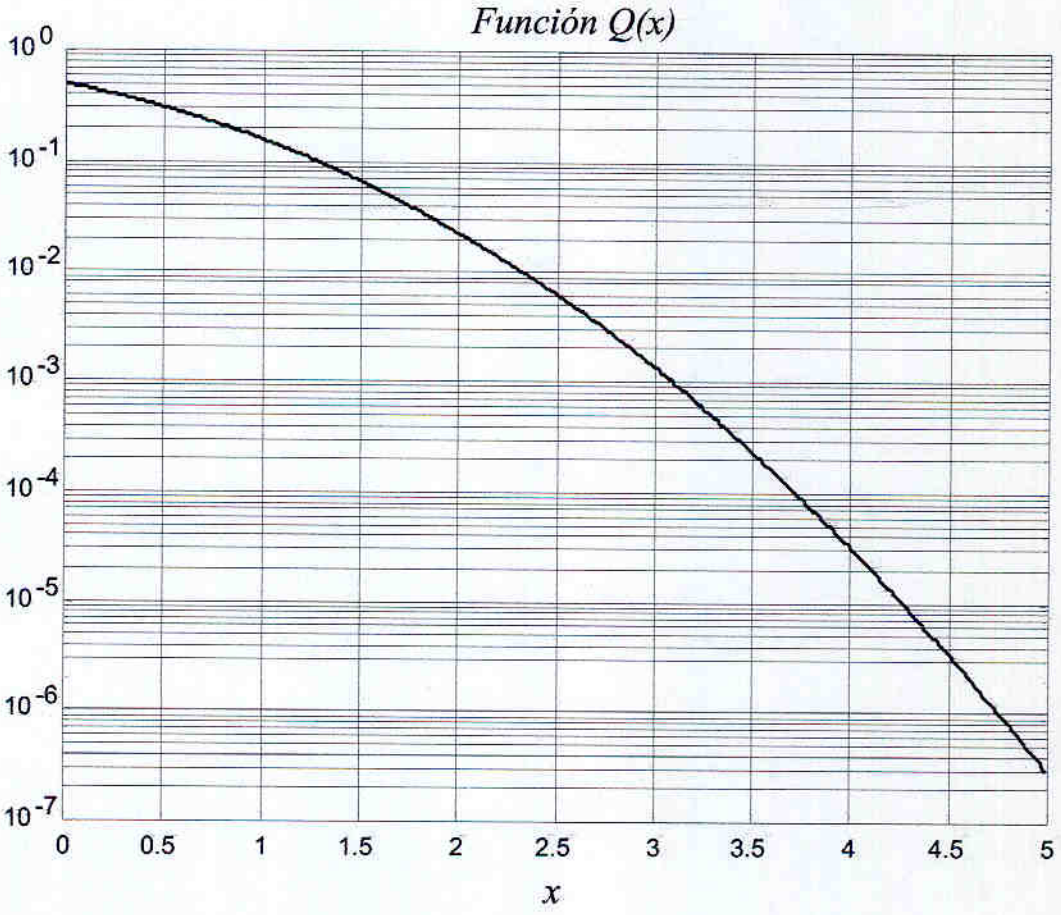


Figura 7: Función error complementario $Q(x)$.

Nótese que $Q(-x) = 1 - Q(x)$ por lo que solo se consideran argumentos positivos. Para valores del argumento $x \geq 4$ se suele utilizar la siguiente aproximación:

$$Q(x) \simeq \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi x^2}}$$

La función error complementario Q(x)

La función error complementario $Q(x)$ se define como la probabilidad de que una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza unidad sea mayor que un cierto valor x.

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Esta función no puede ser calculada, solo puede ser tabulada, por lo que se utiliza la siguiente figura:

Figura 2: Función error complementario $Q(x)$.

Nótese que $Q(-x) = 1 - Q(x)$ por lo que solo se deben tabular aquellos valores del argumento $x \geq 0$. En caso utilizar la siguiente aproximación:

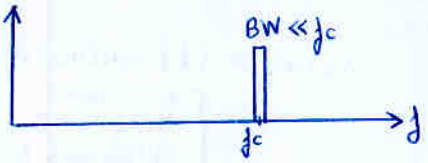
$$Q(x) \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x}$$

Tema 2. Canales en sistemas de comunicaciones digitales

1. Análisis de sistemas Paso Banda

1.1 Señales paso banda y señales equivalentes banda base

· Sistemas de transmisión prácticos

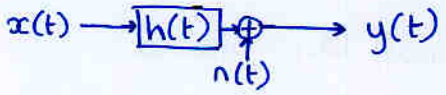


Banda estrecha

ej: telefonía móvil
f_c = 900 MHz
BW = 300 kHz

Objetivo: obtener la representación compleja equivalente de la señal paso banda filtrada por un canal AWGN.

No es necesario conocer la portadora f_c.



· Modelo de señal paso banda real

$$x(t) = \begin{cases} a(t)\cos(\omega_c t + \theta(t)) \\ x_c(t)\cos(\omega_c t) - x_s(t)\operatorname{sen}(\omega_c t) \end{cases}$$

válido para cualquier señal paso banda, incluso una FSK (con $\theta(t)$ lineal en t)

envolvente: $a(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$

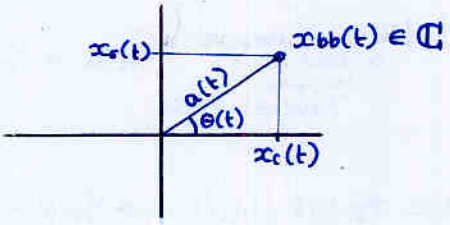
fase: $\theta(t) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right)$

$\Leftrightarrow$ $x_c(t) = a(t)\cos\theta(t)$: componente en fase

$x_s(t) = a(t)\operatorname{sen}\theta(t)$: componente en cuadratura

señal banda base equivalente:

$$x_{bb}(t) = \begin{cases} x_c(t) + j\,x_s(t) \\ a(t)\,e^{j\theta(t)} \end{cases}$$



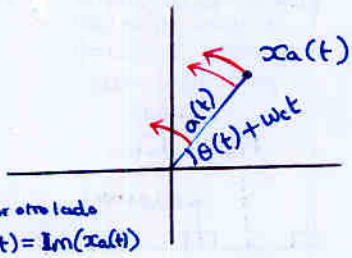
señal analítica equivalente

$$x_a(t) = x_{bb}(t)\cdot e^{j\omega_c t}$$

de forma que

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x_a(t)\}$$

(si $x(t)$ fuera señal senoidal, $x_a(t)$ sería su fasor)



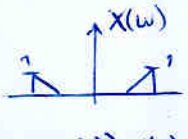
y por otro lado $\hat{x}(t) = \operatorname{Im}(x_a(t))$

$$x_a(t) = x(t) + j\,\hat{x}(t)$$

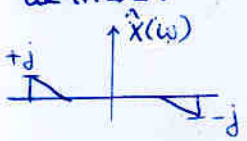
↑ transformada de Hilbert

$x_c(t) = x(t)\cos\omega_c t + \hat{x}(t)\operatorname{sen}\omega_c t$

$x_s(t) = \hat{x}(t)\cos\omega_c t - x(t)\operatorname{sen}\omega_c t$



$$X_a(\omega) = (1+\operatorname{sgn}(\omega))\,X(\omega)$$

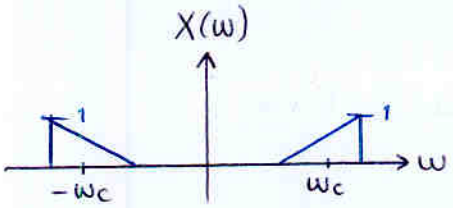


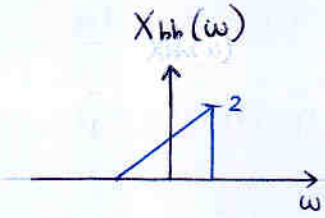
$$\hat{X}(\omega) = -j\operatorname{sgn}(\omega)\cdot X(\omega)$$

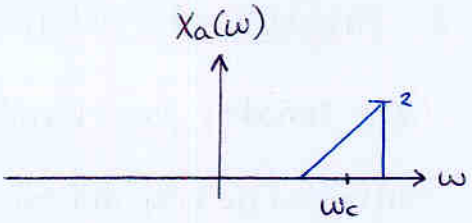
$x(t) \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x_c(t) \\ x_s(t) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} \longleftrightarrow x_{bb}(t) \longleftrightarrow x_a(t)$

$\mathrm{Re}\{x_a(t)\} = x(t)$
$\mathrm{Im}\{x_a(t)\} = \hat{x}(t)$

real y paso banda — reales y paso bajo — compleja y paso bajo — compleja y paso banda







$X_{bb}(\omega) = X_a(\omega + \omega_c)$

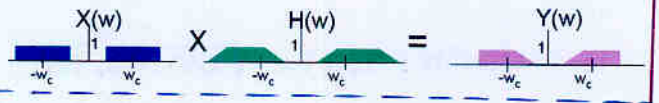
$X_a(\omega) = (1 + \mathrm{sgn}(\omega))\, X(\omega)$

$= \begin{cases} 0 & \omega < 0 \\ X(0) & \omega = 0 \\ 2X(\omega) & \omega > 0 \end{cases}$

Nota: multiplicar por $\frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}(\omega))$ extrae las frecuencias positivas

1.2 Canal Paso Banda

$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow \boxed{Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)}$

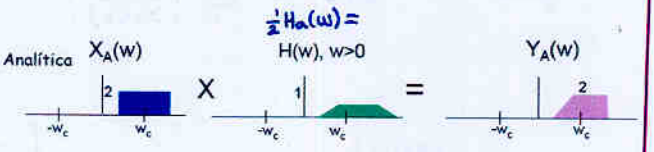


$y_a(t) = x_a(t) * \frac{1}{2} h_a(t) \Leftrightarrow Y_a(\omega) = X_a(\omega) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} H_a(\omega)}_{H(\omega),\ \omega > 0}$

$\frac{1}{2} H_a(\omega)$ equivalente a usar $H(\omega)$ ya que $X_a(\omega) = 0 \ \forall \omega < 0$

$\boxed{Y_a(\omega) = X_a(\omega) \cdot H(\omega)}$

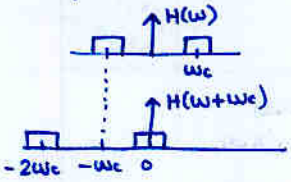
$\frac{1}{2} H_a(\omega) =$ $H(\omega)$, $\omega > 0$



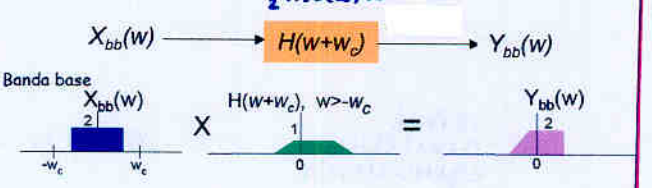
$y_{bb}(t) = x_{bb}(t) * \frac{1}{2} h_{bb}(t) \Leftrightarrow Y_{bb}(\omega) = X_{bb}(\omega) \cdot \frac{1}{2} H_{bb}(\omega)$

$\frac{1}{2} H_{bb}(\omega)$ equivalente a usar $H(\omega + \omega_c)$ ya que $X_{bb}(\omega) = 0$ para $\omega < -\omega_c$

$\boxed{Y_{bb}(\omega) = X_{bb}(\omega) \cdot H(\omega + \omega_c)}$

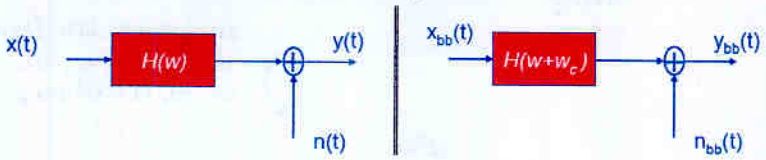


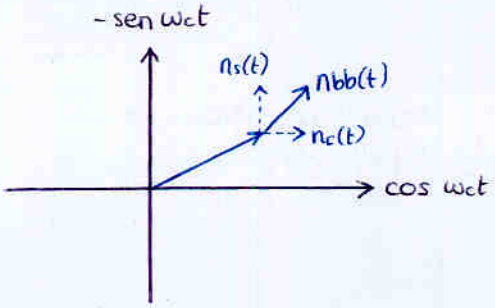
$\frac{1}{2} H_{bb}(\omega) =$ $H(w + w_c)$, $\omega > -\omega_c$



1.3 Representación equivalente del canal AWGN

- Modelo de Canal Paso banda y Banda Base AWGN





- Ruido equivalente paso bajo:

$$n_{bb}(t) = n_c(t) + jn_s(t) = n_A(t)e^{-jw_c t}$$

- Señal analítica del ruido AWG:

$$n_A(t) = n(t) + j\hat{n}(t)$$

✓ Caracterización del ruido equivalente paso bajo:

transformación de hilbert

$$\left.\begin{aligned} R_{n\hat{n}}(\tau) &= R_n(\tau) * h_Q^*(-\tau) = -\hat{R}_n(\tau) \\ R_{\hat{n}n}(\tau) &= R_n(\tau) * h_Q(\tau) = \hat{R}_n(\tau) \\ R_{\hat{n}}(\tau) &= R_n(\tau) \end{aligned}\right\} \quad h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H_Q(w) = -j\,\mathrm{sgn}(w)$$

$$R_{bb}(\tau) = E\left[n_{bb}(t)n_{bb}^*(t+\tau)\right] = 2R_{nc}(\tau) + 2jR_{nnc}(\tau)$$

autocorrelación del ruido equiv paso bajo

$$\left.\begin{aligned} R_{nc}(\tau) &= E\left[n_c(t)n_c(t+\tau)\right] = R_n(\tau)\cos(w_c\tau) - \hat{R}_n(\tau)\,sen(w_c\tau) = R_{ns}(\tau) \\ R_{ncns}(\tau) &= -R_{nsnc}(\tau) = R_n(\tau)\,sen(w_c\tau) - \hat{R}_n(\tau)\cos(w_c\tau) \end{aligned}\right\}$$

✓ Caracterización de la señal analítica del ruido AWG:

$$R_A(\tau) = E\left[n_A(t)n_A^*(t+\tau)\right] = E\left[(n(t) + j\hat{n}(t))(n(t+\tau) - j\hat{n}(t+\tau))\right]$$

$$R_A(\tau) = 2\left(R_n(\tau) + j\hat{R}_n(\tau)\right)$$

autocorrelación de la señal analítica

$$R_{bb}(\tau) = R_A(\tau)e^{-jw_c\tau}$$

✓ Ruido AWG:

$$n(t) \rightarrow R_n(\tau) = \frac{N_o}{2}\delta(\tau) \overset{TF}{\rightarrow} G_n(w) = \frac{N_o}{2}$$

✓ Equivalente banda base del ruido blanco gaussiano ($n_{bb}(t)$):

$$R_{bb}(\tau) = 2\left[R_n(\tau)\cos(w_c\tau) - \hat{R}_n(\tau)\,sen(w_c\tau) - j\left\{R_n(\tau)\,sen(w_c\tau) - \hat{R}_n(\tau)\cos(w_c\tau)\right\}\right]$$

↘ TF

A partir de las autocorrelaciones obtenemos la d.e.p.

$$G_{bb}(w) = \begin{cases} 2N_o, & w > -w_c \\ N_o, & w = -w_c \\ 0, & w < -w_c \end{cases}$$

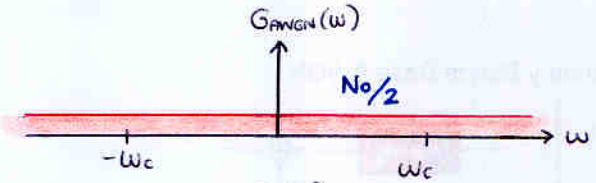
✓ Señal analítica equivalente de $n(t)$:

$$n_A(t) \rightarrow R_A(\tau) \rightarrow G_A(w) = 2G_n(w)(1 + \mathrm{sgn}(w)) = \begin{cases} 2N_o, & w > 0 \\ 2G_n(0) = N_o, & w = 0 \\ 0, & w < 0 \end{cases}$$

$$G_{bb}(w) = G_A(w + w_c)$$

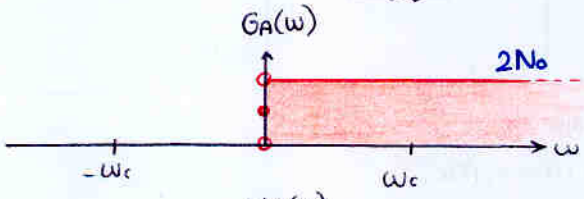
Espectros de ruido

Ruido AWGN

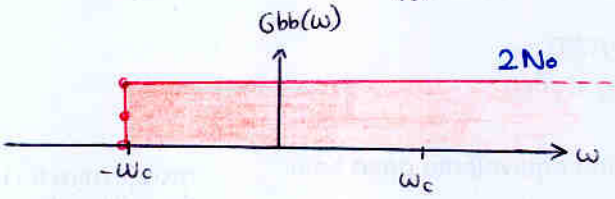


si el espectro (tensión) es el doble, la d.e.p. es el cuádruple

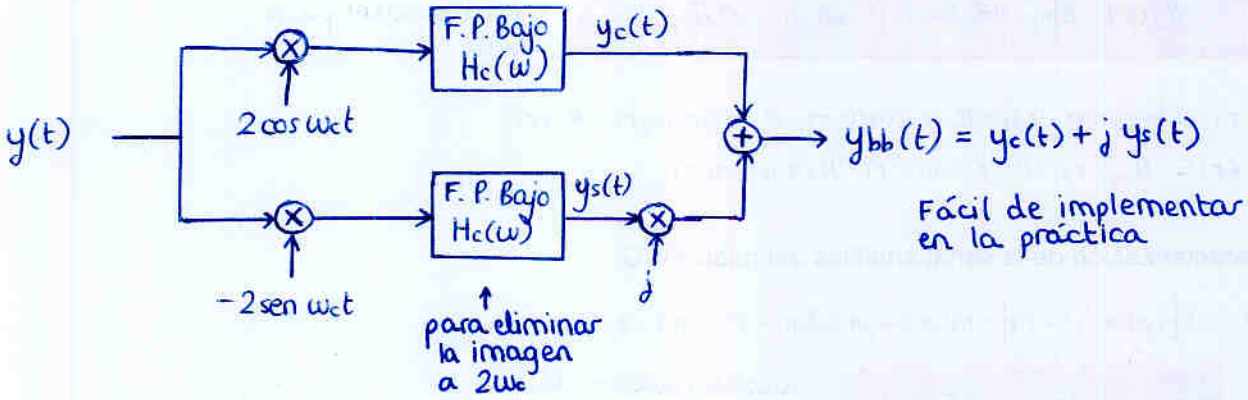
señal analítica equivalente AWGN



Equivalente banda base de ruido AWGN

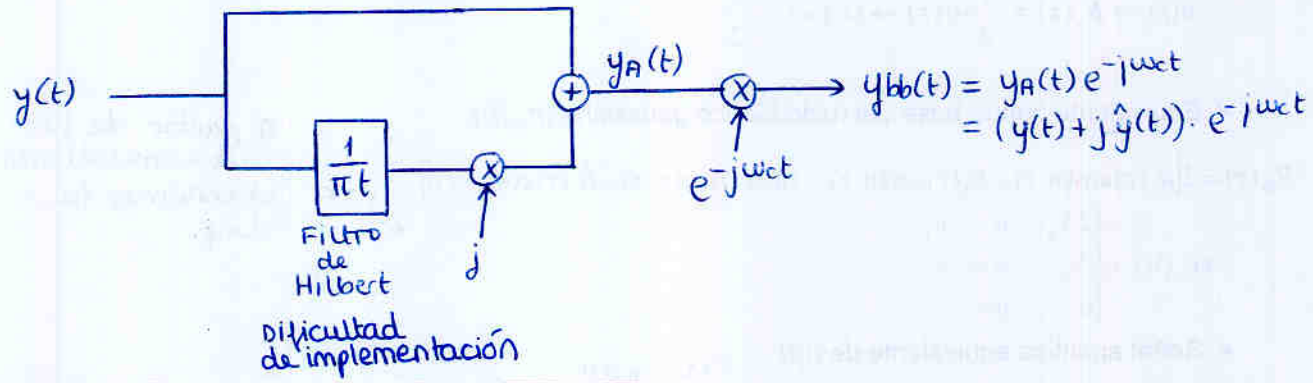


1.4 Demoduladores para la generación de equivalentes banda base



Fácil de implementar en la práctica

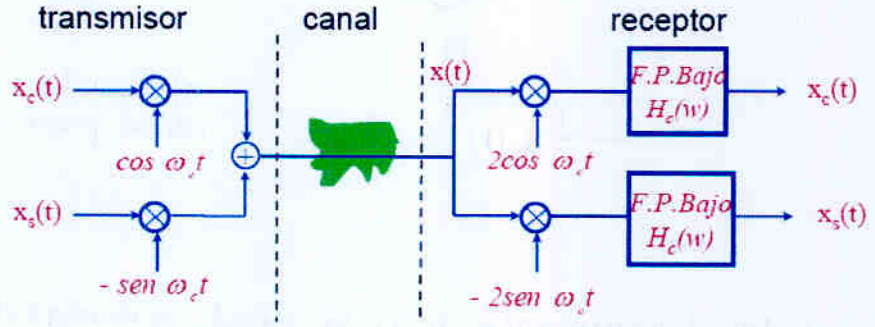
Tipo 2 (no se usa)



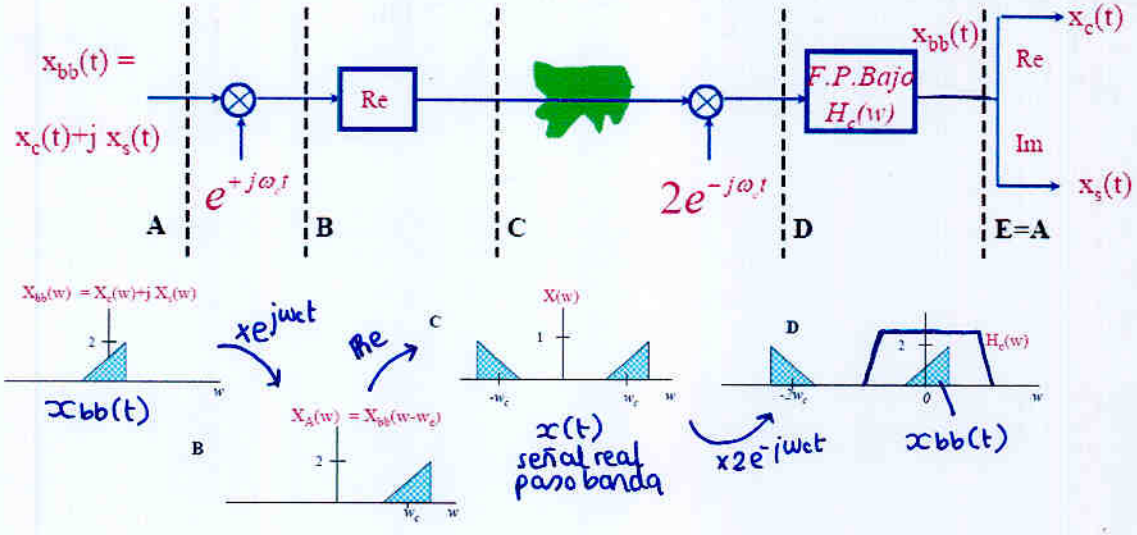
Dificultad de implementación

1.5 Diagramas de bloques de sistemas paso banda

· un posible modelo:

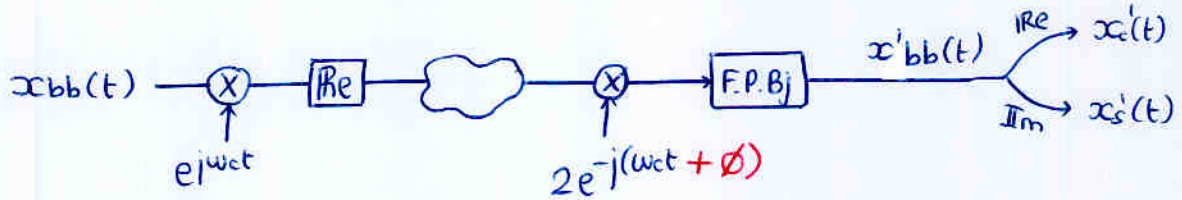


. otro posible modelo:



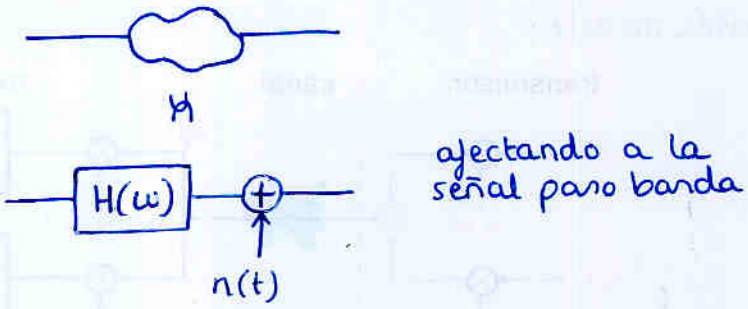
Este modelo de canal puede ser util para estudiar ciertos efectos

ejemplo: error de sincronización de fase en el receptor

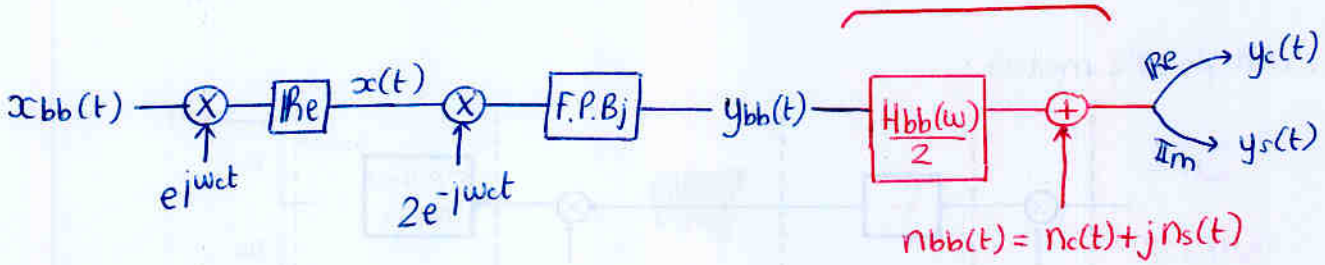


$$x'_c(t) = x_c(t)\cos\emptyset + x_s(t)\,\text{sen}\,\emptyset$$
$$x'_s(t) = -x_c(t)\,\text{sen}\,\emptyset + x_s(t)\cos\emptyset$$

Si introducimos el canal como:



Podemos incluir sus efectos directamente sobre la señal paso bajo del receptor:



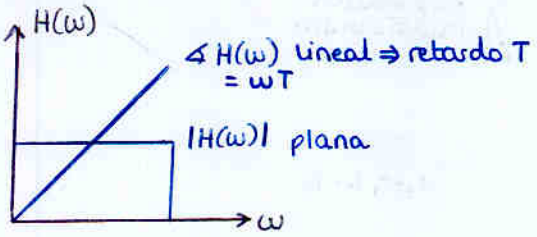
2. Tipos de canales de comunicaciones

2.1 Canal de comunicaciones fijo

Transmisor y receptor fijo

ej:
- **Par trenzado**: telefonía $BW \simeq 3'4kHz$. Distorsión despreciable
- Cable coaxial: mayor $BW \simeq 50MHz$. Atenuación $\uparrow\sqrt{f}$. Requiere ecualización
- Fibra óptica: permite mayor V_t
- Radiocanal de microondas punto a punto: antenas direccionales de elevada ganancia con visión directa.

- **Modelo: Sistema Lineal e Invariante**



Distorsión lineal:
- $|H(\omega)|$ no es plana
- $\angle H(\omega)$ no es lineal

} solucionable mediante ecualización

- **Caracterización del ruido**

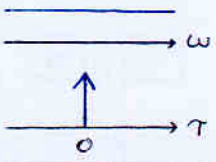
Todo canal tiene ruido aleatorio

Ruido térmico: ruido blanco (pot. espectral plana hasta $10^{13}Hz$)

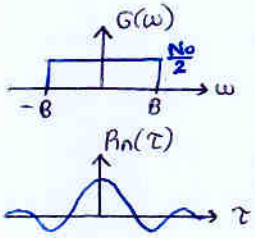
Ruido blanco no limitado en banda

$$G_{AWGN}(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

$$R_{AWGN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$



Ruido blanco limitado en banda



$$R_n(\tau) \overset{TF^{-1}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}\frac{N_0}{2}\cdot e^{j\omega\tau}\,d\omega = N_0 B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)$$

- **Capacidad del canal**

La capacidad del canal indica la MAXIMA velocidad de transmisión sin errores (BER=0) (Teorema de Shannon)

SNR elevadas permiten modulaciones multinivel que permiten gran eficiencia espectral (C/B)

$$C = B\cdot\log_2(1+SNR)\ \left[bit/s\right]$$

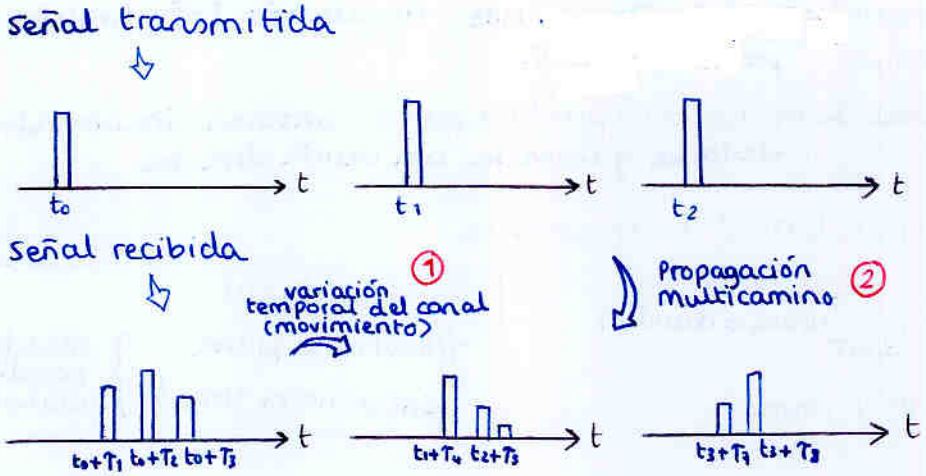
(B: ancho de banda; SNR: relación señal a ruido en lineal)

$$\frac{C}{B} = \log_2(1+SNR)\ \left[\frac{bit/s}{Hz}\right]$$

2.2 Radio canal móvil

ejemplo: comunicaciones móviles BS (estación base) ↔ MS (terminal móvil)
celda

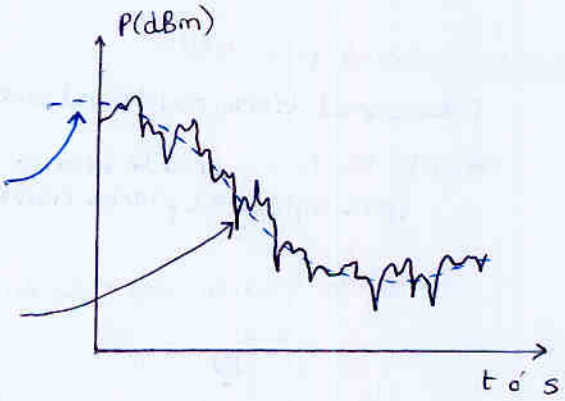
Propagación multicamino + movimiento (variación del canal)



Hay 2 efectos distintos ① y ②

Fading

- **Fading a gran escala**
  - movimiento en zonas extensas (montañas, bosques, ...)
  - variación en la potencia media recibida (pérdidas propag)
- **Fading a pequeña escala = fading multicamino**
  - pequeños cambios de posición (la propagación multicamino me anula la señal)



Caracterización de canales con fading

Señal transmitida: $s(t) = \mathrm{Re}\left[\underbrace{R(t)\, e^{j(\phi(t) + 2\pi f_c t)}}_{s_{bb}(t)} \right]$

Señal recibida (equiv. banda base): $x_{bb}(t) = \alpha(t) \cdot e^{-j\theta(t)} \cdot s_{bb}(t)$

cambio en el módulo, cambio en el fase

$= \underbrace{\alpha(t) \cdot R(t)}_{\text{envolvente de la señal recibida}} \cdot e^{j(\phi(t) - \theta(t))}$

envolvente de la señal recibida $= \underbrace{m(t) \cdot r_0(t)}_{\alpha(t) \cdot R(t)} \cdot R(t)$

Los dos fadings se multiplican entre sí

- $m(t)$: fading a gran escala, distribución log-normal (gaussiana en dB)
- $r_0(t)$: fading multicamino, distribución Rayleigh o Rician

Fading a gran escala

- Potencia media recibida
- Atenuación o pérdidas de propagación
- causado porque las señales son bloqueadas por grandes estructuras Shadowing
- se analiza eliminando el fading multicamino (promediando unas 20 λ)
- la amplitud de la señal resultante sigue distribución log-normal

Efectos del fading

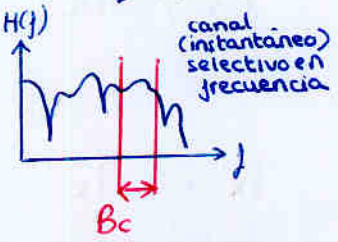
Ensanchamiento Temporal ("Efecto multicamino")

- Dominio t → **Delay spread**

ensancha la señal en el tiempo

TF

- Dominio f → **B_c**



desvanecim. selectivo en frecuencia

Ancho de banda de coherencia

(separación máxima en frec para que el canal sea ≃ cte y fase lineal)

Variación temporal del canal

Debido a movimiento (cambio en los caminos de propagación)

- Dominio t → **T_c**

tiempo de coherencia

(tiempo durante el cual la respuesta del canal puede considerarse invariante)

- Dominio f → **Doppler Spread**

ensanchamiento frecuencial debido al efecto Doppler.

Para una portadora senoidal, la desviación de frecuencia es:

$$f_d = \frac{v_r}{\lambda} = \frac{v \cos \alpha}{\lambda}$$

B_c : Ancho de banda de coherencia del canal
- Inversamente proporcional al Delay Spread (i.e.

B_c alto ⇒ poco ensanchamiento del canal (permite variaciones rápidas → no solapará)

T_c : Tiempo de coherencia del canal
- Inversamente proporcional al ensanchamiento Doppler

T_c alto ⇒ lento movimiento (lenta variación del canal)

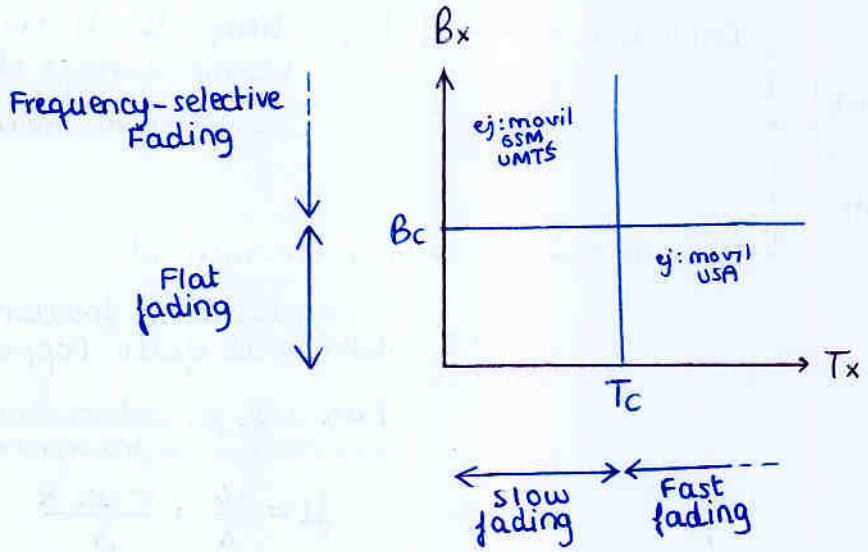
B_x : Ancho de banda de la señal transmitida paso bajo

T_x : Duración temporal de la señal entre sucesivas estimaciones del canal (i.e. al menos 1 símbolo)

$B_x \ll B_c$: Canal plano en frecuencia (flat fading)
- No hay ISI
- No requiere ecualización

$T_x \ll T_c$: Canal plano en tiempo (slow fading)

si $T_x > T_c$ →
- hay que realizar ecualizaciones cada menos tiempo (y si $T_x = T_{simb}$?!)
- muy difícil de solucionar
- mejora: entrelazado



Caracterización del multicamino

Nota: no consideramos el fading a gran escala
$m(t) = 1$

Señal transmitida $s(t) = \mathrm{Re}\{ s_{bb}(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} \}$

↓ multicamino

Señal recibida

$$r(t) = \sum_n \alpha_n(t) \cdot s(t - \tau_n(t))$$

suma de las distintas componentes, cada una con su atenuación y retardo

$$= \sum_n \alpha_n(t) \cdot \mathrm{Re}\{ s_{bb}(t - \tau_n(t)) \cdot e^{j2\pi f_c (t - \tau_n(t))} \}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\sum_n \alpha_n(t) \cdot e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_{bb}(t - \tau_n(t))}_{r_{bb}(t)} \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

Faltaría un 2 para que $r_{bb}(t) = \frac{1}{2} s_{bb}(t) * c_{bb}(t)$ ¿no?

⇒ Canal equivalente paso bajo

$$c_{bb}(\tau; t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t))$$

τ: lo que en SLI llamábamos t ej $h(t)$
t: la variación del canal en el tiempo

de forma que se cumpla

$$r_{bb}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{bb}(\tau; t) s_{bb}(t - \tau) \, d\tau$$

¿No falta aquí $\frac{1}{2}$?

(convolución)

$$r_{bb}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{bb}(f; t) S_{bb}(f) e^{j2\pi f t} df$$

TF^{-1} (producto en frecuencia)

ejemplo: para una frecuencia portadora sin modular

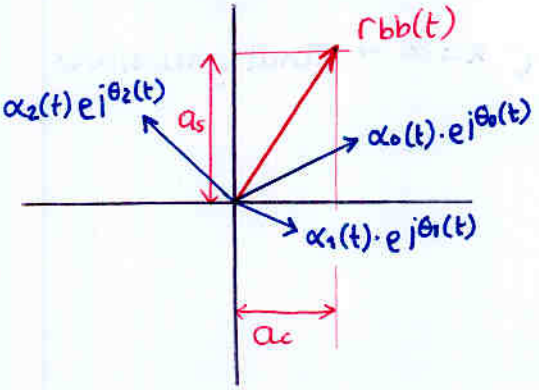
$s_{bb}(t) = 1$

$$r_{bb}(t) = \sum \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j\theta_n(t)}$$

$\alpha_n(t)$ y $\theta_n(t)$ son procesos aleatorios (realizaciones n)

$\alpha_n(t)$: gaussiano
$\theta_n(t)$: fdp uniforme en $[0, 2\pi]$

$r_{bb}(t)$ se modela como proceso aleatorio (suma de fasores 'aleatorios')



$$|r_{bb}(t)| = \sqrt{a_c^2(t) + a_s^2(t)}$$

rayleigh ⟸ gaussianas (parte real e imaginaria)

Clasificación estadística del canal móvil

1. Canal gaussiano (caso más sencillo al cual aspiran los demás canales)

- SLI con AWGN
- Siempre presente. Representa un límite superior a la calidad del sistema

BERgaussiano

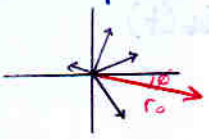
- Los canales con fading utilizan técnicas (diversidad, ecualización, codificación del canal) para que BER → BERgaussiano

2. Canal con desvanecimiento Rayleigh

Componentes multicamino independientes entre sí

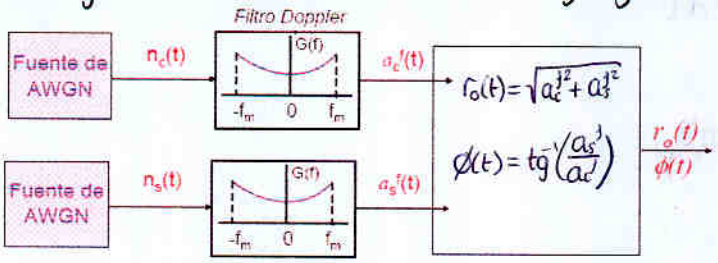
$$r_0 = \sqrt{a_c^2 + a_s^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_s}{a_c}\right)$$



- a_c y a_s tienen fdp gaussiana
- r_0 tiene fdp rayleigh $f_R(r_0) = \frac{2r_0}{\sigma^2} e^{-\frac{r_0}{\sigma^2}}$, $r_0 \geq 0$

Modelo para generar desvanecimiento Rayleigh variable en el tiempo



•Filtros paso bajo simulan el desplazamiento Doppler de frecuencia ⇒

$f_m = v/\lambda = v \cdot f_c / c$

3. Canal Rician

- Hay multicamino pero con un camino dominante (ej: microceldas con LOS)
- La envolvente de la señal sigue una distribución de Rician

$$k = \frac{\text{potencia camino dominante}}{\text{potencia en caminos de scatter}}$$

- $k = 0 \rightarrow$ Canal Rayleigh
  - ↓ mejora la BER
- $k = \infty \rightarrow$ Canal gaussiano

Probabilidad de error de bit en canales con fading

Cálculo de P_b en Tema 1:
suponíamos que se recibe $s_{bb}(t) + n_{bb}(t)$

Canal con fading se recibe: $r_{bb}(t) = \underbrace{\alpha(t) \cdot e^{-j\phi(t)}}\, s_{bb}(t) + n_{bb}(t)$

- Si hay flat fading y variación lenta se tiene $\alpha(t)$ y $\phi(t)$ cte en T_x

$$r_{bb}(t) = \alpha \cdot e^{-j\phi} \cdot s_{bb}(t) + n_{bb}(t)$$

- suponemos detección coherente { se estima y corrije perfectamente ϕ ; filtro adaptado

Se define $\gamma_b = \alpha^2 \frac{E_b}{N_0}$ → Se sustituye $\frac{E_b}{N_0}$ por γ_b en todas las fórmulas del tema 1

Pero ya que α es aleatorio (habitualmente), hay que tener en cuenta los posibles valores de γ_b ponderados por su prob.

sea: $p(\gamma_b)$ la f.d.p. de γ_b
se tiene:

$$P_b = \int_0^{+\infty} P_b(\gamma_b) \cdot p(\gamma_b) \cdot d\gamma_b$$

- BPSK

$$P_b = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_b}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \rightarrow Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

($P_b = P_e$ (M=1)) ; ($d = 2\sqrt{E_b}$, $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$)

- BFSK

$$P_b = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{E_b}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \rightarrow Q\left(\sqrt{\gamma_b}\right)$$

($P_b = P_e$) ; ($d = \sqrt{2E_b}$)

- Flat Fading ⇒ α distribución Rayleigh ⇒ γ_b distribución chi-cuadrado

γ_b distrib. chi-cuadrado $p(\gamma_b) = \frac{1}{\overline{\gamma_b}} e^{-\frac{\gamma_b}{\overline{\gamma_b}}}$ siendo $\overline{\gamma_b} = \frac{E_b}{N_0} \cdot E[\alpha^2]$

y calculando la integral para P_b se obtiene:

BPSK: $P_b \geq \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{\overline{\gamma_b}}{1+\overline{\gamma_b}}}\right]$

BFSK: $P_b \geq \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{\overline{\gamma_b}}{2+\overline{\gamma_b}}}\right]$

- Fading rápido:
  Se hace imposible estimar la fase promediando varios periodos de señalización (no podemos aplicar detección coherente)

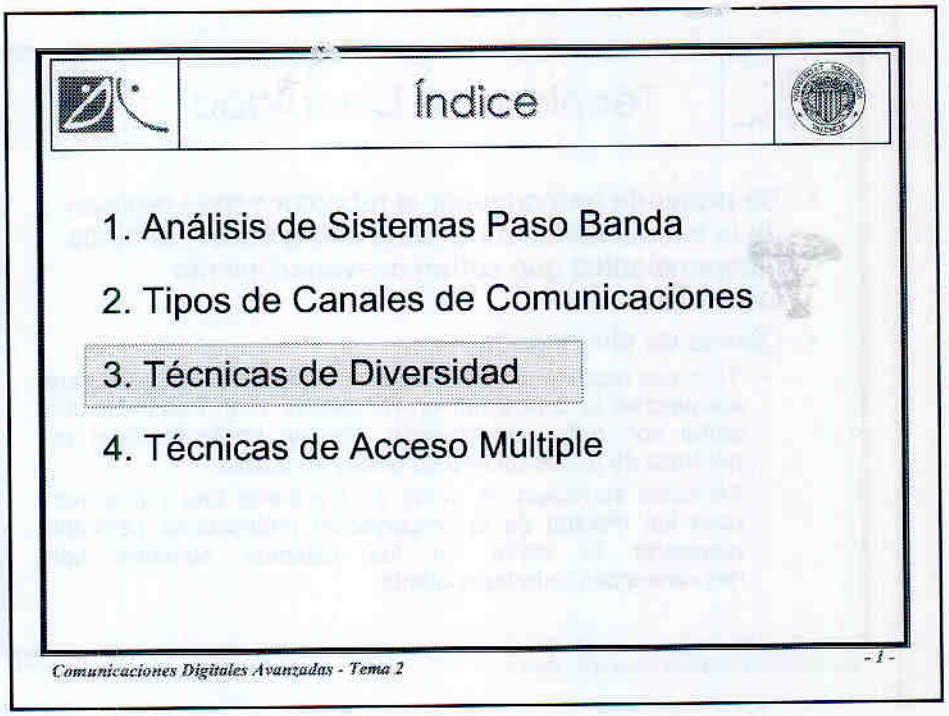
  Entonces aplicamos DPSK (Differential PSK) como alternativa robusta (no requiere detección coherente)

Canal sin fading: $P_b = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b}$ Canal flat fading y rápido $P_b = \frac{1}{2(1+\overline{\gamma_b})}$

2.3 Canal vía satélite

- Canal satélite fijo
  - Entre satélites geoestacionarios o con receptores en tierra fijos.
  - Estadística Gaussiana.
  - Desvanecimiento causado por la lluvia (frecuencias superiores a 10GHZ).
  - Limitación en potencia del canal obliga a rechazar modulaciones ineficientes en potencia (QAM).

- Canal satélite-móvil
  - Comunicación poco empleada (al menos bidireccional): imposibilidad de elevadas potencias de transmisión en los satélites y excesivo tamaño de las antenas en el móvil.
  - Frecuente la transmisión con LOS, debido a la elevación del satélite.
  - Cuando aparece propagación multicamino el canal sufre desvanecimiento siguiendo la estadística de Rician. Posible modelo a aplicar en el canal Rician: componente LOS con distribución Gaussiana + múltiples caminos con distribución Rayleigh.


Índice
1. Análisis de Sistemas Paso Banda
2. Tipos de Canales de Comunicaciones
3. Técnicas de Diversidad
4. Técnicas de Acceso Múltiple
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 2
- 1 -

3. Técnicas de Diversidad
3.1. Introducción
3.2. Clasificación
– Diversidad en espacio
– Diversidad en frecuencia
– Diversidad en ángulo
– Diversidad en polarización
– Diversidad en tiempo
3.3. Técnicas de combinación
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 2
- 2 -

. Hemos visto que hay canales muy malos
. Vamos a intentar diversificar la transmisión a un mismo usuario

Técnicas de Diversidad

- Se pretende proporcionar al receptor varias réplicas de la misma señal transmitida sobre varios caminos independientes que sufren desvanecimiento incorrelado.
- Clases de diversidad:
  - Técnicas explícitas: transmisión redundante de la señal para aprovechar la diversidad en recepción. P.ej. transmitir una señal con doble polarización. Implica un incremento en potencia de transmisión o en ancho de banda.
  - Técnicas implícitas: la señal se transmite una única vez, pero los efectos de la propagación multicamino permiten recuperar la señal de los distintos caminos con desvanecimiento independiente.

Diversidad Espacial

- Es la más habitual. Fácil de implementar, no requiere un ancho de banda adicional.
- Consiste en emplear en la BS en recepción, varias antenas suficientemente espaciadas (>10 λ) para obtener señales con fading independientes.
- El espaciado depende: de la distancia de coherencia, que fija el espaciado mínimo para alcanzar el grado de incorrelación adecuado, la altura de las antenas y el terreno.
- Se aplica en el plano horizontal, ya que es más común que las señales multicamino lleguen en ese plano.
- Se puede usar diversidad espacial dual en recepción y en transmisión, que proporciona una forma de cuádruple diversidad.

Diversidad en Ángulo

- Técnica muy similar a la de diversidad espacial.
- Consiste en utilizar varios haces estrechos no solapados en recepción que cubran el volumen iluminado (en diversidad espacial varias antenas cubren el mismo volumen).
- Las señales obtenidas en los distintos haces tienen un grado de correlación bajo.
- Se emplea cuando la extensión en ángulo del volumen iluminado es elevada (indoors, unidad MS en área urbana).
- *Switched Beams* versus *Smart Antennas* (Antenas Adaptativas)

← introduce nulos donde hay interferencias

Diversidad en Frecuencia

- Transmisión de la misma señal mediante diferentes frecuencias portadoras.
- Técnica que requiere: un ancho de banda adicional, generar varias señales en transmisión y combinar las señales en recepción.
- El espaciado entre las portadoras debe ser mayor al ancho de banda de coherencia, que depende del *delay spread* del canal.
- Cuanto mayor es el delay spread, menor es el ancho de banda de coherencia y menor el espaciado necesario entre portadoras para conseguir incorrelación entre las distintas señales multicamino con fading.
- Es frecuente la diversidad espacio-frecuencia.

Diversidad en Polarización

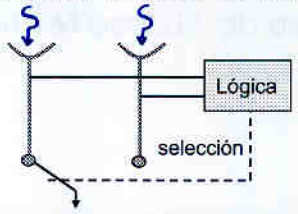
- Dos opciones:
  - Polarización explícita: la señal se transmite con polarizaciones ortogonales y se recibe con desvanecimientos independientes.
  - Polarización implícita: la señal se transmite sin redundancia con una única polarización y se recibe con antenas en polarización cruzada.
- Tiene la limitación de sólo 2 modos de polarización ortogonales.
- Pueden utilizarse antenas con doble polarización, evitando el uso de antenas separadas como en la diversidad espacial.
- Ventajas de antenas con polarización cruzada en BS que permiten recibir señal en diferentes polarizaciones de MS en orientaciones aleatorias.

Diversidad Temporal

- Aplicada en particular en comunicaciones digitales.
- El mismo bit de información se transmite repetidas veces en intervalos de tiempo suficientemente separados para asegurar que el nivel de desvanecimiento de las repeticiones será independiente.
- La separación de los intervalos depende del tiempo de coherencia del canal, que depende de v y de f_c.
- Caso particular: diversidad temporal en situaciones multicamino con señales de suficiente ancho de banda para que las versiones de los distintos caminos sean ecos de la inicial.

Técnicas de combinación

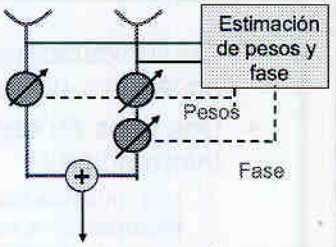
- Métodos de combinación lineal de diversidad:
  - Selección
  - Combinación de máxima probabilidad
  - Combinación de ganancia igual
- Técnica de Selección
  - La más simple y frecuente.
  - Se escoge a la salida la señal de diversidad de mayor relación C/N.



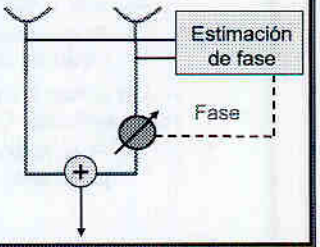
Salida del combinador para dos ramas de diversidad

Técnicas de combinación

- Combinación de máxima probabilidad (*Maximum Ratio Combining, MRC*)
  - Las M ramas con diversidad se ajustan en fase y se pondera proporcionalmente su nivel. A continuación se suman.
  - Combinador que proporciona la mejor reducción estadística del fading.



- Combinación de ganancia igual (*Equal Ratio Combining, ERC*)
  - La estimación de amplitudes puede resultar difícil; en este caso sólo se ajustan las fases de las distintas ramas de diversidad.
  - Resultados muy similares a la anterior.



Índice

1. Análisis de Sistemas Paso Banda
2. Tipos de Canales de Comunicaciones
3. Técnicas de Diversidad
4. Técnicas de Acceso Múltiple

Técnicas de acceso múltiple

- Comunicaciones Multiusuario (Múltiples usuarios acceden a un canal común).
- Dos tipos de canales (punto de vista de Teoría de la Información):
  - Los usuarios comparten un canal común para transmitir información a un único receptor: Canal MAC = *Multiple Access Channel*
    - *P. ej: enlace ascendente (uplink) en comunicaciones móviles, wireless, satélites. Multiplexación en canales de cable.*
  - Un único transmisor envía información a múltiples receptores: Canal BC = *Broadcast Channel*
    - *P. ej: radiodifusión de TV, radio, enlace descendente (downlink) en comunicaciones móviles, wireless, satélites.*

No confundir con el broadcast típico en el cual el TX emite la misma info para todos. La info puede ser diferente

Técnicas de acceso múltiple

- FDMA (Frequency Division Multiple Access)

  Se asigna a cada usuario una subbanda de frecuencia específica, de forma que el espectro resultante no se solape. Esta técnica es asíncrona. Aplicación: transmisión por cable de voz y datos.

- TDMA (Time Division Multiple Access)

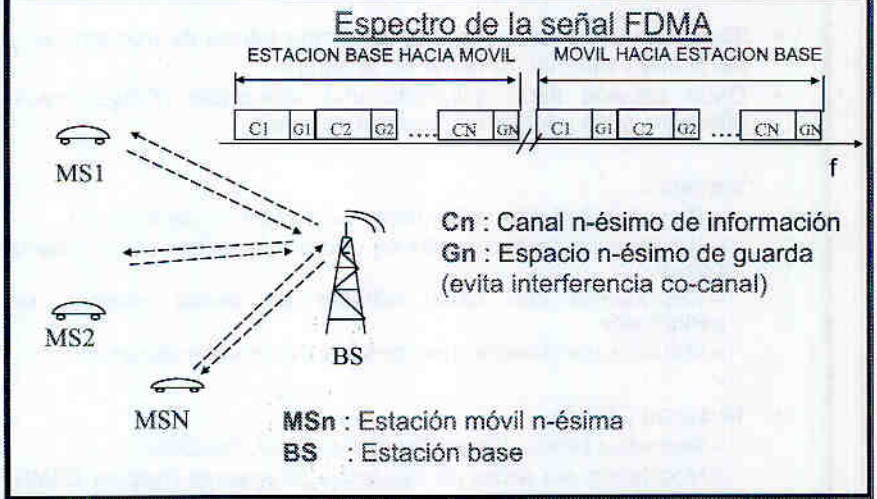
  Cada usuario dispone de un *slot* de tiempo periódico para acceder al sistema. Esta técnica es síncrona ya que requiere una referencia de tiempo. Aplicación: transmisión digital de voz.

- CDMA (Code Division Multiple Access)

  Cada usuario tiene asignado un código diferente. Los distintos códigos son prácticamente ortogonales. Los usuarios disponen de todo el tiempo y banda de frecuencias. Puede ser síncrona o asíncrona.

- TRMA (Time-Random Multiple Access)

FDMA



TDMA

Trama TDMA/TDD del sistema DECT

TDD :Time Division Duplex.

CDMA

- Todos los usuarios comparten la misma banda de frecuencias y transmiten simultáneamente en el tiempo.
- Cada usuario tiene asignada una secuencia código única, diferente, y en principio, ortogonal del resto.

- Ventajas:
  - Proporciona niveles sustanciales de rechazo de interferencias.
  - Reutilización de frecuencias en celdas adyacentes en un sistema celular.
  - Coexistencia con otros sistemas de banda estrecha sin perturbarlos.
  - Mitiga los desvanecimientos de señal debidos al multicamino.

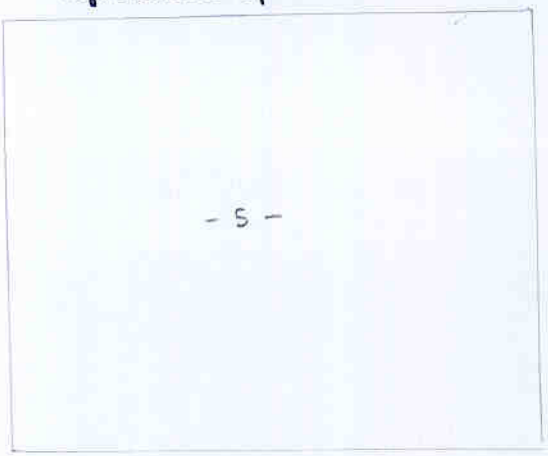
- Técnicas CDMA:
  - Secuencia Directa (*Direct Sequence* CDMA, DS-CDMA)
  - Modulación por saltos de frecuencia (*Frequency Hopping* CDMA, FH-CDMA)

2. Técnicas de modulación digital

2.1 Principios básicos

Parámetros para ver lo buena que es una modulación
- Potencia media P_b [W]
- Ancho de banda [Hz]
- Tasa [b/s]

Eficiencia espectral & CNR



C : capacidad del canal [b/s]
W = B : ancho de banda [Hz]
R : tasa [b/s]
V_t : vel. de modulación [simb/s]

$$R = V_t \cdot \underbrace{\log_2 M}_{\text{bits/simb}}$$

Límite de Shannon:
$\frac{C}{W}$ máximo para obtener una prob. de error arbitrariamente pequeña en un canal AWGN.

$$\frac{C}{W} = \log_2(1 + SNR)$$

En QAM y PSK

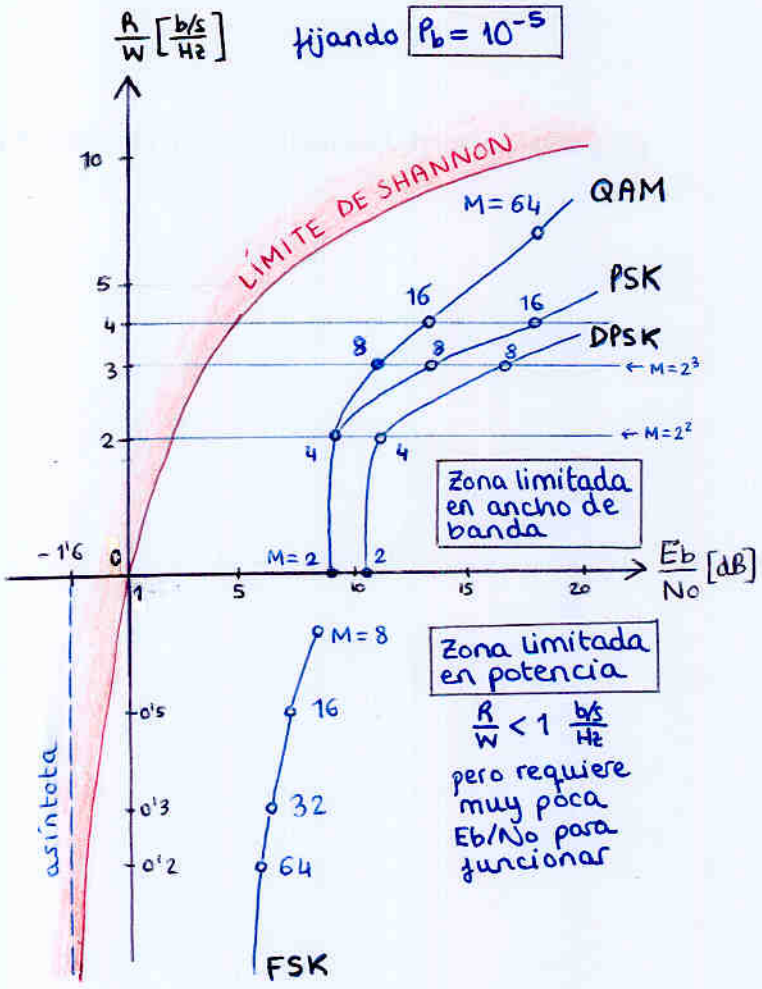
$$W\,[Hz] = V_t\,[simb/s]$$

y por tanto

$$\frac{R}{W} = \frac{R\,[b/s]}{V_t\,[simb/s]} = \log_2 M$$

La eficiencia espectral crece con el $\log_2$ de M

Eficiencia espectral & Eb/No



Espectro de potencia de la señal digital

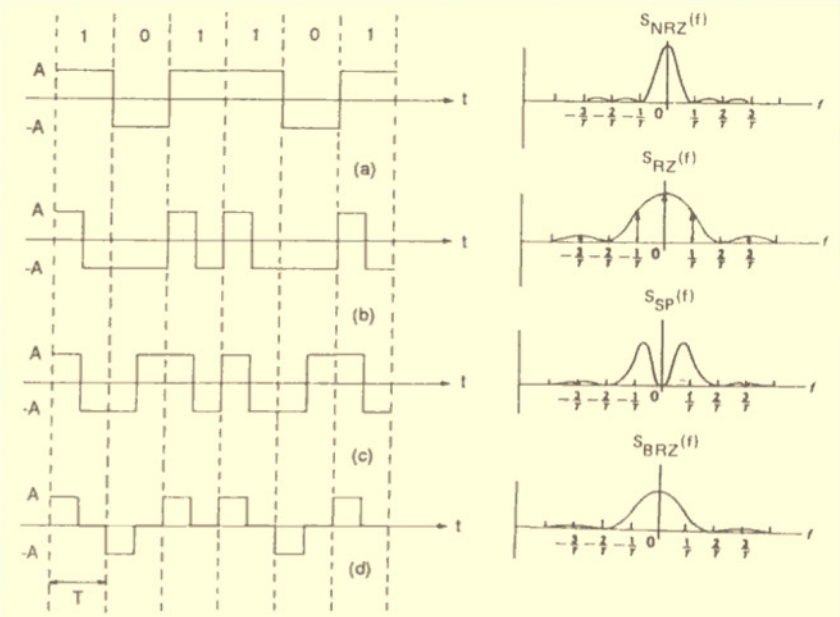
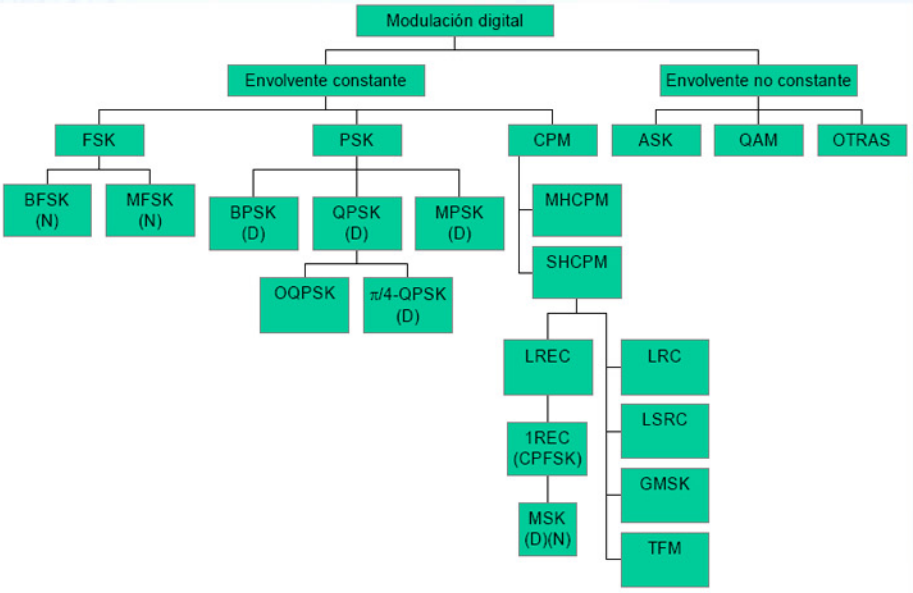


FIG. 9 Examples of digital data waveforms (also known as *line coding*) and corresponding power spectra: *a*, non-return to zero (NRZ); *b*, return to zero (RZ); *c*, split phase (SP or Manchester); *d*, bipolar return to zero (BRZ).

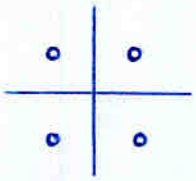
Algunas modulaciones digitales típicas

DSBSCAM		DSB-SC	Modulación de amplitud con portadora suprimida de DBL
PSK		BPSK	Phase-shift keying; binary PSK
DPSK		DBPSK	Differential PSK (no carrier recovery)
QPSK		CQPSK	Quadrature (quaternary) PSK, coherent QPSK
OQPSK	OKQPSK	SQPSK	Offset QPSK, offset-keyed QPSK, staggered QPSK
DQPSK			Differential QPSK (no carrier recovery)
DEQPSK			Differentially encoded QPSK (with carrier recovery)
MSK		FFSK	Minimum-shift keying, fast frequency shift keying
DMSK			Differential MSK
GMSK			Gaussian MSK
TFM			Tamed frequency modulation
Multi-h FM, Correlative FM			Multi-index FM, correlative FM, duobinary FM
IJF-OQPSK, NLF-OQPSK			Intersymbol jitter free OQPSK, Nonlinearly filtered OQPSK
SQAM			Superimposed quadrature amplitude modulation
CPM			Continuous phase modulation
CPFSK			Continuous phase frequency shift keying
QAM	M-ary QAM		Quadrature amplitude modulation
APK			Amplitude phase keying
QPRS		QPR	Quadrature partial response signaling
TCM			Trellis-coded modulation

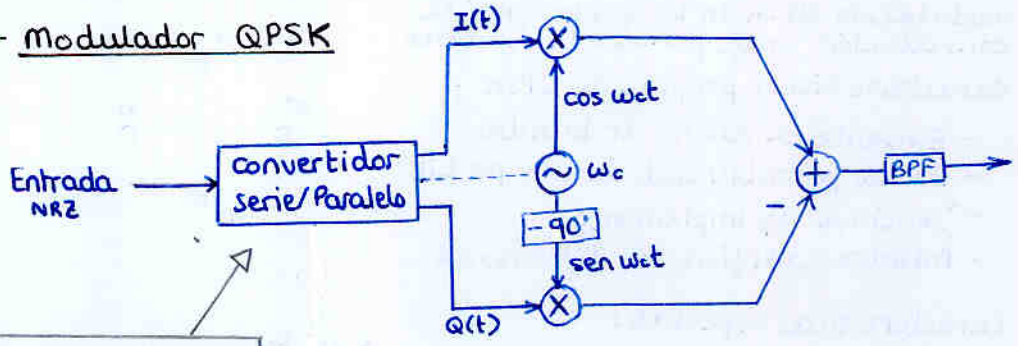


2.2 Modulaciones con eficiencia <= 2 bps/Hz

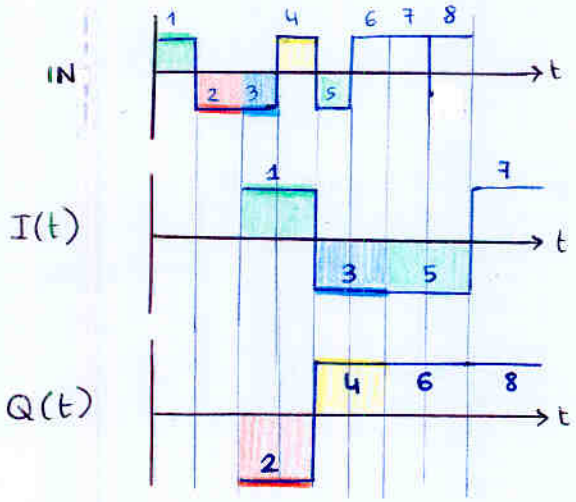
Modulación QPSK



- Modulador QPSK

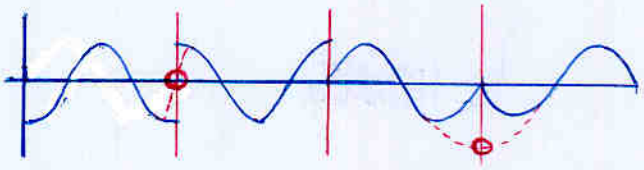


Convertidor serie/paralelo (i.e. señales BB)



La señal tiene cambios bruscos de fase.

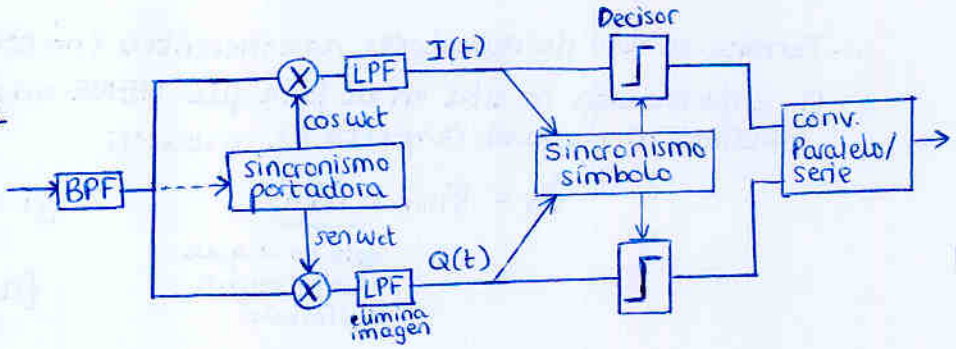
Al filtrar paso bajo, los saltos de 180° resultan o bien:
- desvanecimiento de envolvente
- potencia superior → saturación amplif



Esto son problemas para el amplif. de potencia
↳ solución: OQPSK, π/4QPSK

- Demodulador QPSK

coherente → necesito la fase de la portadora
↳ solución: DPSK

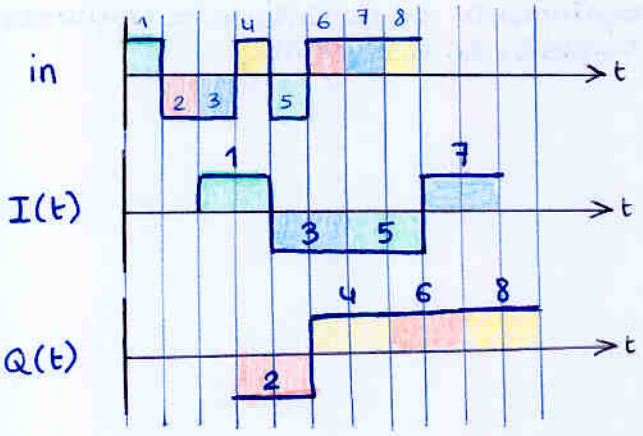


Modulación OQPSK (Offset QPSK)

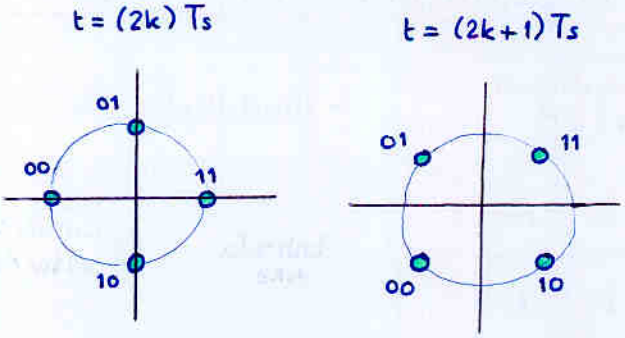
- Evita cambios de fase de 180°
- Lo logra retardando Q(t) medio periodo de símbolo respecto a I(t) ↓

$$\frac{T_s}{2} = T_b$$

Convertidor serie/paralelo en OQPSK

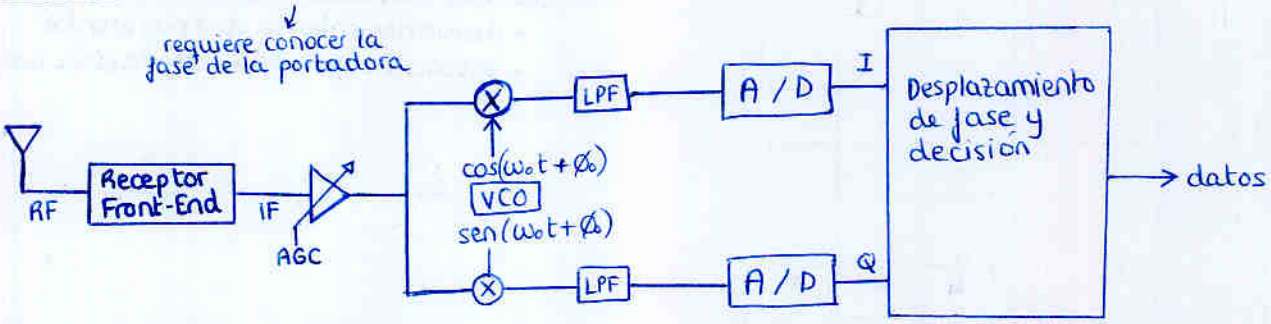


Modulación π/4 QPSK



- Modulación QPSK en la que se 'gira' la constelación cada periodo de símbolo
- Características propias de QPSK:
  - Eficiente en ancho de banda
  - Buena probabilidad de error por bit
  - "sencilla" de implementar
  - Admite codificación diferencial
- Característica especial:
  - La envolvente no se desvanece → Evita transiciones de π en la fase por lo que puede utilizarse con amplificadores no lineales.

Demodulador coherente para π/4 QPSK



Codificación diferencial (ej: para π/4 QPSK)

- Permite el uso de receptores no coherentes (no conocen la fase absoluta)
- La información no está en la fase que TIENE un símbolo, sino en la DIFERENCIA de fase respecto al anterior.

$$\phi_n = \phi_{n-1} + \underbrace{\Delta\phi_n}_{\text{esto es lo que varía según el símbolo}}$$

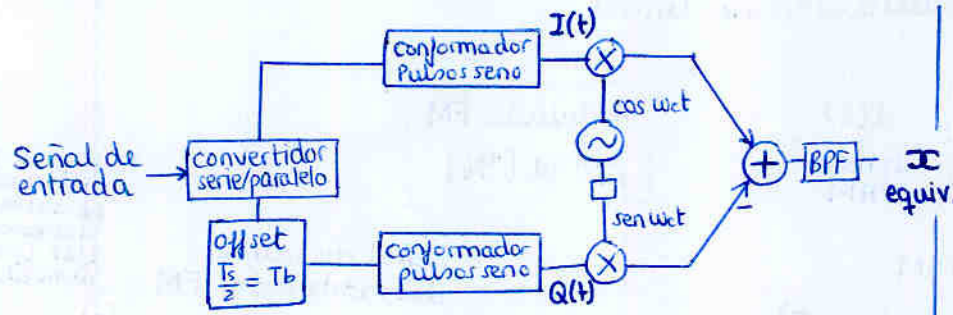
ej: en π/4 QPSK

$\{a_{2n-1}, a_{2n}\}$	$\Delta\phi_n$
0 0	$+\pi/4$
0 1	$+3\pi/4$
1 0	$-\pi/4$
1 1	$-3\pi/4$

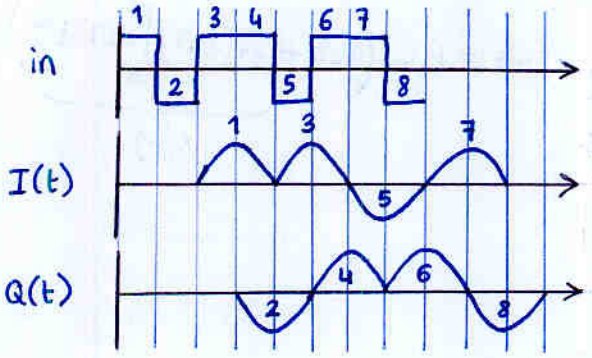
- La codificación diferencial implica una probabilidad de error mayor, ya que los errores vienen en pareja (al equivocarte en un símbolo te equivocas también en el siguiente)

Modulación MSK

- A pesar de ser una modulación CPM (que veremos ahora) también puede considerarse como una OQPSK con pulsos sinusoidales



como veremos $h = 2f_d T_b = 0'5$ en MSK



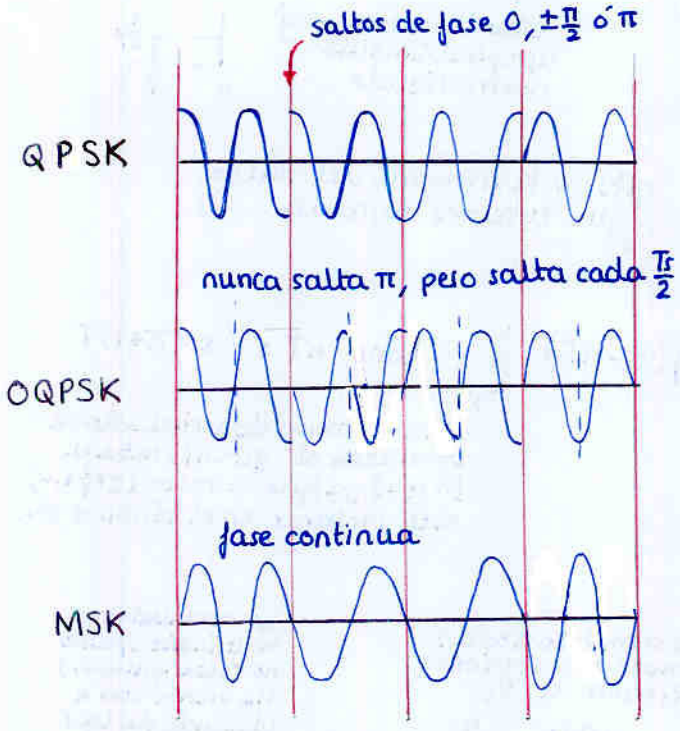
Observar que $I^2 + Q^2 = cte$

La señal en banda base se mueve de forma continua en una circunferencia

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_c t \pm 2\pi \Delta f t)$$ ← coseno suma ← se ve claramente como un VCO

$$= \underbrace{A\cos(\pm 2\pi \Delta f t)}_{I(t)} \cos(\omega_c t) - \underbrace{A \operatorname{sen}(\pm 2\pi \Delta f t)}_{Q(t)} \operatorname{sen}(\omega_c t)$$ ← se ve claramente como OQPSK sinusoidal

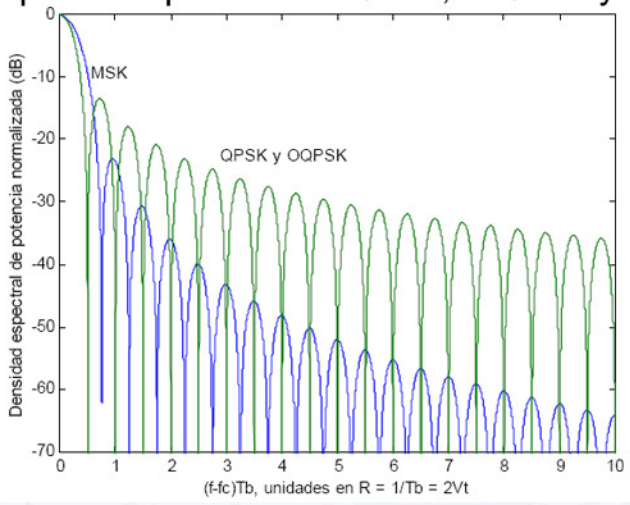
Forma de onda y espectros de QPSK, OQPSK, MSK



Espectros:

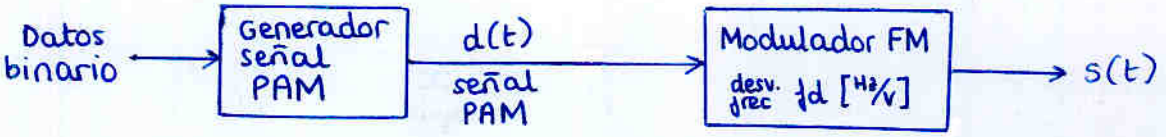
- En MSK se toma $W = \frac{1}{2}\Delta f$
- En QPSK y OQPSK se toma la mitad del lóbulo principal

Ejemplo de espectros de QPSK, OQPSK y MSK



Modulaciones CPM (Continuous Phase Modulation)

- Fase de la señal continua
- Modulador de fase o frecuencia con memoria
- método de modulación no lineal



lo que en Tª com llamábamos f_d ahora lo llamamos $h = 2f_dT$ (para normalizar)

señal PAM

$$d(t) = \sum a_n \cdot g(t - nT)$$

- a_n puede ser $\{\pm 1\}$ o $\{\pm 1, \pm 3\}$ ⋮ o $\{\pm 1, .., \pm M\}$ — nº de amplitudes en banda base
- $g(t)$ forma de onda
  - REC: rectangular
  - RC: raised cosine
  - ↔ LT
- duración LT: la forma de onda puede tener duración > T !! (ISI deshacible) en general, duración de pulso $L \cdot T$

señal de salida del modulador FM

$$s(t) = A\cos\left(\omega_c t + \underbrace{2\pi \underbrace{[2f_dT]}_{h} \int_{-\infty}^{t} d(\tau)d\tau + \varphi_0}_{\varphi(t)}\right)$$

frec instantánea

$$f(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = f_c + h \cdot \underbrace{d(t)}_{\text{señal PAM}}$$

(mod. FM)

La fase de la salida:

$$\varphi(t) = \underbrace{2\pi[2f_dT]}_{h} \int_{-\infty}^{t} d(\tau)\,d\tau$$

$h \triangleq 2f_dT$ índice de modulación [Hz/V]

que puede expresasse como la integral de los periodos anteriores

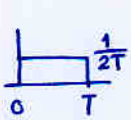
$$2\pi h \int_0^{nT} d(\tau)\,d\tau = \pi h \sum a_k$$

sumado a lo que llevamos de este

$$2\pi h \int_{nT}^{t} d(\tau)\,d\tau = 2\pi h\, a_n \underbrace{\int_{nT}^{t} g(t - nT)\,dt}_{g(t-nT) = g(t_1)}$$

en $t = nT + t_1$

se toma esa h delante para que $2\pi h \int_0^T d(\tau)\,d\tau = \pi h\, a_0$ estando $g(t)$ apropiadamente normalizado

ej 

$a_k = \{\pm 1, \pm 3, \pm 7\}$ separación = 2

$g(t)$ es la integral del pulso que estemos usando

$$\varphi(t, \vec{a}) = \underbrace{\pi h \sum a_k}_{\theta_n} + 2\pi h\, a_n\, g(t - nT)$$

$$= 2\pi \sum_k \left[a_k\, h_k\, g(t - kT)\right]$$

para $nT \le t \le (n+1)T$

en la expresión de arriba solo se considera el $g(t-nT)$ actual [n fija] ya que el resto $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots)$ está incluido en el término θ_n

aquí estamos sumando todas las $g(t)$ de símbolos anteriores, que se mantienen a 1/2

ej

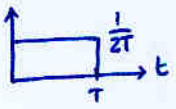
en modulaciones multiíndice (pulsos no rectangulares) h_k varía con k (depende de las a_k anteriores)

↳ no lo entiendo ...

$h = 2f_dT$

ejemplo: CPFSK

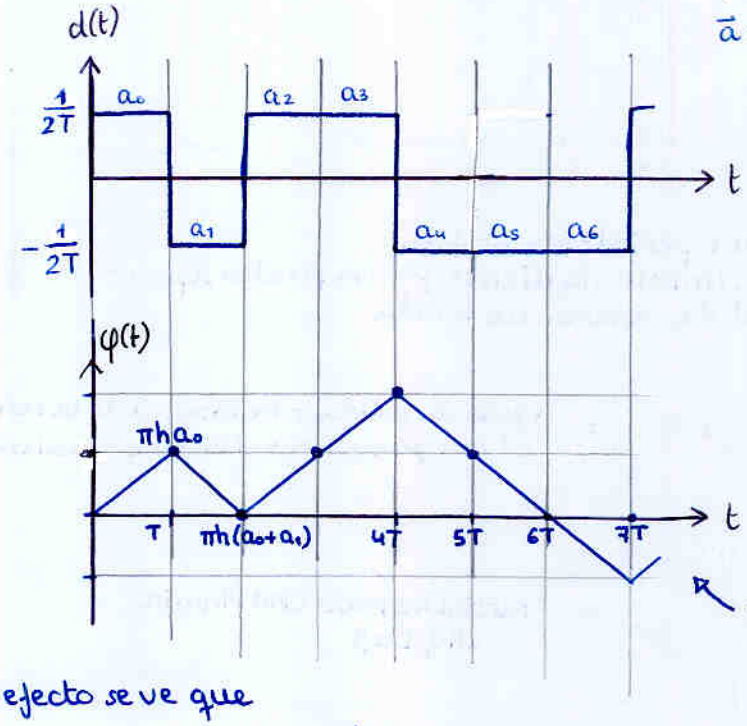
Pulsos cuadrados con duración $L=1 \rightarrow$ $g(t)$



nota: podría haber puesto más valores posibles $\{\pm1, \pm3, \ldots\}$

con $\vec{a} = [1, -1, 1, 1, -1, -1, -1]^T$

$$d(t) = \sum_k a_k g(t-kT)$$



$d(t)$ además de ser la señal PAM es la frecuencia instantánea de la señal de salida (respecto a f_c)

$$\varphi(t) = 2\pi h \int_{-\infty}^{t} d(\tau)\, d\tau$$

$\varphi(t)$ es la fase (que como ves es continua) de la señal de salida

Trayectoria de la fase

En efecto se ve que

en $t = nT \rightarrow$ $$\varphi(t)\big|_{t=nT} = \pi h \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \theta_n$$

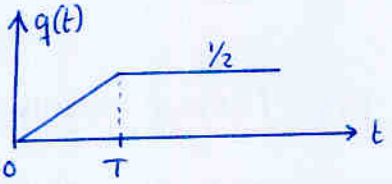
y en cualquier otro instante

en $t = nT + t_1 \rightarrow$ $t_1 \leq T$

$$\varphi(t) = \theta_n + 2\pi h a_n q(t_1)$$

$$= 2\pi \sum \left[a_k h_k q(t-kT) \right]$$

siendo $q(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$

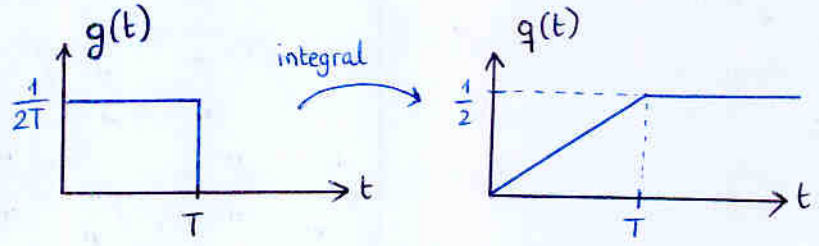


Ejemplos de pulsos

CPFSK

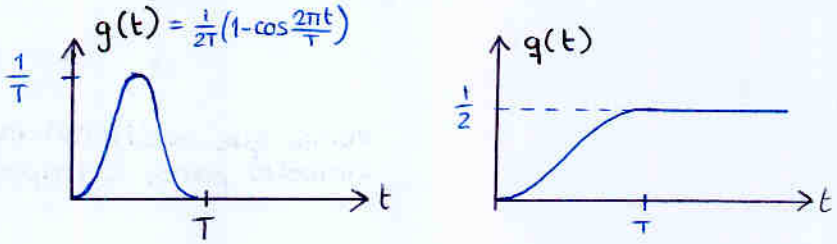
LREC, $L=1$

- Rectangular
- Duración LT

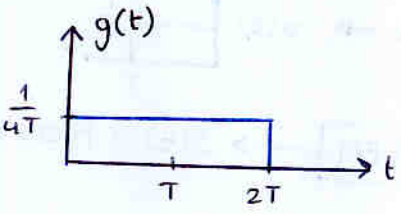


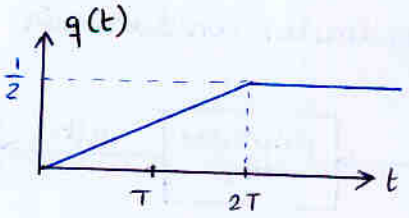
LRC, $L=1$

- Raised cosine
- Duración LT

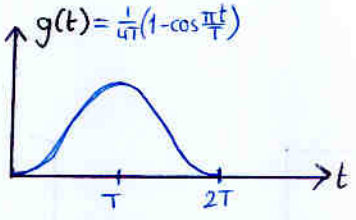


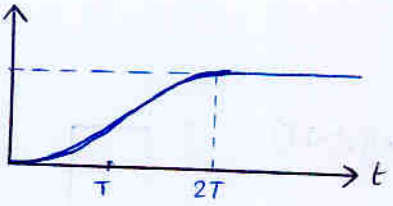
LREC, $L=2$
- Rectangular
- Duración $2T$!!





LRC, $L=2$
- Raised cosine
- Duración $2T$





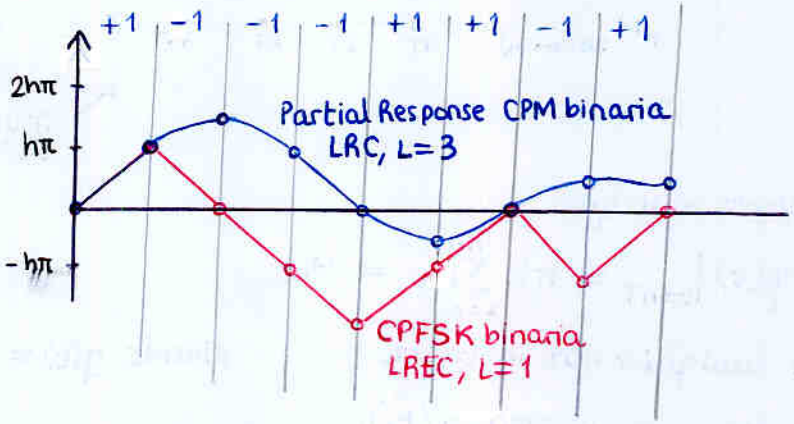
↓

- Abarcan más de un periodo de símbolo
- Se mezclan con el símbolo siguiente pero se pueden separar
- Gastan la mitad de ancho de banda

} Partial response CPM

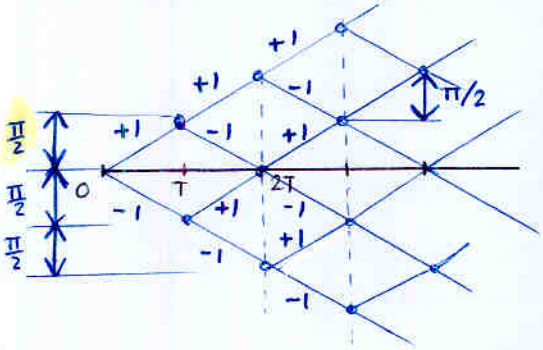
Trayectorias de fase : la fase de salida = la integral de la señal PAM
si $L>1$ parece como si la fase 'tuviese inercia'

$\varphi(t,\vec{a})$



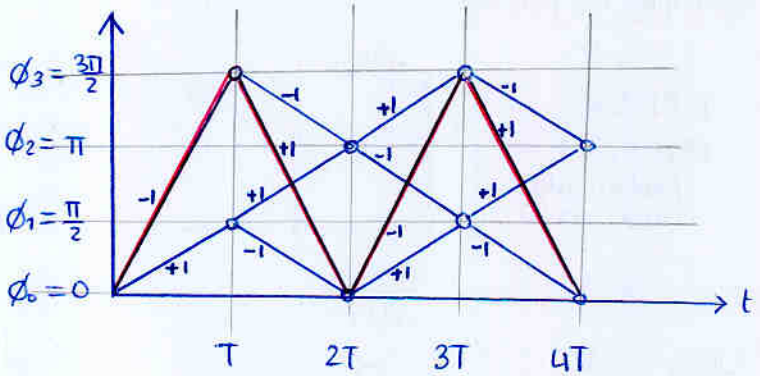
MSK (CPFSK binaria con $h=0'5$)

Trayectoria de fase: posibles



Dibujándolo con $\phi \in [0, 2\pi[$

Diagrama Trellis de fase:



Vemos que se diferencian los símbolos pares e impares

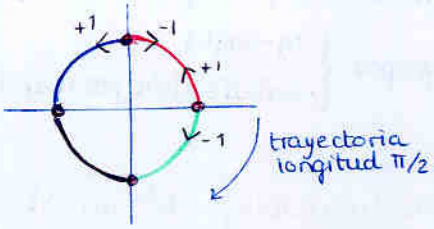
Constelación de señales CPM

En general no se puede representar mediante puntos ya que la fase de la portadora es variable con t.

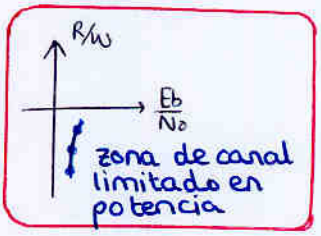
Se pueden dibujar trayectorias de fase.

Para CPM con amplitud cte, las trayectorias de fase forman un círculo

ej MSK h=0'5



La longitud de las trayectorias y el ancho de banda aumentan con h

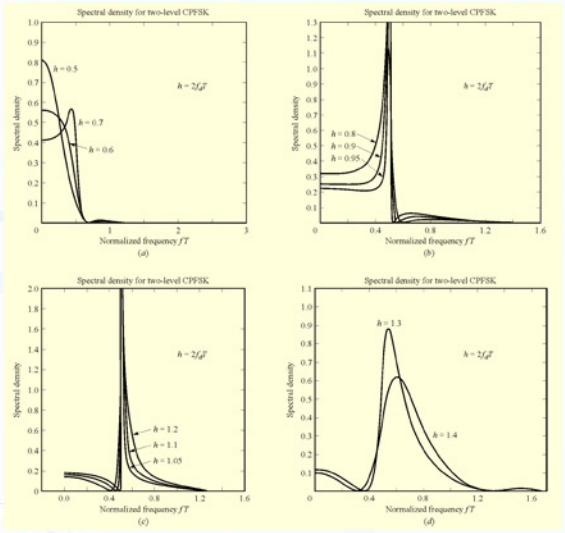


Características espectrales

En general CPM { - baja ef espectral - requiere baja pot.

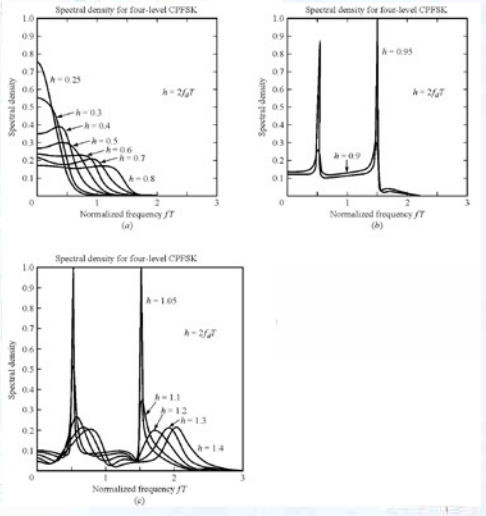
CPFSK binaria

h<1

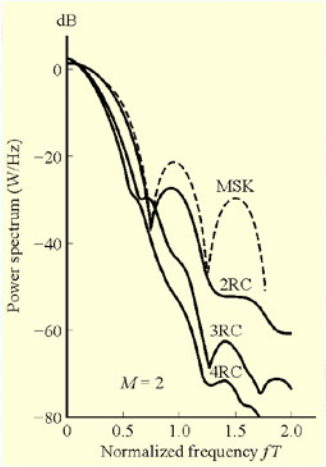


h>1

CPFSK cuaternaria



CPM con h = 0'5



Resumen parámetros que definen una modulación CPM

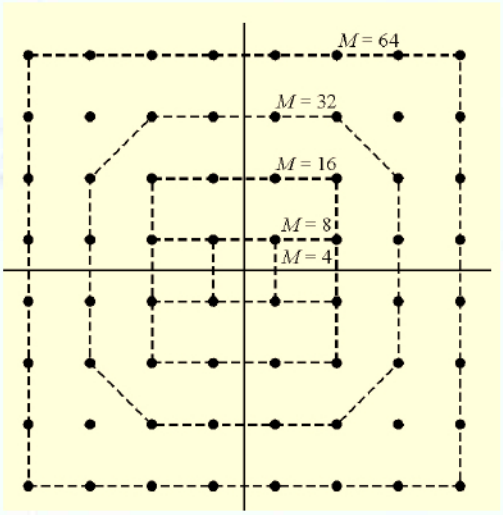
- Pulso Banda Base
  - forma: REC, LC, Gauss
  - duración: LT
- Amplitudes en Banda Base
  - binaria $a = \{\pm 1\}$
  - cuaternaria $a = \{\pm 1, \pm 3\}$
  - ⋮
- Desviación en frecuencia f_d ⇓
- Índice de modulación $h = 2 f_d T$

h↑ { mayor AB ☹ ; mayor long. trayectorias ; más robusto ☺

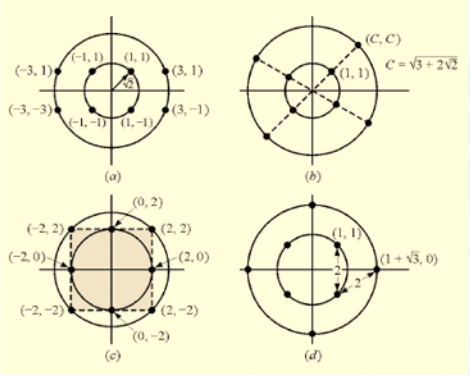
2.3 Modulaciones con eficiencia >= 2bps/Hz

- utilizadas principalmente para canales limitados en banda (ej: canal vocal, enlace ondas)
- 2 grupos { · M-QAM
  · señalización por respuesta parcial (PRS signalling) (entre ellas CPM con LRC)

• Modulaciones M-QAM

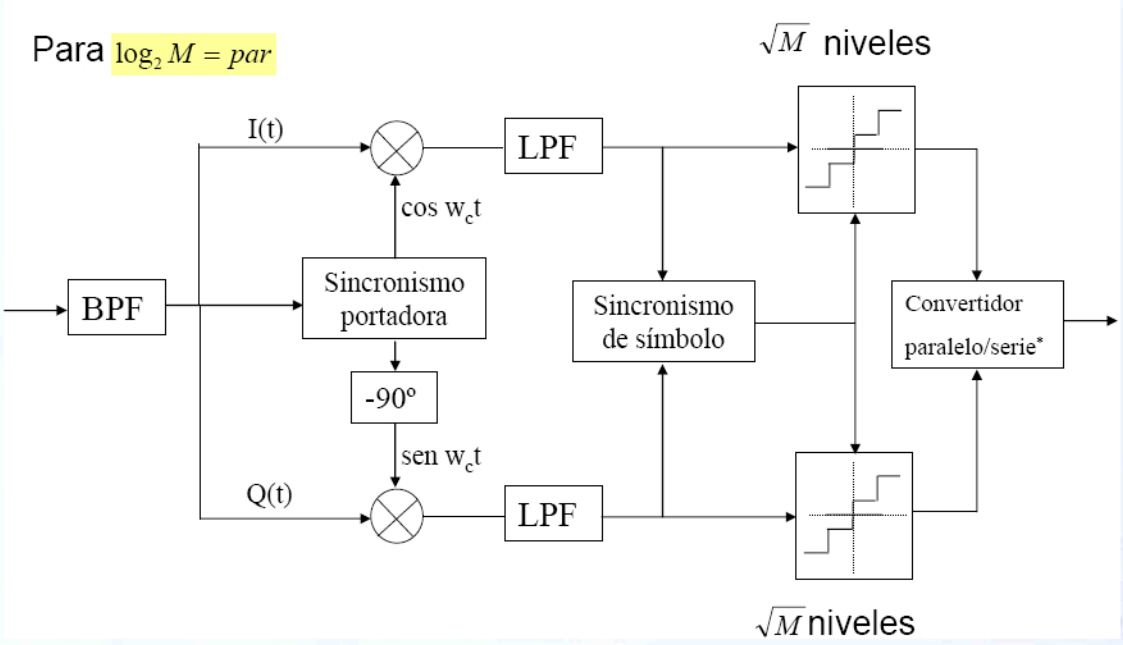


ejemplo:
posibilidades para M=8



- matemáticamente (d) es óptima
- Pero hay que tener en cuenta la sencillez en el receptor

Demodulador M-QAM



3. Modulaciones multiportadora

Problema de la alta velocidad y banda ancha

Modulaciones de banda ancha $W > V_t$ → ventajas:
- inmunidad frente a interferencias y efecto multicamino

→ problema:
banda ancha implica duración de símbolo pequeña
↓
muy sensible a los ecos del canal
(canales selectivos en frecuencia introducen ecos que provocan ISI)

i.e. un mismo eco afecta menos a un símbolo largo que a uno corto

• Solución: modulaciones multiportadora

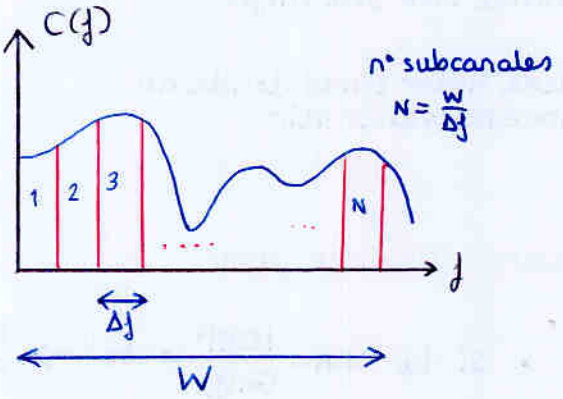
- Usar varias portadoras (tx paralelamente N símb) → alta velocidad de tx de datos
- cada una a velocidad menor → símbolos largos resistentes a ISI
  ↳ un canal no ideal pasa a ser ideal al dividirlo

• División de un canal en subbandas

Supongamos un canal no ideal con problemas (ISI, necesidad de ecualización)

Diseño eficiente:
Subdividir en subcanales de forma que cada uno sea casi ideal

i.e. escoger Δf tal que $\frac{|C(f)|^2}{G_n(f)} \simeq$ cte en cada subbanda



• Capacidad del canal

T^a Shannon $C = W \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$

S: pot media rx $= \int_W P_{tx}(f)\cdot|C(f)|^2 df = P_{av}$

N: pot ruido rx $= \int_W G_n(f)\, df = W N_0$ ← ÷2?

Dividiendo en subbandas: ← $\Delta f \downarrow$ para considerar $P(f_i), C(f_i) \simeq$ cte

↳ Capacidad de cada subcanal $C_i = \Delta f \log_2\left(1+\frac{\Delta f \cdot P_{tx}(f_i)\cdot|C(f_i)|^2}{\Delta f \cdot G_n(f_i)}\right)$

↳ Capacidad total $C = \sum C_i$

$= \Delta f \sum \log_2\left(1+\frac{P_{tx}(f_i)\cdot|C(f_i)|^2}{G_n(f_i)}\right)$

(lim $\Delta f \to 0$)

$$C = \int_W \log_2\left(1+\frac{P(f)\cdot|C(f)|^2}{G_n(f)}\right) df$$

(Shannon, 1949) halló la $P(f)$ que maximiza C

$$P(f) = \begin{cases} K - \frac{Gn(f)}{|C(f)|^2} & f \in W \\ 0 & f \notin W \end{cases}$$

siendo W allá donde $K > \frac{Gn(f)}{|C(f)|^2}$

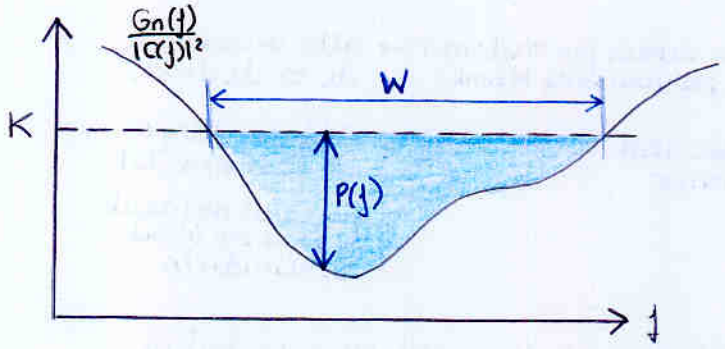
↑ mayor cuanta más potencia queramos tx

Interpretación water-filling

Llenar la gráfica con agua, y usar más potencia donde haya más agua.

$\frac{Gn(f)}{|C(f)|^2}$ indica lo MALO que es el canal en f.

Es parecido a la inversa de la SNR



Hay que transmitir más potencia $P(f)$ [W/Hz] allá donde SNR sea mejor

Puede haber zonas donde no interese transmitir

Caso mejor y peor

- Si la $SNR = \frac{|C(f)|^2}{Gn(f)} = cte \Rightarrow$ se consigue la mínima capacidad del canal (al ser la curva plana no se puede aprovechar el water filling y la capacidad máxima resulta ser la mínima)

si el canal es plano $|C(f)|^2$ (canal ideal)
la peor distribución posible del ruido es el blanco $Gn(f) = \frac{N_0}{2} = cte$

Ejemplos de comunicaciones multiportadora

La diferencia está sólo en la forma de generarse

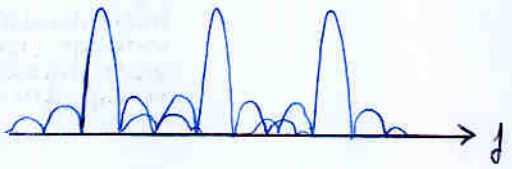
DMT: Discrete Multitone Transmission
- Estándar de modulación en ADSL

OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing
- Estándar DAB y DVB

1950-60: aplicaciones militares
1985: com. móviles

OFDM
Aprovechamiento del espectro

Espectro de FDM tradicional:

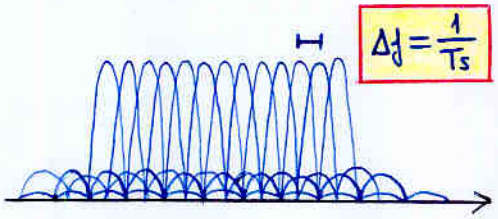


nota: cada portadora es una sinc ya que

$\cos \cdot \Pi_{T_s} \xrightarrow{TF}$ sinc

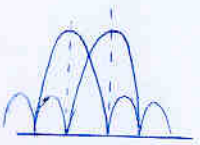
(T_s)

Espectro de OFDM



$\Delta f = \frac{1}{T_s}$

mínima separación que logra ortogonalidad



Nota: en MSK la separación era aún menor $\Delta f = 1/2T_s$

ejemplos OFDM

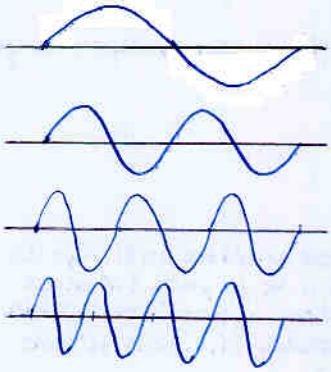
DAB (digital audio broadcast): N = 1536, T = 1 ms

DVB video: N = 6817 ó 1705, T = 896 ms ó 224 ms

$f_1 = f_0 + \frac{1}{T}$

$\int_0^T \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_1 t)\, dt = 0$

ejemplo: 4 portadoras

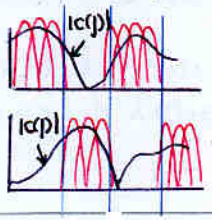


OFDM: Ventajas e inconvenientes

Problema: Desvanecimientos pueden hacer desaparecer portadoras

Soluciones:
protección { codif canal (bloque, convolucional)
entrelazado
modulación codificada

Se puede aprovechar para implementar múltiple acceso OFDMA



Ventajas:
- FDM con máxima eficiencia espectral
- Convierte canales selectivos en frecuencia en no selectivos
- Los lóbulos laterales caen rápidamente (pequeñas interferencias)

Inconvenientes:
- No es de envolvente constante (problemas en tx satélite y grabación magnética, ya que la señal presenta picos al ser suma de portadoras)

Implementación de OFDM

¡MUY ingenioso!

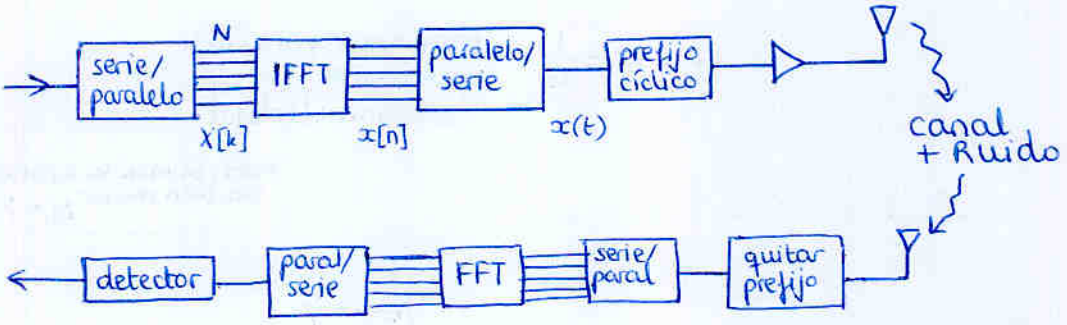
Básicamente: En cada T_s transmitimos la señal $x[n]$ que se obtiene como FFT inversa de los coeficientes $X[k] \in \mathbb{C}$, donde cada $X[k]$ será el símbolo digital (ej: BPSK, QPSK, MQAM ... puede ser distinto para cada $X[k]$) que queremos transmitir.

Ya que el proceso OFDM de dividir en portadoras con $\Delta f = 1/T_s$ es exactamente lo que hace la FFT al tener los coeficientes en frecuencia

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{i 2\pi \frac{k}{N} n}$$

- $X[k]$: La info que transmitimos está en cada uno de los coef de la señal $x[n]$ que tx.
- $e^{i 2\pi \frac{k}{N} n}$: suma de sinusoides ortogonales

ejemplo en el límite para entender conceptos:
si T_s fuera ∞ (tx un único símbolo) la FFT sería la TF continua, y la información estaría transportada individualmente como vector complejo (PSK, QAM, ...) en cada valor puntual de frecuencia en el espectro de la señal tx $x(t)$



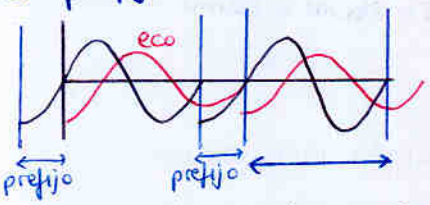
Prefijo cíclico

Sirve para combatir canales selectivos en frecuencia (con ISI → ecos)

ej: sin prefijo y con tiempo de guarda

el receptor analiza un tiempo de símbolo y ve f_0 pura (nº entero de periodos) y una interferencia a f_0 cortada (i.e. no lo ve como f_0 pura)

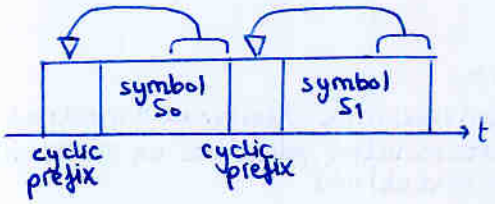
ej: con prefijo

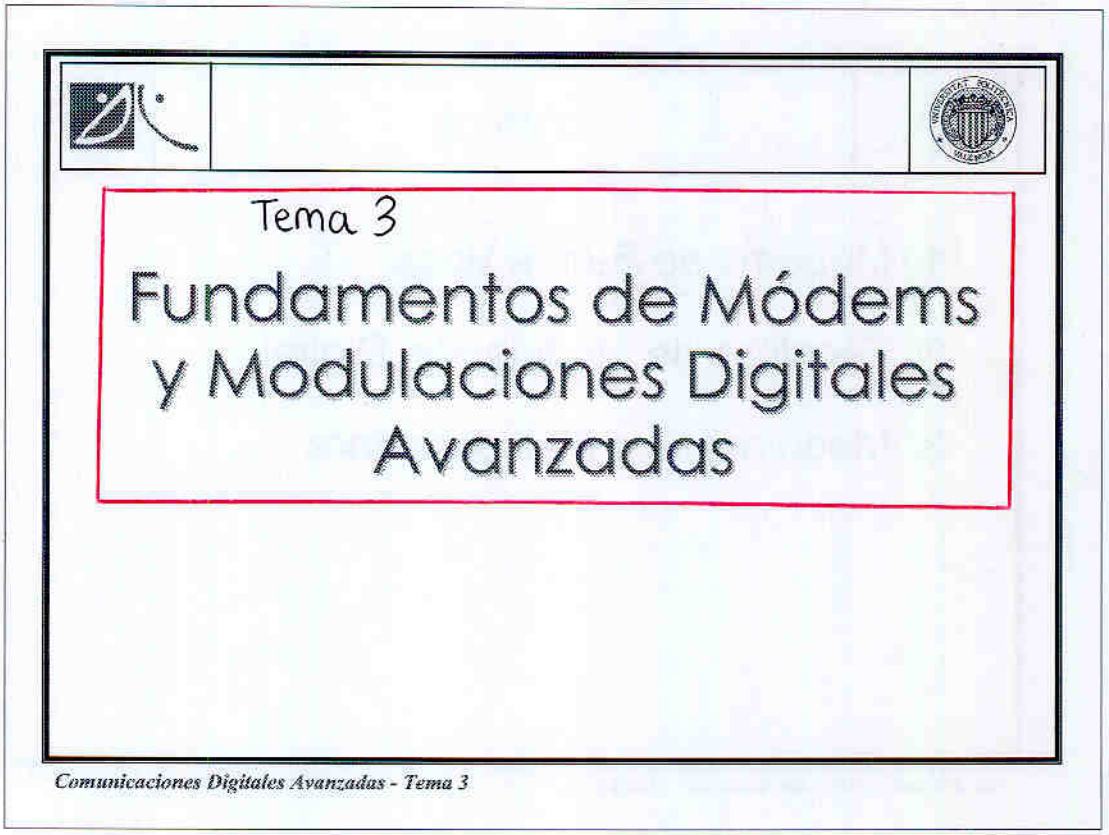


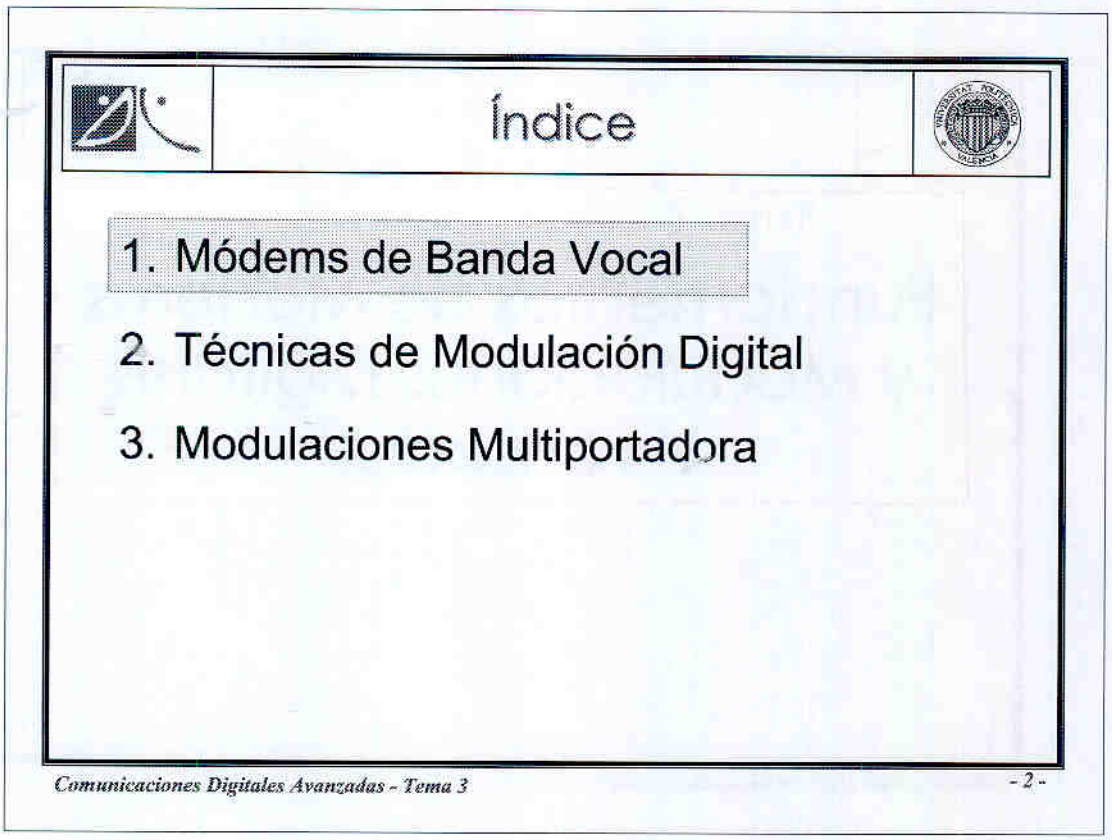
El prefijo ha logrado que el eco esté presente desde el inicio del intervalo. Se logra que en recepción todas las portadoras tengan un número entero de periodos, lo cual permite un correcto análisis y ecualización.

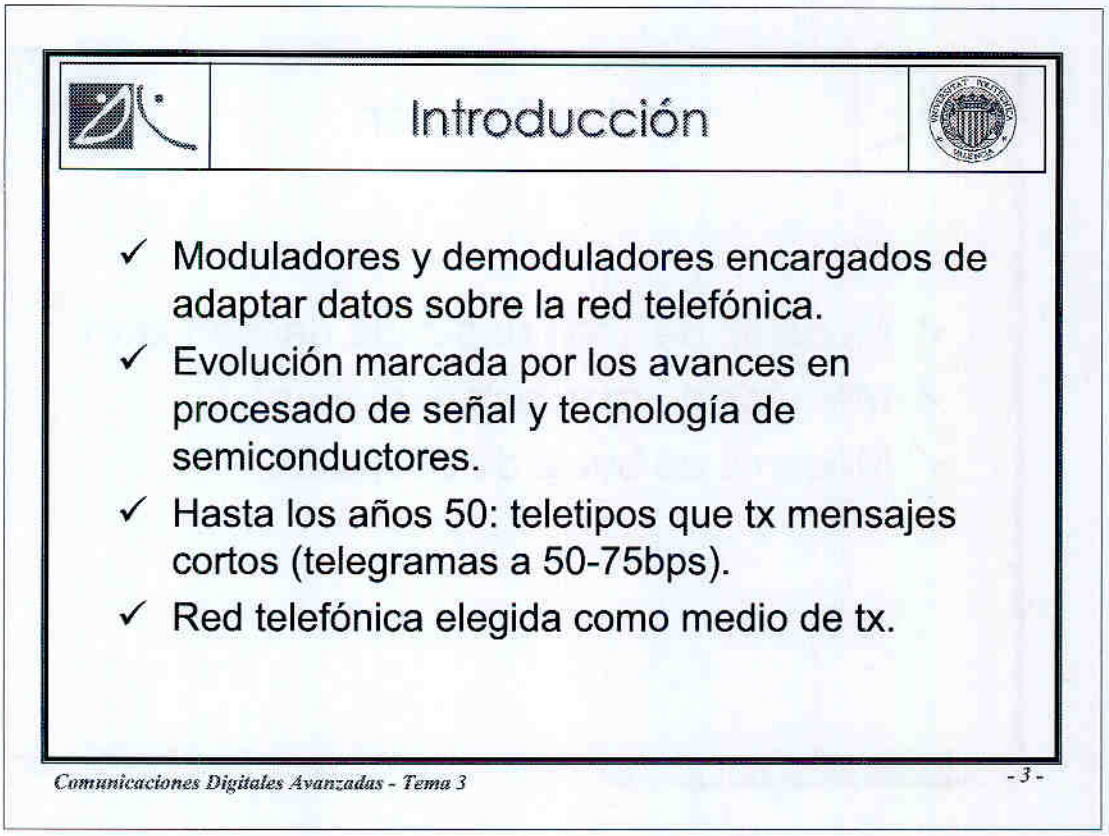
← explicación de andar por casa

- Consiste en la repetición de los últimos símbolos ? de la trama (con una longitud mayor o igual a la longitud del canal)
- En recepción todas las portadoras tienen un nº entero de periodos (simplifica la ecualización)




Tema 3
Fundamentos de Módems y Modulaciones Digitales Avanzadas
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3


Índice
1. Módems de Banda Vocal
2. Técnicas de Modulación Digital
3. Modulaciones Multiportadora
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3
- 2 -



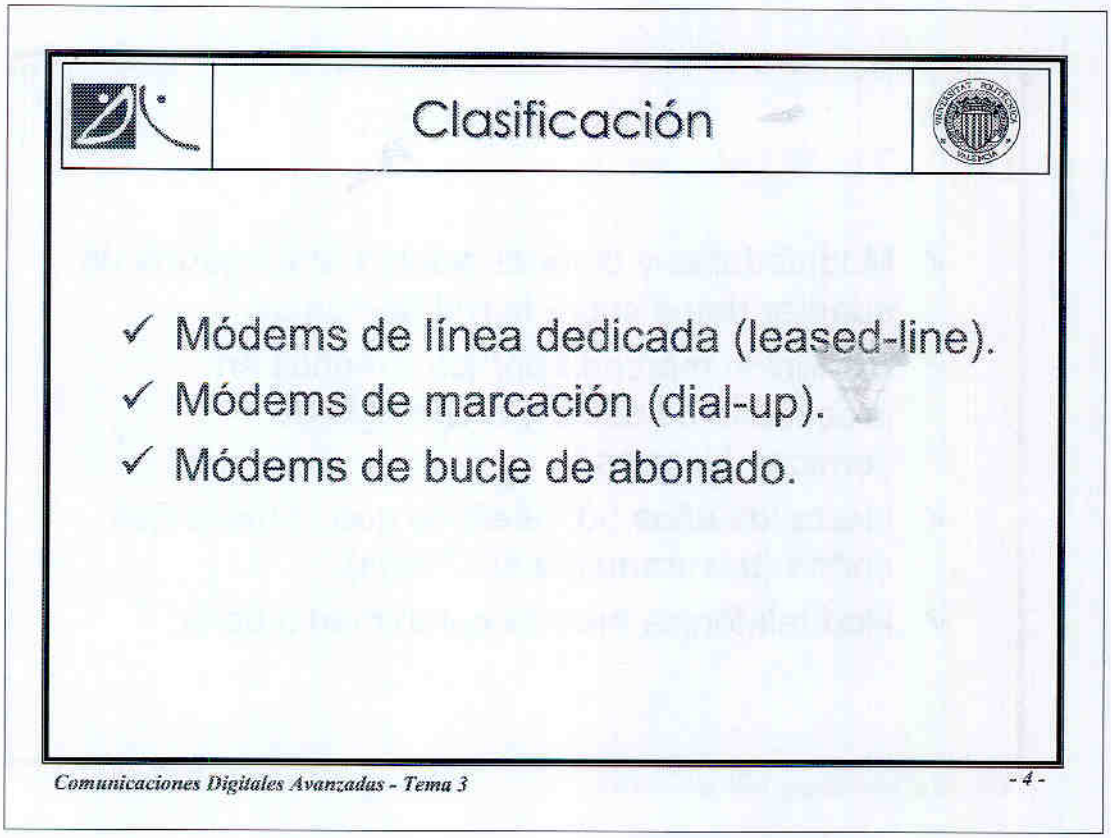
Hasta mediados de los 50 en que aparecen los computadores electrónicos, la mayoría de comunicaciones de datos se realizan mediante terminales electromecánicos denominados teletipos que envían mensajes cortos denominados telegramas.

Más adelante cuando ya aparecen los computadores se pasa a interconectarlos como un valor añadido: para servicios de reserva de billetes de avión, transferencia de datos de contabilidad entre la central de conmutación y empresas remotas.

Se elige la red telefónica como medio de transmisión debido a lo común de sus interfaces y a su ubicuidad.

Se hace necesario construir moduladores para colocar los datos del computador en un canal vocal y un demodulador para recuperar los datos de la señal analógica en el extremo opuesto.

En estas diapositivas se recogen mas de 40 años de evolución en el diseño de estos módems.

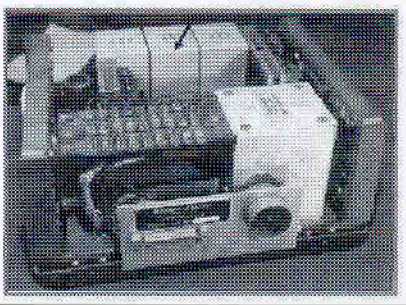

Clasificación
✓ Módems de línea dedicada (leased-line).
✓ Módems de marcación (dial-up).
✓ Módems de bucle de abonado.
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3
- 4 -

Módems leased-line

4 hilos, full-duplex, 2 canales separados.

- *Bell 202*:
  - 1.200 bps, BFSK.
  - Componentes analógicos.
  - Introducción de ecualizador de canal.

Recomendación V.23



Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3 - 5 -

Este módem fue el primero utilizado para interconectar computadores a través de la red telefónica nacional de ATT en USA. Sin embargo, al emplear la modulación BFSK se producía dispersión selectiva en frecuencia debido al canal telefónico y distorsión en señales de banda ancha sobre canal telefónico. De hecho en la actualidad se utiliza FSK pero sólo con anchos de banda menores de 100 Hz.

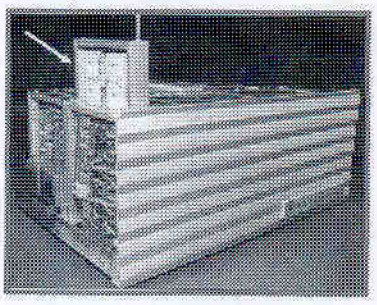
Se diseña de forma que pueda transmitir por diferentes canales de transmisión.

La ITU más adelante diseña una variante en la recomendación V.23.

Este es el estándar empleado en la actualidad para transportar el ID del llamador al llamado en los teléfonos modernos.

Módems leased-line

- Bell 201:
  - Años 60; 4 hilos, full-duplex.
  - QPSK, 2.400 bps.
  - Bucle de sincronismo de portadora.
  - Modo *fall-back:*
    posibilidad de operar a 2.000 bps si el ecualizador es inadecuado para el canal.
    Recomendación V.26



Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3 - 6 -

Aparece en los primeros 60. Fue diseñado por Western Electric para la red ATT.

Utiliza una modulación QPSK para aumentar la velocidad de transmisión a 2400bps, ocupando aproximadamente el mismo ancho de banda que el 202.

Componentes analógicos: Utiliza un bucle de sincronismo de portadora para compensar los offsets en frecuencia debidos al sistema de transmisión telefónico.

La limitación de este módem viene también impuesta por el ecualizador de canal.

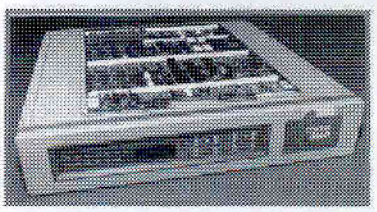
Tiene la propiedad de trabajar en fall back, es decir a la velocidad inferior de 2000 bps en el caso de que el ecualizador sea inadecuado para el canal.

Módems leased-line

- Codex 9600 bps:
  - 16-QAM, v_t=2.400 baud.
  - Ecualizador digital adaptativo.

  Recomendación V.29
- Codex 2660:
  - 256-QAM.
  - R=16.800 bps gracias a codificación de Trellis.

  Recomendación V.33



Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3 - 7 -

A finales de los 60 se abre el mercado a nuevos fabricantes, ya que hasta entonces ATT utilizaba únicamente modems de Western. De esta forma la demanda nueva del mercado y las nuevas tecnologías de Tratamiento Digital de Señales (DSPs) permiten pasar de 2400 a 56000 bps en apenas 30 años (68-98).

Como ejemplo de lo anterior se presenta aquí el Codex 9600 bps 4 hilos, leased-ine, 16 QAM.

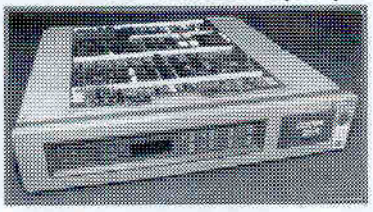
El modem V.29 de 4 hilos ya consigue velocidades de 9600bps. Este modem se modifico para adaptarlo a una nueva aplicación: utilizado en los faxes del grupo 3, sin embargo para poder adaptar la utilidad de marcado, se adapta el modem anterior a 2 hilos en modo simplex.

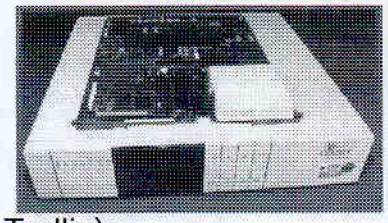
En cuanto a los modems aparecidos en esta nueva etapa destacan los Codex 2660, 2680 y 3600. Utilizan codificación de Trellis que se ha convertido en elemento muy importante de los módems actuales de la banda vocal.

En concreto el estándar V.33 es el mas avanzado en QAM, de 1988. Utiliza TCM con 128-QAM para 14400bps, o 64-QAM para 12000bps.

Módems leased-line

- Codex 2680:
  - 256-QAM.
  - R=19.200 bps (TCM de 64 estados).





- Codex 3600:
  - Años 90.
  - R=24.000 bps (Precodificación Trellis)

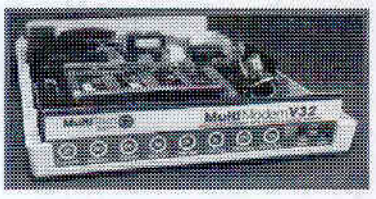
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3 - 8 -

Los últimos 3 módems están diseñados con circuitos integrados de alta escala de integración.

El Codex 3600 utiliza una velocidad de símbolo más elevada para alcanzar una tasa de 24 Kbps.

Módems dial-up

- Aparición PC: comunicación con varios ordenadores remotos.
- Tx. sobre línea telefónica a 2 hilos clásica.
- R_{max}=2.400 bps.
- Módem V. 32:
  - 32-QAM +TCM (novedad).
  - R=9.600, 14.400 y 19.200 bps.
- Módem V.34:
  - V_t entorno a 35K bps.
  - Limitación por ruido cuantificación en conversor AD.



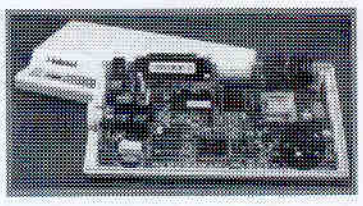
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3 - 9 -

Dada la limitación de velocidad a mediados de los 80, se pretendía migrar la tecnología de los modems de 4 hilos a la línea dial-up para intentar conseguir transmitir en full duplex con 9600 bps e incluso 14400 bps con 2 hilos. En la actualidad esto esta de sobra superado.

De esta forma, el V.29 fue mejorado y adaptado a 2 hilos para conseguir el V.32. La forma básica utiliza una constelación QAM de 16 ptos (8 estados), pero para aumentar la robustez frente a errores de canal puede usar la opción de Trellis con 32 puntos. Este fue el primer modem que utilizo TCM, en 1984.

Módems de bucle de abonado

- Módem V.90:
  - $V_{t\,max}$ = 56 Kbps.
  - Conexión directa a un servidor de acceso que concentra el tráfico de distintos usuarios.
  - Transmisión PCM/TDM.
  - Introducción líneas digitales:
    - *Módem V.90 analógico.*



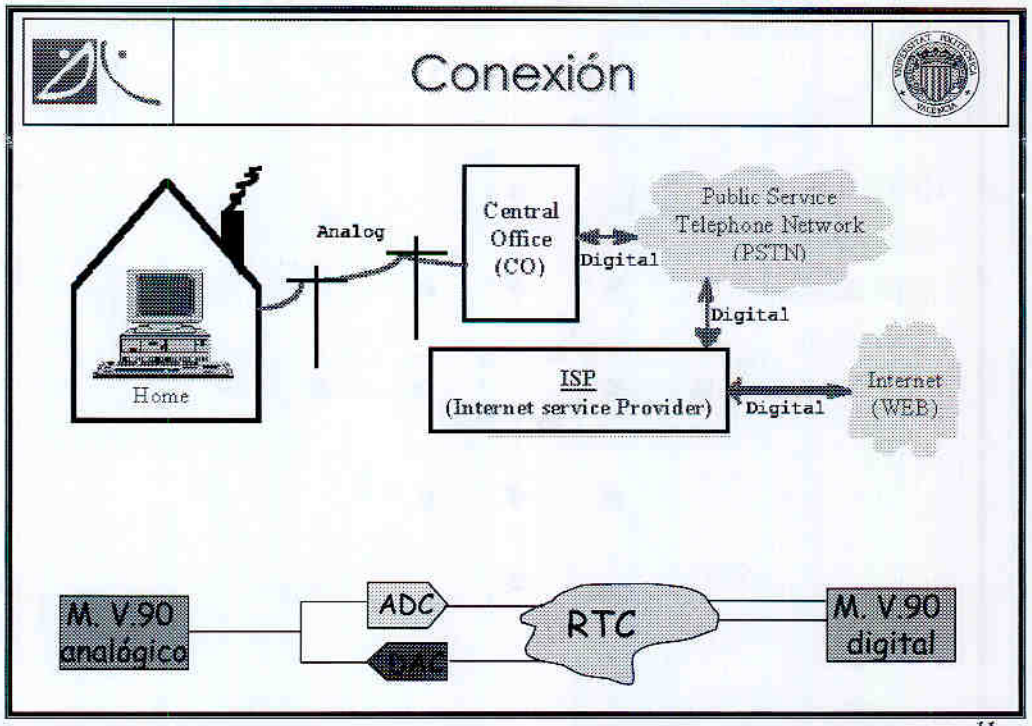
- *Módem V.90 digital:* no existe conversión AD y por tanto permite mayores velocidades.

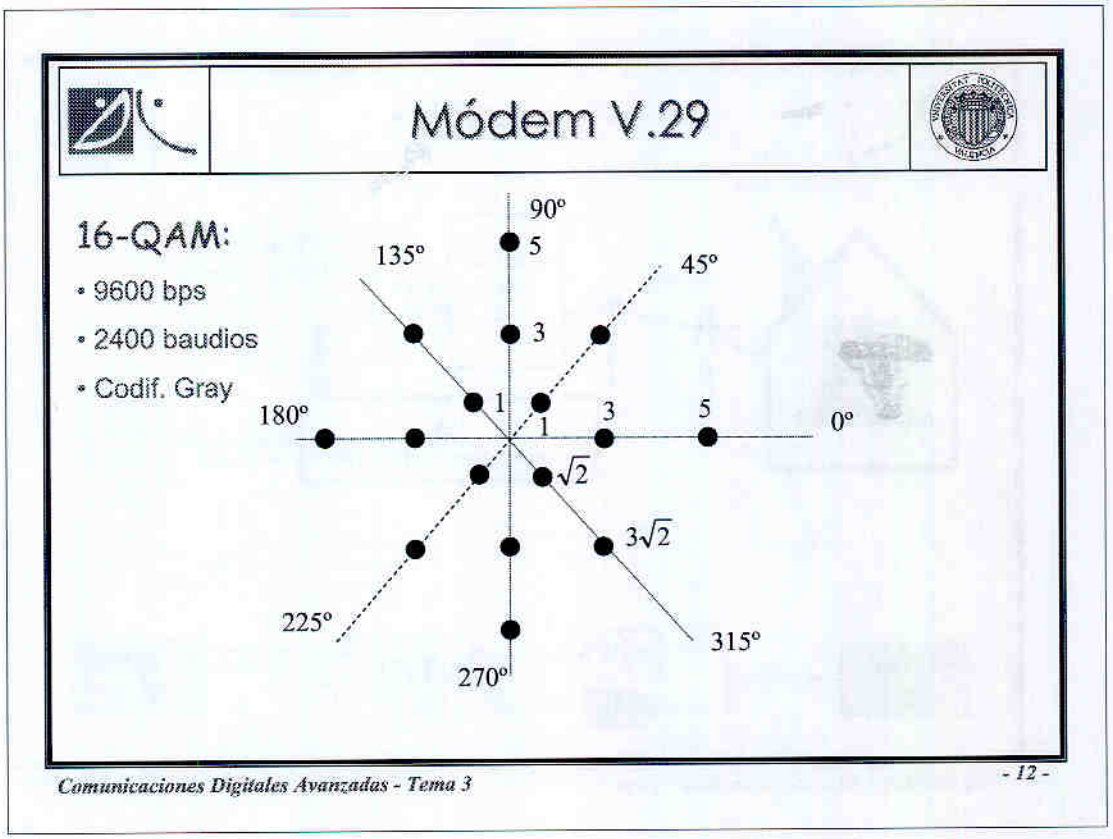
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3 - 10 -

El módem V.34 se optimiza cuando ambos extremos están conectados a líneas analógicas.

En el caso del V.90, la red telefónica migra a líneas digitales, aprovechando en el canal bidireccional que la conversión A/D tiene errores de cuantificación pero la otra no. V.90 conmuta a V34 si detecta que el extremo opuesto no soporta la norma, básicamente supone que detecte conversión A/D.

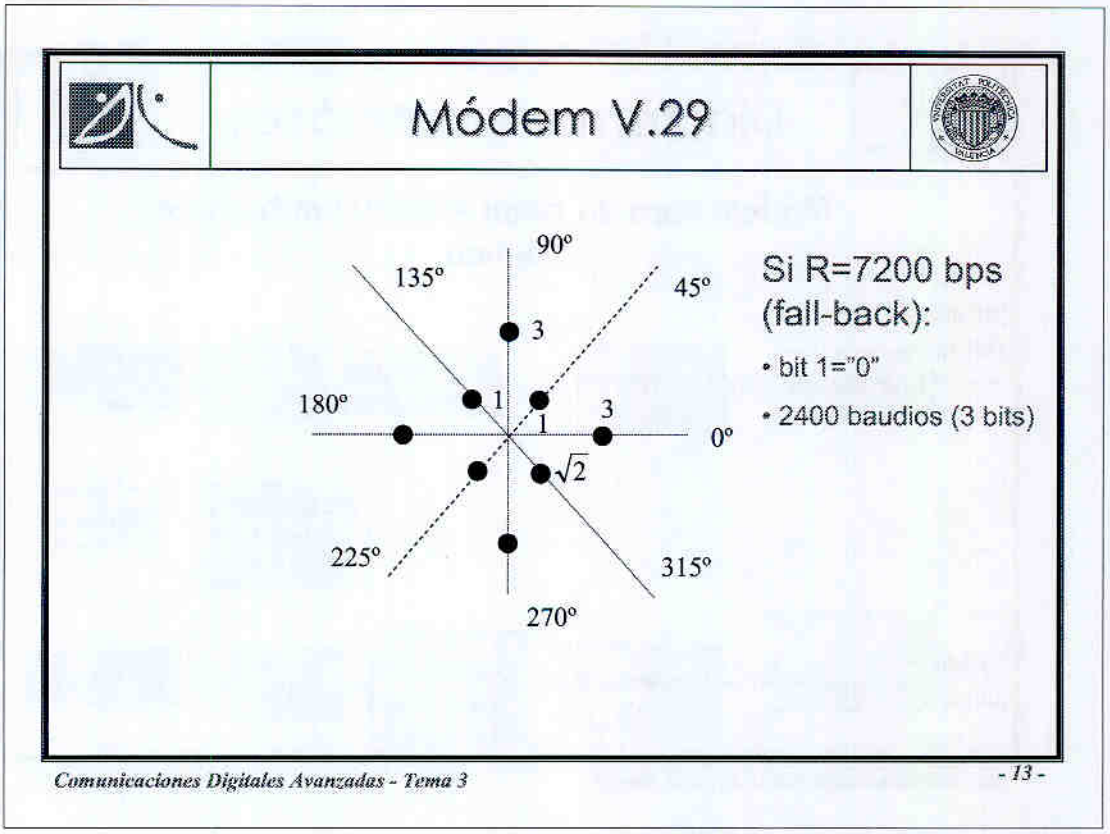
Aplicaciones de Internet y servicios on-line. Se diseña por tanto para conexiones que son en un extremo digital, y una única conversión A/D.


Conexión
Analog
Central Office (CO)
Digital
Public Service Telephone Network (PSTN)
Digital
Home
ISP (Internet service Provider)
Digital
Internet (WEB)
M. V.90 analógico
ADC
DAC
RTC
M. V.90 digital
Comunicaciones Digitales Avanzadas - Tema 3
- 11 -

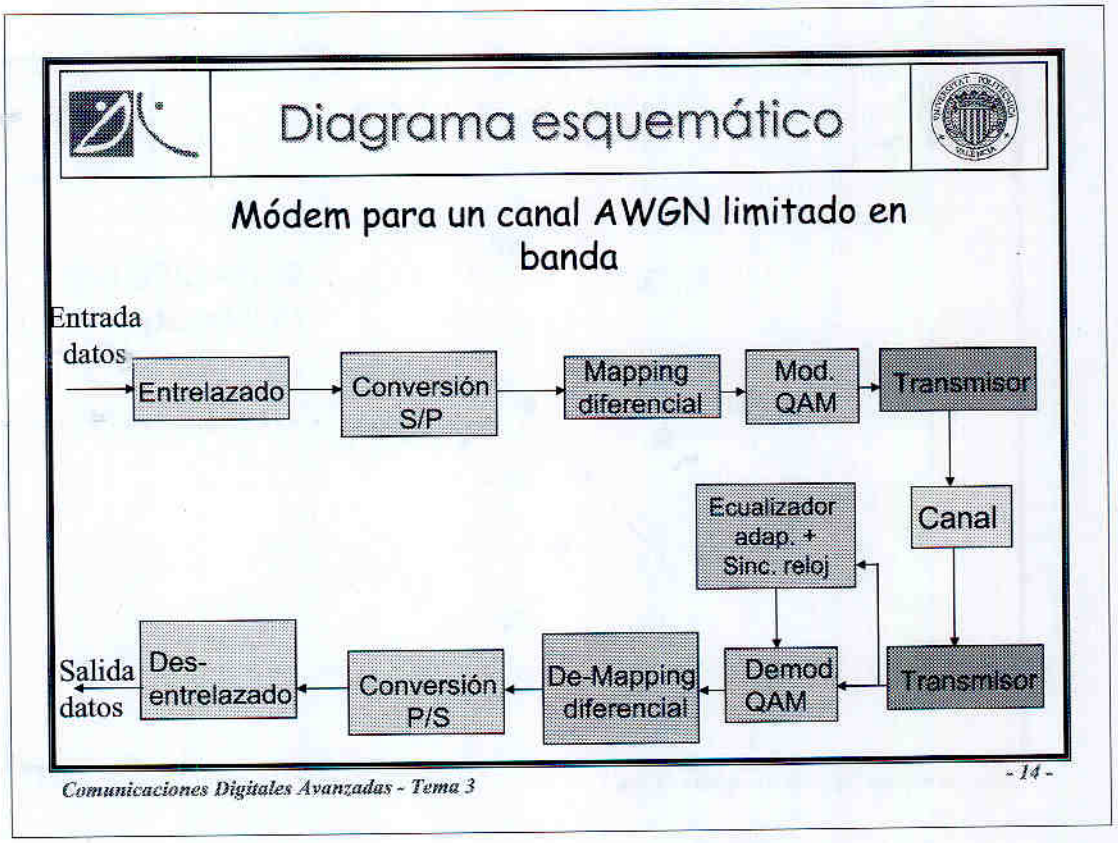


Ejemplo de la constelación de un módem de banda vocal (16-QAM):

Se emplea codificación Gray. El primer bit de cada símbolo determina la amplitud de la señal a transmitir, pero esta depende también de la fase. Se usan amplitudes diferentes: 3 y 5 para las fases de 0, 90, 180 y 270 grados, mientras que para 45, 135, 225 y 315 grados se usan como amplitudes sqrt(2) y 3sqrt(2).



Si se trabaja a menor velocidad debido a las condiciones del canal, se reduce la tasa binaria y el número de bits de la constelacion.



Como resumen se muestra el esquema de los diferentes procesos que se realiza en la modulación y demodulación de los datos al utilizar un módem de banda vocal.