ETSI Telecomunicación

Cálculo Diferencial

Apuntes de Pak

Cálculo Diferencial

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 1er curso
Curso 2003/2004

Contenido:

Resumen de series numéricas
Apuntes de la asignatura
Resumen de la asignatura de los profesores con ejercicios

Nota

Al final de los apuntes incluyo un resumen de la asignatura publicado por los profesores, seguido de los ejercicios de ese boletín resueltos por mí.
Los resolví con prisa pocos días antes del examen de la asignatura, por lo tanto están en sucio, algunos ejercicios están incompletos, y otros están resueltos incorrectamente. No obstante he creído que podían ser de ayuda y merecía la pena incluirlos.

Fecha de última actualización: 2 Agosto 2007

$a_n = a_1 r^{(n-1)}$

$S = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

SERIES NUMERICAS
Referencia Rápida

Criterios de convergencia para series de términos no negativos

- Criterio de comparación (i)

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leqslant b_n \quad \forall n \geqslant n_0 \\ \sum b_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

- Criterio de comparación (ii)

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l \geqslant 0 \qquad \begin{array}{l} l = 0 \Rightarrow \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ l = +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum b_n \text{ converge} \\ l > 0 \Rightarrow \text{tienen mismo caracter} \end{array}$$

- Criterio de Condensación de Cauchy

$$\sum a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

- Criterios de la raiz y del cociente

$$\begin{array}{l} \lim \sqrt[n]{a_n} = l \\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \end{array} \qquad \begin{array}{l} l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ l = 1 \Rightarrow \text{no se puede afirmar nada} \end{array}$$

Criterios de convergencia para series de términos cualesquiera

- Criterio de Leibniz (serie alternada)

$$\left.\begin{array}{l} a_n = (-1)^{n(+1)} b_n \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

- Criterio de Dirichlet

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\} \text{ tiene sumas parciales } S_n \text{ acotadas} \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n b_n \text{ converge}$$

- Criterio de Abel

$$\left.\begin{array}{l} \sum a_n \text{ converge} \\ \{b_n\} \text{ monotona acotada (converge)} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n b_n \text{ converge}$$

Sumación de series

- Series telescópicas

$$\sum b_n - b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

- Descomposición en fracciones simples

$\sum r^n$ converge $\Longleftrightarrow |r|<1 \qquad S = \frac{r}{1-r}$

$\sum \left(\frac{1}{s}\right)^n$ converge $\Longleftrightarrow |s|>1$

$\sum \left(\frac{1}{n}\right)^p$ converge $\Longleftrightarrow |p|>1$

TEMA 1. SUCESIÓN. SERIES NUMÉRICAS

• Principio de Inducción

Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$

Se prueba que:

1) $P(1)$ es cierta
2) si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ es cierta

$\Rightarrow P(n)$ es cierta para todo $\mathbb{N}$

Ejemplos:

(1) Probar $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

1) $n=1 \rightarrow 1 = \frac{1(2)}{2}$ ✓

2) suponer $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \leftarrow$ Hipótesis de Inducción (HI)

para $n+1$ $\quad 1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\stackrel{H.I.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

$$n^2+n+2n+2 = n^2+n+2n+2 \quad \forall n \ ✓✓$$

• Sucesiones

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una regla/función

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow x_n$$

Es una colección <u>numerable</u> (hay tantos elementos, repetidos o no, como numeros naturales)

ej. Colección no numerable $\{\frac{1}{t},\ t \in]0,1[$

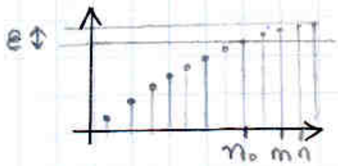
no es una sucesión

sus ∞ números $> \infty\ n \in \mathbb{N}$

• Regularidad de sucesiones (sucesiones de Cauchy)

• Una sucesión $\{a_n\}$ es <u>regular (o de Cauchy)</u> si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$



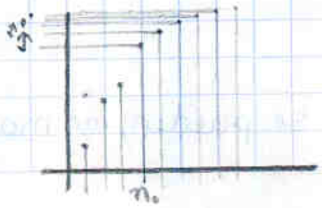
a_n convergente $\Leftrightarrow$ a_n es de Cauchy

a_n de Cauchy $\Rightarrow$ a_n acotada

• Una sucesión $\{a_n\}$ es <u>contractiva</u> si:

a_n contractiva $\Rightarrow$ a_n de Cauchy

$$\exists k \in [0,1[\text{ y } \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq k\,|a_{n+1} - a_n| \quad \forall n \geq n_0$$



Progresión aritmética

Una progresión aritmética de razon r se define

→ por recurrencia: a_1
$a_n = a_{n-1} + r$

→ fórmula explícita $a_n = a_1 + (n-1)r$ (*)
si no depende de los anteriores

· Suma de una progresión aritmética $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ (*)

$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

en particular: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (*)

Progresión geométrica

Una progresión geométrica de razon r se define

→ por recurrencia: a_1
$a_n = a_{n-1} \cdot r$

→ fórmula explícita: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$ (*)

· Suma de una progresión geométrica. $S_n = \frac{a_1 - r \cdot a_n}{1 - r} = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$ (*)

(*): Se pueden, es más, debes, probarlas por inducción.

Prueba por inducción de las fórmulas anteriores - Progresión Aritmética

- fórmula explícita de una progresión aritmética a_1, $a_n = a_{n-1} + r$

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$$

1) $a_2 = a_1 + 1 \cdot r = a_1 + r$ ✓

2) supongamos $a_{n+1} = a_1 + n \cdot r \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1) \cdot r + r$$
$$= a_1 + (n-1+1)r$$
$$a_{n+1} = a_1 + nr$$ ✓

- suma de $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1) $n=1$ $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

2) supongamos $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\underbrace{\boxed{1+2+\ldots+n}}_{\text{Hipótesis de inducción}} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 2n + n + 2$$ ✓

- suma de una progresión aritmética de razon r

$$S = n \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

1) $a_1 = 1 \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1$ ✓

2) supongamos: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \frac{(a_1 + a_n)}{2}$

$$\boxed{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + a_{n+1} = (n+1) \frac{(a_1 + a_{n+1})}{2}$$

Hipótesis de inducción

$$n \frac{a_1 + a_n}{2} + a_{n+1} = (n+1) \frac{(a_1 + a_{n+1})}{2}$$

$$n \frac{a_1 + (a_{n+1} - r)}{2} + a_{n+1} = \frac{na_1 + na_{n+1} + a_1 + a_{n+1}}{2}$$

$$na_1 + na_{n+1} - nr + \boxed{2a_{n+1}} = na_1 + na_{n+1} + a_1 + a_{n+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2a_{n+1} &= a_{n+1} + a_{n+1} \\ &= a_{n+1} + a_1 + n \cdot r \end{aligned}}$$

$$na_1 + na_{n+1} - \cancel{nr} + \boxed{a_{n+1} + a_1 + \cancel{nr}} = (n+1)a_1 + (n+1)a_{n+1}$$

$$(n+1)a_n + (n+1)a_{n+1} = (n+1)a_1 + (n+1)a_{n+1}$$ ✓

Prueba por inducción de las fórmulas anteriores - Progresión geométrica

a_1
$a_n = a_{n-1} \cdot r$

- fórmula explícita $\quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

1) $a_1 = a_1 \cdot r^{1-1} = a_1$ ✓

2) supongamos $\quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^n$$
$$a_{n+1} = \boxed{a_1 \cdot r^{n-1}} \cdot r \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$
$$a_{n+1-1} \cdot r = a_n \cdot r$$
$$a_n \cdot r = a_n \cdot r$$ ✓

- Suma $\quad S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$

1) $S_1 = \dfrac{a_1 - a_1 \cdot r}{1-r} = \dfrac{a_1 \cancel{(1-r)}}{\cancel{1-r}} = a_1$ ✓

2) supongamos $\quad S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 - a_{n+1} \cdot r}{1-r}$$

Hipótesis de Inducción

$$\boxed{S_n} + a_{n+1} = \frac{a_1 - a_{n+1} \cdot r}{1-r}$$
$$\frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r} + a_{n+1} = \frac{a_1 - a_{n+1} \cdot r}{1-r}$$
$$a_1 - a_n r + a_{n+1} - r a_{n+1} = a_1 - a_{n+1} r$$
$$a_1 - \cancel{a_{n+1}} + \cancel{a_{n+1}} - r a_{n+1} = a_1 - a_{n+1} r$$
$$a_1 - r a_{n+1} = a_1 - r a_{n+1}$$ ✓

tb se puede demostrar la suma directamente

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$r\, S_n = r a_1 + r a_2 + \dots + r a_n$$
$$r\, S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}$$

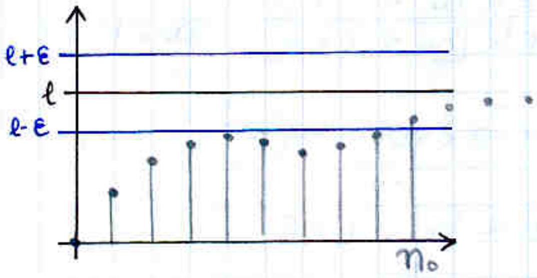
$$S_n - r S_n = (a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{\dots} + \cancel{a_n}) - (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{\dots} + \cancel{a_n} + a_{n+1})$$
$$S_n - r S_n = a_1 - a_{n+1}$$
$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

• Límite de una sucesión

• Definición de límite

Se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite (es convergente a) $\ell \in \mathbb{R}$ (se denota $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$ ó $a_n \to \ell$) si:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon}$$



desdoblando el módulo

$$-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$$
$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Todos los términos de la sucesión excepto quizá un número finito $(a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1})$ están en el intervalo $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$

$$a_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\quad \forall n \geq n_0$$

• Propiedades

si tenemos $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
$\qquad\qquad\;\; b_n \to t \in \mathbb{R}$

Nota

si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $x = a$
sea $\{x_n\} \to a$
$f(x_n) \to f(a)$
es decir
$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ ej $\lim \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \operatorname{sen} \lim \frac{1}{n} = 0$

↳ $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha \ell + \beta t$

↳ $|a_n| \to |\ell|$ $(\lim |a_n| \to |\lim a_n|)$

↳ $a_n \cdot b_n \to \ell \cdot t$

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{t} \quad t \neq 0$

algún b_n podría ser cero! Estas propiedades se estudian a partir de cierto término

↳ $a_n^{b_n} \to \ell^t$ si $a_n > 0$

↳ si $\ell = 1,\ t = \pm\infty$ $\boxed{\lim a_n^{b_n} = (1^\infty) = e^{\lim (a_n - 1) b_n}}$

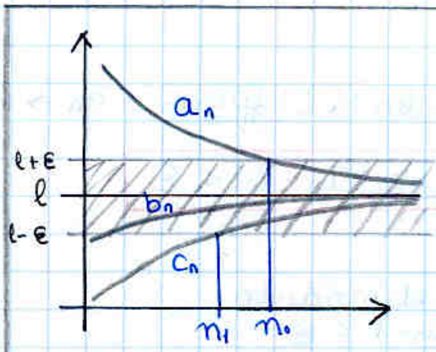
↳ si a_n converge, el límite es único

Demostración por reducción al absurdo.
Supongamos que a_n converge a 2 límites (ej 1, -1)
para $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$n \geq n_0$
$a_n \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\cap]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[= \emptyset$
$a_n \in \emptyset$ IMPOSIBLE

- **Criterio de emparedado**

$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, si $\begin{matrix} a_n \to \ell \\ c_n \to \ell \end{matrix} \implies b_n \to \ell$



Demostración:

$\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\exists n_1 / n \geq n_1 \Rightarrow |c_n - \ell| < \varepsilon$

$n \geq n_0 \quad \boxed{\ell - \varepsilon < a_n} < \ell + \varepsilon$

$n \geq n_1 \quad \ell - \varepsilon < \boxed{c_n < \ell + \varepsilon}$ $\quad \boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$

$n_2 = \max(n_0, n_1)$

$n \geq n_2 \quad \ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$

- **Corolario**

si $a_n \to 0$ y $\{b_n\}$ está acotada

$a_n \cdot b_n \to 0$

Demostración:

como $\{b_n\}$ está acotada

$|b_n| \leq K$

$|a_n \cdot b_n| \leq K \cdot |a_n|$

$0 \leq |a_n \cdot b_n| \leq K \cdot |a_n|$

como $a_n \to 0 \Rightarrow K \cdot |a_n| \to 0$

$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq |a_n \cdot b_n| \leq \underset{\downarrow \atop 0}{K \cdot |a_n|}$

criterio de emparedado

$|a_n \cdot b_n| \to 0$

$\Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$

Nota

$|a_n| \to \ell \Leftarrow$

si $\ell = 0 \Rightarrow a_n \to 0$

si $\ell \neq 0 \not\Rightarrow a_n \to \ell$

ej $\{(-1)^n\}$ no tiene límite

sin embargo $|(-1)^n| \to 1$

- **Teoremas**

→ Toda sucesión creciente (resp. decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente) es convergente

→ Toda sucesión creciente (resp. decreciente) que no está acotada superiormente (resp. inferiormente) tiende a $+\infty$ (resp $-\infty$)

→ Sea $\{a_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- **Álgebra de límites divergentes**

(i) $a_n \to +\infty \quad b_n$ acotada

$a_n + b_n \to +\infty$

(ii) $a_n \to +\infty \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$

$b_n \to +\infty$

(iii) $a_n \to +\infty \quad \exists \alpha > 0$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \alpha \leq b_n \ \forall n \geq n_0$

$a_n \cdot b_n \to +\infty$

Infinitos e Infinitésimos

→ Infinito

$\{a_n\}$ se dice que es un infinito si $a_n \to +\infty$ ó $-\infty$ (diverge a infinito)

Definición: $\{a_n\}$ diverge a infinito

$$a_n \to \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \quad \text{si: } \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n \begin{matrix} \geq M \\ \leq M \end{matrix} \quad \forall n \geq n_0$$

ejs: $a_n = n \quad a_n = \ln(n) \quad a_n = n^n \quad a_n = n!$

↳ **Fórmula de Stirling**

Da una aproximación a la sucesión $n!$

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1}$$

→ Infinitésimos

se dice que $\{a_n\}$ es infinitésimo si $a_n \to 0$

ejs: $a_n = \frac{1}{n} \quad a_n = \ln(\frac{1}{n}+1) \quad a_n = \text{sen}(\frac{1}{n}) \quad a_n = \tan(\frac{1}{n})$

↳ **Infinitésimos equivalentes**

En los límites $n \to \infty$ se pueden sustituir infinitésimos equivalentes cuando tengo productos y divisiones (sumas y restas no)

$$a_n \sim \text{sen}(a_n) \sim \ln(1+a_n) \sim e^{a_n} - 1 \sim \tan(a_n)$$

$$1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2} \qquad \cos a_n \sim 1 - \frac{a_n^2}{2}$$

Ejemplos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\, a_n}{e^{a_n}-1} \quad (a_n \to 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{\log(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

· Número e

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sea $a_n \to 1$

$b_n \to \infty$

$$\lim a_n^{b_n} = e^{(a_n-1)b_n}$$

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim \left[1-1+\lim f(x)\right]^{g(x)}$$

$$= \lim \left[1+\frac{1}{1/f(x)-1}\right]^{g(x)} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{1/f(x)-1}\right)^{\frac{1}{f(x-1)}}\right]^{(f(x)-1)g(x)}$$

$$= \lim e^{(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim (f(x)-1)g(x)}$$

Ejercicios: Cálculo de Límites

- Casos Básicos

↳ suma o resta de raíces: multiplicar y dividir por conjugado

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{5n+3}-\sqrt{3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3-3n}{\sqrt{5n+3}+\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{\sqrt{5n+3}+\sqrt{3n}} = +\infty$

↳ división de polinomios: división de los coeficientes de la x de mayor grado

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n^2}{5+1/n+2/n^2} = \frac{3}{5}$

(3) $\lim \frac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}} = \lim \frac{\sqrt{n^2(1-3/n^2)}}{\sqrt[3]{n^3(1+1/n^3)}} = \lim \frac{\cancel{n}\sqrt{1-3/n^2}}{\cancel{n}\sqrt[3]{1+1/n^3}} = 1$

- ↳ división de logaritmos

muy parecido a los polinomios, esta vez lo que cuenta no es el coeficiente sino la potencia de x.

(4) $\lim \frac{\ln(2+3n^4)}{1+\ln n^2} = \lim \frac{\ln\left[n^4\left(\frac{2}{n^4}+3\right)\right]}{1+2\ln n} = \lim \frac{4\ln n+\ln\left(\frac{2}{n^4}+3\right)}{1+2\ln n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{\ln\left(\frac{2}{n^4}+3\right)}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}+2} = \frac{4}{2}$

(5) $\lim \frac{\ln(5n^3+4n-1)}{\ln(n^2+7n-5)} = \lim \frac{\ln\left[n^3\left(5+4/n^2-1/n^3\right)\right]}{\ln\left[n^2\left(1+7/n-5/n^2\right)\right]} = \lim \frac{\ln n^3 + \cancel{\ln(5+4/n^2-1/n^3)}^{0}}{\ln n^2 + \cancel{\ln(1+7/n-5/n^2)}_{0}}$

$= \lim \frac{3\cancel{\ln n}}{2\cancel{\ln n}} = \frac{3}{2}$

↳ el logaritmo se desprecia frente a una raíz $\quad \lim \frac{\ln n^a}{\sqrt[b]{n}} = 0 \quad a,b\in\mathbb{R}$

(6) $\lim \frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = 0$

- Criterio del emparedado (y su corolario)

(7) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{2+\operatorname{sen} n} = 0$

$1 \leq 2+\operatorname{sen}(n) \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\operatorname{sen}(n)} \leq 1$

$\underset{\downarrow 0}{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{3}} \leq \frac{\operatorname{sen} 1/n}{2+\operatorname{sen} n} \leq \underset{\downarrow 0}{\operatorname{sen} 1/n}$

(8) $\lim_{n\to\infty} \underset{\searrow 0}{\frac{1}{n!}} \underset{\searrow \text{acotado}}{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = 0 \qquad \underset{\downarrow 0}{0} \leq \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n!} \leq \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n!}}$

$\boxed{\text{Usando } \lim a_n^{b_n} = (1^{\infty}) = e^{\lim (a_n-1) b_n}}$

(a) $\lim \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}} = \lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^2$

(10) $\lim \left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} (=1^{\infty}) = e^{\lim \left(\frac{n^2+5}{n+2}\right)\left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}-1\right)}$

$= e^{\lim \left(\frac{n^2+5}{n+2}\right)\left(\frac{7n-7}{n^2-4n+2}\right)} = e^{\lim \frac{7n^3-7n^2+35n-35}{n^3-2n^2-6n+4}} = e^7$

(11) $\lim \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$

$$\boxed{\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \xrightarrow[L'H]{} \lim \frac{1/n+1}{1/n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[L'H]{} \lim \frac{1}{1} = 1}$$

$= e^{\lim \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right)(n \ln n)}$

$= e^{\lim \left(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\cancel{\ln n}}\right)(n \cancel{\ln n})} = e^{\lim n(\ln(n+1)-\ln n)}$

$= e^{\lim n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = e^{\lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{\lim \ln e} = e$

(12) $\lim \left(n \ln \sqrt{\frac{1+1/n}{1-1/n}}\right) = \lim \ln\left(\sqrt{\frac{1+1/n}{1-1/n}}\right)^n = \lim \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right)^n$

$= \lim \frac{1}{2}\left[\underbrace{\ln \underbrace{(1+1/n)^n}_{e}}_{1} - \underbrace{\ln(\underbrace{1-1/n}_{1+\frac{1}{-n}})^n}_{+\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}}_{e}\ \to\ 1}\right] = \lim \frac{1}{2}(2) = 1$

(13) $\lim \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}\right)}$

$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}} = (1^{\infty}) = e^{\lim \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right)} = e^{\lim \frac{\sqrt{n+1}}{2n}+\frac{\sqrt{n}}{2n}} = e^0 = 1$

$\boxed{\lim \sqrt[n]{c} \text{ o } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{(0^\infty)} \text{tomando ln y exp} = \lim e^{\ln \sqrt[n]{n}} = \lim e^{\frac{\ln n}{n}} = 1}$

(14) $\lim_{n\to\infty} (2+3n^4)^{\left(\frac{1}{2\ln n}\right)} = (\infty^0) = e^{\ln\left(\lim (2+3n^4)^{\frac{1}{2\ln n}}\right)} = e^{\ln \lim \cancel{\frac{2+3n^4}{2\ln n}}}$ incorrecto! cuidado

$= e^{\lim(\ln(2+3n^4)^{\frac{1}{2\ln n}})} = e^{\lim \frac{\ln(2+3n^4)}{\ln n^2}} = e^{4/2} = e^2$

(15) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n^2+n+1} = (0^\infty) = e^{\lim \ln \sqrt[n^2]{n^2+n+1}} = e^{\lim \frac{\ln(n^2+n+1)}{n^2}}$

$= e^0$

$\ln(n^2+n+1)$ se desprecia frente a alguien tan poderoso como n^2 $\to 0$

(16) $\lim_{n\to\infty} (5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\ln(n^2+7n-5)}} = (0^\infty) = e^{\lim \ln (5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\ln(n^2+7n-5)}}}$

$= e^{\lim \frac{\ln(5n^3+4n-1)}{\ln(n^2+7n-5)}} = e^{\lim 3/2} = e^{3/2}$

→ $\boxed{\text{Fórmula de Stirrling} \quad n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$

incorrecto! cuidado

(17) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n} = \lim \left(\frac{\cancel{2n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right) = \lim \left(\frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{\cancel{n^n}\cancel{e^{-n}}\sqrt{2\pi n}}\right)^{1/n}$

$= \frac{4^n e^{-1}(\sqrt{2})^{1/n}}{1} = +\infty$

(18) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim \frac{\cancel{n^n} e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{\cancel{n^n}} = \lim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0$

(19) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} e^{-1}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} = \lim \frac{e}{(\sqrt{2\pi n})^{1/n}}$

$= \lim \frac{e}{e^{\ln(\sqrt{2\pi n})^{1/n}}} = \lim \frac{e}{e^{\frac{\ln\sqrt{2\pi n}}{n}}} = \lim \frac{e}{e^0} = 1$

→ $\boxed{\text{Otras formas}}$

(20) $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n!}$ sea $a_n = (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n!}$

$|a_n| = \frac{\ln n}{n!} \to 0$

si $|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$

progresión aritmética de razón r

(21) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\dots+n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$= \lim \frac{(n+1)}{2n} = \lim \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Acotación y monotonía

los 'si' en una definición son equivalentes a 'si y sólo si' de una proposición

Definición: Sucesión acotada

$\{a_n\}$ es sucesión acotada (superior e inferiormente) si:

$$\exists A, B \in \mathbb{R} \mid A \leq a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Observación:

$\{a_n\}$ está acotada $\Longleftrightarrow \exists K > 0 \mid |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$A \leq a_n \leq B$

Demostración

- si $|a_n| \leq K$
  $-K \leq a_n \leq K$
- si $A, B > 0$: $|a_n| \leq |B|$; si $A<0, B>0$: $|a_n| \leq \max(|A|, |B|)$; si $A<0, B<0$: $|a_n| \leq |A|$

Ejemplos de sucesión acotada

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{\operatorname{sen}(n)\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

Definición: Monotonía

$\{a_n\}$ es monótona $\begin{matrix}\text{creciente}\\ \text{decreciente}\end{matrix}$ si: $\quad a_n \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Proposición: $\exists \lim \{a_n\} \longrightarrow \{a_n\}$ está acotada

$\not\longleftarrow$

si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces está acotada

Demostración:

sea $a_n \to \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ (Def. Límite)

$|a_n| = |(a_n - \ell) + \ell| \leq |\ell| + \boxed{|a_n - \ell|}$

$|a_n| \leq |\ell| + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \ \forall \varepsilon > 0 \quad \to$ acotada $\forall n \geq n_0$

$\forall n < n_0 \quad$ Sea $M = \max \underbrace{\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}}$

número finito de números de los cuales se puede sacar el mayor en módulo.
Es la 'ventaja' de los $\mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \max(M, |\ell| + \varepsilon) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ acotada

¡Nota!

$\{a_n\}$ acotada $\not\Longrightarrow \{a_n\}$ tiene límite

ej $\quad a_n = (-1)^n \to$ acotada y sin límite

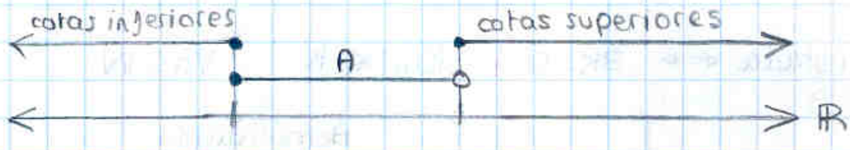
· **Definición cota superior**

sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente

K es una cota superior si : $\exists K \in \mathbb{R} \mid x \leq K \quad \forall x \in A$

ejemplo: $1, 7, 23, \pi, \frac{1946}{78}, 1000, \dots$: son cotas superiores de $A = [0,1[$

Cota Inferior K es cota inferior si $x \geq K \quad \forall x \in A$



· **Axioma del Supremo** un axioma básico, junto con el principio de inducción, que hace posible el cálculo.

si $A \neq \emptyset$ acotado superiormente
entonces posee supremo $x_0 = \sup A$

· **Definición supremo**

Se llama supremo de un conjunto A acotado superiormente a la menor, si existe, de las cotas superiores

- Proposición $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente

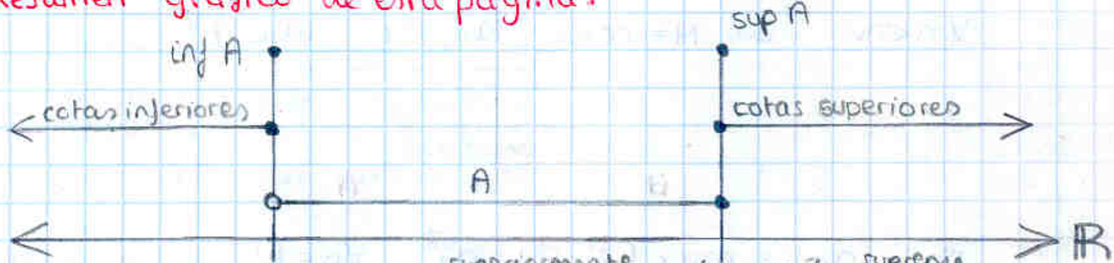
$$x_0 = \sup A \iff \begin{cases} x \leq x_0 \quad \forall x \in A \\ x_0 - \varepsilon \neq \text{cota superior} \quad \forall \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Dicho más matemáticamente:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \mid x_0 - \varepsilon < x$

· **Definición Infimo**
la mayor de las cotas inferiores
La proposición anterior se cumple de manera similar.

Observación: sea $A \subset \mathbb{R}$, $-A = \{-x,\ x \in A\}$ A acotado sup. $\iff$ $-A$ acotado inf
$\inf(-A) = -\sup(A)$

Resumen 'gráfico' de esta página:



A puede estar acotado sólo superiormente / inferiormente y tener sólo supremo / ínfimo

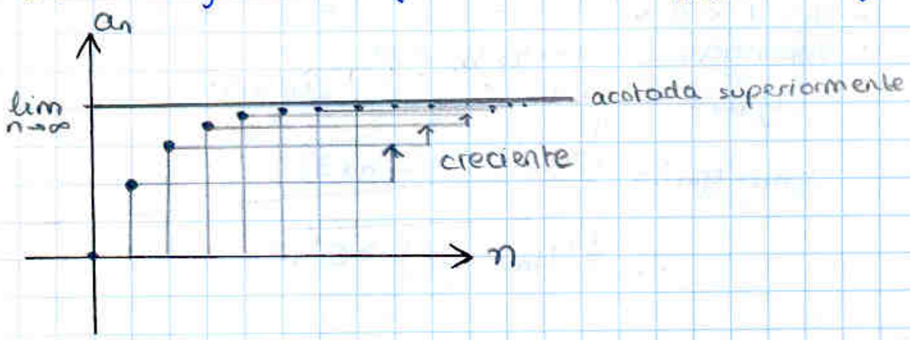
ej: El supremo de $A = \{1 - \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es 1

· Teorema de la convergencia monótona

$\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

similarmente con el ínfimo:

$\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente $\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$



Nota:

- si $A \leq a_n < B$ y $a_n \to \ell \Rightarrow A \leq L \leq B$
- si $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to \ell_1$ y $b_n \to \ell_2 \Rightarrow \ell_1 \leq \ell_2$
- si $a_n \to \ell_1$ y $b_n \to \ell_2$
  si $L_1 < L_2 \Rightarrow \exists n_0 \mid a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$

Ejemplos:

1) sea la sucesión $\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_{n+1} = \frac{2y_n+3}{4} \end{array}$ definida recursivamente.

es monótona creciente y acotada superiormente. $\left.\begin{array}{l} y_n \leq 2 \to \text{acotada} \\ y_{n+1} - y_n \geq 0 \to \text{creciente} \end{array}\right\} \exists \lim$

Probarlo por inducción:

a) $y_{n+1} - y_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $y_2 - y_1 = \frac{2y_1+3}{4} - y_1 = \frac{2+3}{4} - 1 = \frac{1}{4} > 0$ ✓
- supongamos $y_{n+1} - y_n \geq 0$

$$y_{n+2} = \frac{2y_{n+1}+3}{4} \qquad y_{n+1} = \frac{2y_n+3}{4}$$

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{(2y_{n+1}+3)-(2y_n+3)}{4}$$

$$= \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_n) \underset{HI}{\geq} 0 \checkmark$$

b) $y_n \leq 2$

- $y_1 \leq 2$ ✓
- supongamos $y_n \leq 2$

$$y_{n+1} = \frac{2y_n+3}{4} \leq \frac{7}{4} \leq 2 \checkmark$$

c) es acotada sup. y creciente → tiene límite

Calcular el límite

sea $y_n \to \ell$

entonces $y_{n+1} \to \ell$

$y_{n+2} \to \ell$

...

$y_{n+k_0} \to \ell \quad \forall k_0 \in \mathbb{R}$

$$y_{n+1} = \frac{2y_n+3}{4}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$L = \frac{2L+3}{4}$$

$4L = 2L+3$

$2L = 3$

$\underline{L = 3/2}$

2) sea $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente como $\begin{array}{l} Z_1 = 1 \\ Z_{n+1} = \sqrt{2Z_n} \end{array}$

Probad $1 \leq Z_n < Z_{n+1} < 2 \quad \forall n$ → acotada y creciente!

- para $n=1$ $\quad 1 \leq 1 < \sqrt{2} < 2$ ✓
- suponemos $1 \leq Z_n < Z_{n+1} < 2$

$2 \leq 2Z_n < 2Z_{n+1} < 4$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{2Z_n} < \sqrt{2Z_{n+1}} < 2$

para $n+1$: $\quad \sqrt{2} \leq Z_{n+1} < Z_{n+2} < 2$ ✓

Calcular el límite

$$Z_{n+1} = \sqrt{2Z_n}$$
$$L = \sqrt{2L}$$
$$L^2 = 2L$$
$$L^2 - 2L = 0$$
$$(L-1)^2 - 1 = 0$$
$$(L-1)^2 = 1$$
$$(L-1) = \pm\sqrt{1}$$
$$L = \pm\sqrt{1} + 1$$
$$L = 0, 2$$

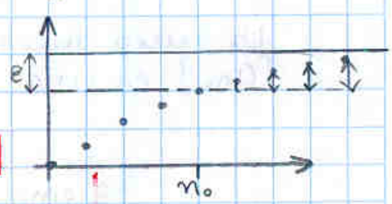
como la sucesión es ≥ 1 el límite no puede ser 0

$\underline{L = 2}$

Sucesiones de Cauchy

se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$



en el caso de $m > n$ $\quad m = n + p, \quad p \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon}$$

Ejemplo:

$a_n = \frac{1}{n}$ veamos que es de Cauchy

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 2/n$$

como $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \quad (\frac{2}{n} \to 0)$

$\forall n, m \geq n_0$ se tiene $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$

Teorema

si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente entonces $\{a_n\}$ es de Cauchy

Demostración (trivial → se usa la propia definición)

Supongamos que $\lim a_n = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

$|a_{n+p} - \ell| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - \ell) + (\ell - a_n)|$

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \underbrace{|a_{n+p} - \ell|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|a_n - \ell|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy entonces $\{a_n\}$ es convergente

Demostración (no trivial → requiere herramientas)

Paso 1. Demostrar que toda sucesión de Cauchy está acotada.

↳ Por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $\{a_{n_k}\} \to \ell$

Paso 2. Demostrar que si una sucesión es de Cauchy y $\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión que tiende a $\ell \Rightarrow \{a_n\} \to \ell$

$$\boxed{\{a_n \text{ de Cauchy}\} \Leftrightarrow \{a_n \text{ converge}\}}$$

Subsucesiones

Dada una sucesión $\{a_n\}$

sea $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales

La nueva sucesión, donde los subíndices son los términos de $\{n_k\}$
$\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$

Ejemplos

$\{\frac{1}{2n}\}$ es una subsucesión de $\{\frac{1}{n}\}$ — a_n: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

↳ $a_{n_k} \mid n_k = 2K$ — $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \dots$

$\{\frac{1}{2n+1}\}$ es una subsucesión de $\{\frac{1}{n}\}$

Propiedades

$a_n \to \ell \Rightarrow$ cualquier subsucesión $a_{n_k} \to \ell$
$\{a_n\}$ es monótona $\Rightarrow$ cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}$ es monótona
$\{a_n\}$ es acotada $\Rightarrow$ cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}$ es acotada

Nota: el recíproco no es cierto
ej $(-1)^n$ no converge
$(-1)^{2n}$ es subsucesión de $(-1)^n$ y converge a 1

Nota: una forma de demostrar que $\{a_n\}$ converge o no

- Si existen 2 subsucesiones cualquiera de $\{a_n\}$ que convergen a límites distintos $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ no converge

- Si un grupo de subsucesiones de $\{a_n\}$ incluyen la totalidad de $\{a_n\}$ y convergen todas a ℓ $\Rightarrow$ $a_n \to \ell$

ejemplo:
si $a_{2n} \to \ell$ y $a_{2n+1} \to \ell \Rightarrow a_n \to \ell$
si $a_{3n} \to \ell$, $a_{3n+1} \to \ell$, $a_{3n+2} \to \ell \Rightarrow a_n \to \ell$

· **Teorema de Bolzano-Weierstrass**

Sea S un subconjunto acotado e infinito de $\mathbb{R}$. Entonces hay al menos un punto de acumulación de S

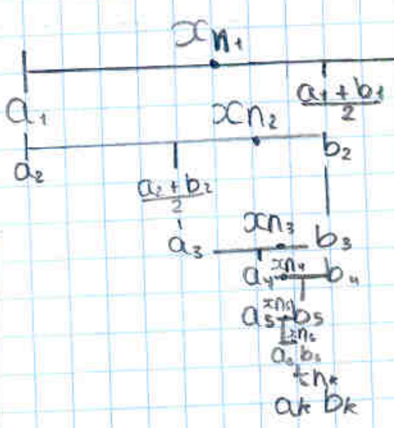
$\boxed{\{x_n\} \text{ está acotada} \Rightarrow \text{posee una subsucesión convergente.}}$

Demostración

$\{x_n\}$ está acotada $= A \leq x_n \leq B \;,\; A, B \in \mathbb{R}$

→ caso sencillo: si $\{x_n\}$ es constante a partir de cierto n_0 (no tiene ∞ términos), x_n converge a la constante

→ caso complejo: supongamos que $\{x_n\}$ tiene infinitos términos si el conjunto infinito de $x_n \in [A,B]$ se parte en 2 mitades, seguro que alguna de ellas tiene infinitos términos. La demostración se basa en ir sucesivamente cortando los subconjuntos por la mitad, tomando la que tenga ∞ términos, sucesivamente, hasta llegar a un punto.



para $[a_1, b_1]$ tomamos $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$

para $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] = [a_2, b_2]$ tomamos $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$

para $[a_3, b_3)$ tomamos $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$

al final se obtiene:

$$\underbrace{a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq \ldots}_{\text{creciente y acotada}} \leq a \leq b \leq \underbrace{\ldots \leq b_k \leq b_{k+1} \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1}_{\text{decreciente y acotada}}$$

creciente y acotada. teorema de la convergencia monótona tiene límite $:= a$

decreciente y acotada. teorema de la convergencia monótona tiene límite $:= b$

$a_k \to a \qquad b_k \to b$

¿$a = b$?

$a_k \leq \ldots \leq a \leq b \leq \ldots \leq b_k$

$$0 \leq b - a \leq b_k - a_k$$
$$\leq \frac{1}{2}(b_{k-1} + a_{k-1})$$
$$\leq \frac{1}{2^2}(b_{k-2} + a_{k-2})$$
$$\leq \frac{1}{2^{k-1}}(b_1 + a_1)$$

$$0 \leq b - a \leq \frac{1}{2^{k-1}}\underbrace{(b_1 + a_1)}_{cte}$$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

$b - a = 0 \Rightarrow b = a = \ell$

ya sabemos $\{a_k\} \to \ell$, $\{b_k\} \to \ell$

$x_{n_k} \to \ell$?

$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\ell \qquad\qquad \ell$

$\{x_{n_k}\}$ converge a ℓ

1.3 SERIES NUMÉRICAS

Definición formal

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
La sucesión $\{S_n\}$ se llama <u>sucesión de sumas parciales</u>
Se define serie numérica como el par de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{S_n\}$

Definición para nosotros

- Estudiar una serie es estudiar la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$
- La serie, aunque $\{S_n\}$ no converja, se denota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- Si $\{S_n\}$ converge, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$ que tb. se denota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ejemplo: Estudio de una serie geométrica.
La serie de una progresión geométrica de razón r $\quad (a_n = r^n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

→ Caso 1. $\quad 0 < r < 1$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ¿cuál es el límite $n \to \infty$?
En este caso es fácil, ya que tenemos de clases anteriores. $\quad S_n = \dfrac{r - r^{n+1}}{1-r}$

como $\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{r}{1-r}$

por tanto $\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge y suma $\dfrac{r}{1-r}$

es decir $\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \dfrac{r}{1-r} \qquad 0 < r < 1$

ejemplo de caso 1.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1/3}{1-1/3} = 1/2$

→ Caso 2 $\quad -1<r<0$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$$

$\lim |r^n| = 0 \Rightarrow \lim r^n = 0$

$\Rightarrow \exists \lim S_n = \frac{r}{1-r}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \qquad -1<r<0$$

Ejemplo caso 2
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(-1/3)}{1-(-1/3)} = -1/4$

→ Caso 3 $\quad r=0$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0+0+\ldots+0 = 0$

todo es 0

→ Caso 4 $\quad r=1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^n = 1+1+\ldots+1 = n$

$\sum 1^n$ diverge a $+\infty$

→ Caso 5 $\quad r=-1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$S_n = (-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$

$S_{2n} = 0$

$S_{2n+1} = -1$

la sucesión $\{S_n\}$ no converge

→ caso 6 $\quad |r|>1$

ej

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3+9+\ldots$ diverge

$\lim S_n = \frac{r + r^{n+1}}{1-r} = \frac{3-3^{\infty}}{1-3} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$

$S_n = \underbrace{3+3^2+\ldots}_{>0} + 3^n \geq 3^n$

como $3^n \to +\infty$, $S_n \to +\infty$

ej

$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n = -3+9-27+\ldots$

similar al caso 5. la sucesión $\{S_n\}$ no converge

Conclusión

la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge si, y solo si $\lvert r\rvert<1$ y suma $\frac{r}{1-r}$

- **Teorema** (combinacion lineal de series)

$\sum a_n$ convergente a A $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\sum b_n$ convergente a B

$\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge a $\alpha A + \beta B$

Demostración

Sea $S_n := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
$S'_n := b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$

Por definición de serie: $S_n \to A$
$S'_n \to B$

$$\alpha S_n + \beta S'_n \to \alpha A + \alpha B$$

Pero

$$\alpha S_n + \beta S'_n = \alpha(a_1 + \dots + a_n) + \beta(b_1 + \dots + b_n)$$
$$= (\alpha a_1 + \beta b_1) + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$$

- **Condición de Cauchy**

Sea $\sum a_n$ una serie de terminos cualesquiera
La serie converge si:

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N}$$
$$\iff \{S_n\} \text{ converge} \iff \{S_n\} \text{ es de Cauchy}$$

Demostración

si S_n es de Cauchy
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Pero

$$S_{n+p} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\Rightarrow S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$$

↳ **Observación / consecuencia**

El caracter (si converge o no) de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

no cambia al alterarse un número finito de términos.

Si la serie inicial fuese convergente, la modificada tambien, aunque no sumará lo mismo

Ej $\quad$ sea $\sum r^n$

si modificamos nº finito de terminos:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1 +}_{\text{nº finito}} r^{19} + r^{20} + \dots + r^n$$

La nueva serie converge en los mismos casos. Tiene mismo caracter

- Teorema

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \xRightarrow[\text{NO ES CIERTO}]{\text{CUIDADO! EL RECÍPROCO}} \lim_{n\to\infty} \{a_n\} = 0}$$

Por lógica, para poder 'sumar' infinitos términos, éstos deben tender a cero!

El recíproco no es cierto

$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ converge

Ej:

sea $\{a_n\} := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \frac{1}{2^n}$

$\lim \{a_n\} = 0$ y $\sum a_n$ converge a 1

PERO

sea $\{b_n\} := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}$

$\lim \{b_n\} = 0$ y $\sum b_n$ diverge

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \longrightarrow 1$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \sim \log n \longrightarrow +\infty$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

- Se necesitan criterios de convergencia, ya que en muchos casos es difícil estudiar una serie mediante su definición.
- Aunque aquí no se vea, la demostración de estos criterios se basa en el estudio de las sumas parciales $\{S_n\}$

Criterio de condensación de Cauchy

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
entonces:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}}$$

coger sólo los términos con índice potencia de dos y repetirlo tantas veces como indique el índice

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots,\ a_8,\ \dots,\ a_{16},\ \dots,\ a_{2^n},\ \dots$

$2a_2,\ 4a_4,\ 8a_8,\ 16a_{16},\ \dots,\ 2^n a_{2^n}$

$b_n = 2^n a_{2^n}$ es un nuevo término general

La serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la serie b_n converge

Ejemplo:
la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge
Por el criterio de condensación
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tiene el mismo caracter que $\sum_{n=1} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{1}^{\infty} 1$

Ejemplo:
¿Para qué valores de $p > 0$ converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$?

Por el criterio de condensación
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ tiene el mismo caracter que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$

$$b_n := \frac{2^n}{(2^n)^p} = \left(\frac{2}{2^p}\right)^n = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

$\Rightarrow \sum b_n$ es una serie geométrica de razon $r := \frac{1}{2^{p-1}}$

$\Rightarrow \sum b_n$ converge $\Leftrightarrow \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{p-1} > 1 \Leftrightarrow p-1 > 0 \Leftrightarrow p > 1$

Conclusión:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow p > 1$$

Ejercicio

¿Para que valores de $p>0$ converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$?

Por el criterio de condensación

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p}$

$$\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}(\ln 2^n)^p} = \frac{1}{(\ln 2^n)^p} = \left(\frac{1}{\ln 2^n}\right)^p = \left(\frac{1}{n \ln 2}\right)^p = \underbrace{\frac{1}{(\ln 2)^p}}_{cte} \cdot \frac{1}{n^p}$$

la cte. no afecta al comportamiento

$$S_n := \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^p + \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^p + \dots + \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^p$$

$$= \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \underbrace{\left(1^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^p\right)}_{\boxed{\text{serie geométrica de razón } 1/n \text{ que converge si } p>1}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge $\Longleftrightarrow p>1$

los primeros términos de la serie no cambian el carácter

- **Observación**

$a_n \geq 0$ términos positivos

$\sum a_n$ converge $\iff \{S_n\}$ acotada

Demostración:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

como $a_n \geq 0$

$S_n \leq S_{n+1} \Rightarrow \{S_n\}$ monótona creciente

Por teorema de convergencia monótona $\{S_n\}$ converge si y solo si está acotada

- **Criterio de comparación (I)** término a término

$a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ términos positivos

supongamos

$\exists n_0 \mid n \geq n_0 \Rightarrow \boxed{a_n \leq b_n}$ (de nuevo aquí se ignoran los primeros términos)

entonces:

$\underline{\sum b_n}$ converge $\Rightarrow \underline{\sum a_n}$ converge

$\{S_n\}$ acotado $\quad \{S'_n\}$ acotado

$\underline{\sum a_n}$ diverge $\Rightarrow \underline{\sum b_n}$ diverge

Ejemplo:

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ converge?

$\forall n \geq 2 \quad \ln n \leq n$

$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$

como $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\xrightarrow{\text{comparación}} \sum \frac{1}{\ln n}$ diverge

Ejemplo:

La serie $\sum \frac{1}{e^n}$ converge?

$e > 2 \Rightarrow e^n > 2^n \Rightarrow \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{2^n}$

como $\sum \frac{1}{2^n}$ converge $\xrightarrow{\text{comparación}} \sum \frac{1}{e^n}$ converge

• $\boxed{\text{Criterio de comparación (II)}}$ por paso al límite

$a_n \geq 0 \quad b_n \geq 0$ términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{} = \ell \ (\in \mathbb{R} \text{ ó } +\infty)$$

ambos tienden a cero para que S_n converga
estamos comparando infinitésimos

si:

a) • $\ell = 0$ si $\frac{a_n}{b_n}$ cada vez se hace mas pequeño, entonces a_n es menor

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

b) • $\ell = +\infty$ si $\frac{a_n}{b_n}$ cada vez se hace mas grande, entonces b_n es menor

$\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

c) • $\boxed{\ell = cte > 0 \quad \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen mismo caracter}}$

Recuerda
Infinitésimos equivalentes

$\operatorname{sen} x \sim x$

$\log(1+x) \sim x$

$e^x - 1 \sim x$

$\tan x \sim x$

$1 - \cos^2 x \sim \frac{x^2}{2}$

Dem: $\lim \frac{a_n}{b_n} = cte > 0 \Rightarrow \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \ell + \varepsilon$

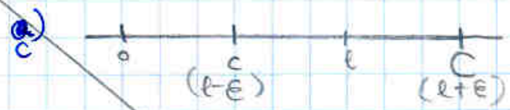
0 $\quad \ell-\varepsilon \quad \ell \quad \ell+\varepsilon$

$c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C$

$c \cdot b_n \leq a_n \leq C b_n$

ejs Criterio de comparación

Demostración

a) 

existe n_0 / $n \geq n_0$

$\Rightarrow c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C$

$\Rightarrow c b_n \leq a_n \leq C b_n$

si converge

$c\, b_n$ converge

a_n converge

b_n converge

y si a_n converge

Ejemplo

$\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{e^n}$

al comparar con $\sum \frac{1}{n^c}$

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{e^n}$ ¿ $\lim \frac{a_n}{b_n}$?

$= \lim \frac{e^n}{n^2} = +\infty$

b) $\exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq M$

$\Rightarrow a_n \geq M b_n$

si $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum M b_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

Ejemplo:

estudia el caracter de

$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

→ $\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ es un infinitésimo equivalente a $\frac{1}{n}$, es decir

$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{1/n} = 1$ $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1\right)$

por comparación (II) la serie $\sum \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge

→ $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ es un infinitesimo equivalente a $\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan(1/n^2)}{1/n^2} = 1$

como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\xRightarrow{\text{comparación}}$ $\sum \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge

→ $\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ es infinitésimo equivalente a $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = 1$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge $\underset{\text{comp}}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+1/\sqrt{n})$ diverge

Ejercicio

Estudia el caracter de (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+1/n)}}$

$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{(1/n)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

¿$\lim \sqrt[n]{n}$?

$= \lim e^{\ln(n^{1/n})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

$a_n := \frac{1}{n^{1+1/n}}$ $\quad b_n := \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{(1+1/n)}}}{\frac{1}{n}} = 1$

como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$ diverge, por comparación

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$

$\frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}}$ ¿a que lo comparamos? en el límite $\frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}}$ $= \frac{1}{e^n}$

$\lim \frac{\frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}}{1/e^n} = 1$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ converge — serie geométrica de razón $\frac{1}{e}$ converge si $\frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow$ por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$ converge

Ej's criterio de comparación

Ejercicios

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$

sabemos que $1+2+\dots+n$ es sucesión aritmética $\{a_n\}$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

en este caso $= \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{1}{1+2+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

Lo comparamos con $1/n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2/n(n+1)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n(n+1)} = 2 = \ell \underbrace{> 0}_{\text{para poder usar el criterio de comparación}}$$

$\xrightarrow{\text{comparación}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$ converge

cuando $x \to 0$
$\operatorname{sen} x \sim x$
$\log(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$
$\tan x \sim x$
$1-\cos^2 x \sim x^2/2$

para $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

$\operatorname{sen} a_n \sim a_n$

... ...

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$

Ayuda

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} \overset{L'H}{=} \frac{2^x \ln 2}{1} = \ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = \ln 2 > 0$$

$\xrightarrow{\text{comparación}}$ $\Sigma\, 2^{1/n} - 1$ se comporta igual que $\Sigma \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ $\Sigma\, 2^{1/n} - 1$ diverge

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^p$, para $p > 0$

como $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = \ln 2$

y elevar a p es una función continua (se puede intercambiar la función con el límite)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{1/n}-1)^p}{(1/n)^p} = \lim\left(\frac{2^{1/n}-1}{1/n}\right)^p = \left(\lim \frac{2^{1/n}-1}{1/n}\right)^p = (\ln 2)^p > 0$$

$\xrightarrow{\text{comp}}$ $\Sigma(2^{1/n} - 1)^p$ se comporta igual que $\Sigma \frac{1}{n^p}$ $\forall p > 0$

$\Rightarrow$ converge si y solo si $p > 1$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n^2]{2}-1\right)$

como $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \ln 2 > 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n^2}-1}{1/n^2} = \ln 2 > 0$

$\xRightarrow{\text{comparación } \infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1/n^2}-1$ converge, pues $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right)$

Ayuda

$\lim_{x\to 0} \frac{2^x+2^{-x}-2}{x} \overset{L'H}{=} \frac{2^x\ln 2 - 2^{-x}\ln 2}{1} = 0$

QUE SIGNIFICA $\frac{2^x+2^{-x}-2}{x}$ los dos tienden a cero pero el de arriba mucho mas rapido

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}+2^{-1/n}-2}{1/n} = 0$

como $\frac{1}{n}$ es mas grande PERO diverge

no podemos decir nada de $2^{1/n}+2^{-1/n}-2$

pueden darse los dos casos

ej $\underset{\text{converge}}{\sum \frac{1}{n^2}} \leq \underset{\text{diverge}}{\sum \frac{1}{n}}$

$\underset{\text{diverge}}{\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}} \leq \underset{\text{diverge}}{\sum \frac{1}{n}}$

el x de abajo era demasiado grande

utilicemos uno menor

$\lim_{x\to 0} \frac{2^x+2^{-x}-2}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2^x\ln 2 - 2^{-x}\ln 2}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim \frac{2^x(\ln 2)^2 + (2^{-x}(\ln 2)^2)}{2} = \lim \frac{(2^x+2^{-x})(\ln 2)^2}{2}$

$= (\ln 2)^2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}+2^{-1/n}-2}{1/n^2} = (\ln 2)^2 > 0$

$\xRightarrow{\text{comparación}} \sum 2^{1/n}+2^{-1/n}-2$ tien el mismo caracter que $\sum 1/n^2$

$\Rightarrow \sum 2^{1/n}+2^{-1/n}-2$ converge

Ej's criterio de comparación

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

- Por criterio de condensación

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln 2^n)^{\ln 2^n}} = \sum \frac{2^n}{(n \ln 2)^{n \ln 2}} = \sum \left(\frac{2}{(n \ln 2)^{\ln 2}}\right)^n$

como $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n\ln 2)^{\ln 2}} = 0$

$\Rightarrow \exists\, n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow \left(\frac{2}{(n\ln 2)^{\ln 2}} < \frac{1}{2}\right.$

$\left(\frac{2}{(n \ln 2)^{\ln 2}}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente

(porque es una serie geometrica de razon $\frac{1}{2} < 1$

$\xRightarrow{\text{comparación}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(n\ln 2)^{\ln 2}}\right)^n$ converge

$\xRightarrow{\text{condensacion}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$ converge.

(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^p \quad p > 0$

- el término general tiende a 0? $(\ln 1)^p = 0$ si

nos interesa algo similar a $\ln(1+x) \sim x$

$\underbrace{\frac{n+1}{n-1}}_{\text{tiende a 1}} = 1 + \underbrace{a_n}_{\text{algo que tienda a cero}} = 1 + \left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) = 1 + \left(\frac{n+1-(n-1)}{n-1}\right)$

$= 1 + \frac{2}{n-1}$

$= \sum \left(\ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\right)^p$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right)^p}{\left(\frac{2}{n-1}\right)^p} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}}\right)^p = 1^p = 1$

la serie $\sum \left(\frac{2}{n-1}\right)^p$ tiene el mismo caracter que $\sum \frac{1}{n^p}$,

por lo tanto $\sum \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^p$ coverge $\Leftrightarrow p > 1$

Criterios de la raíz y del cociente

Supongamos $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
supongamos que existe

o bien $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}$

o bien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Entonces

a) si $l > 1$, la serie $\sum a_n$ diverge

b) si $l < 1$, la serie $\sum a_n$ converge

c) si $l = 1$, no podemos afirmar nada

Justificación de c)

$\sum \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

· $a_n = \frac{1}{n^p}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \to 1$$

y sin embargo a veces converge y otras diverge

Ejemplo

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{5^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n((n+1)^2+1)}{5^{n+1}(n^2+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{5(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{5n^2+1} = \frac{1}{5} < 1$$

por el criterio del cociente la serie converge

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)$

interesa usar la raíz, porque tenemos potencia de n

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \cos^2 \frac{n\pi}{2n+4}$$

como cos es una función continua

$$= \cos^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{2n+4} = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0 < 1$$

por el criterio de la raíz, la serie converge.

Criterios de la raiz y del cociente

$a_n > 0$ términos positivos

Supongamos que existe

o bien $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \ell \in \mathbb{R}$

o bien $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \ell$

a) $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

b) $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

c) $\ell = 1$, no podemos afirmar nada

ej. de $\sum a_n$ diverge y de $\sum a_n$ converge donde $\ell = 1$

$\sum \frac{1}{n^p}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p = \lim \left(\frac{1}{n^{1/n}}\right)^p = 1$$

tomando log's y exponenciales

Ejemplos

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{5^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5^n}\cdot((n+1)^2+1)}{\cancel{5^n}\cdot 5\cdot (n^2+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{5n^2+1} = \frac{1}{5} < 1$$

por el criterio del cociente la serie converge

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)$

interesa usar la raiz para eliminar la potencia de n

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\cos^{2\cancel{n}}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \cos^2 \frac{n\pi}{2n+4} = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0 < 1$$

por el criterio de la raiz, la serie converge

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,2^n}$

como es difícil trabajar con factoriales (mas que con potencias de n) aplicamos el criterio del cociente para que se valla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}}}{\frac{n^n}{n!\,2^n}} = \lim \frac{n!\;2^n\;(n+1)^{n+1}}{n!\,(n+1)(2^{n+1})\,n^n}$$

$$= \lim \frac{\cancel{n!}\;\cancel{2^n}\;(n+1)^n\;\cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}\cdot \cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{(n+1)}\cdot n^n} = \lim \frac{(n+1)^n}{2n^n}$$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = e\cdot \frac{1}{2} > 1$$

la serie diverge

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$,

$$a_n = \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

aplicando criterio de la raiz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^n = e^h = \frac{1}{e} < 1$$

$$\boxed{h = \lim\left(\frac{1}{-n-1}\right)\cdot n = \frac{\lim n}{-n-1} = -1}$$

por el criterio de la raiz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ es convergente

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ $\longrightarrow$ se puede ya ver que converge

$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,n^2} = 0$$

por el criterio del cociente $\sum \frac{n^2}{n!}$ es convergente

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

$$a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{\ln n+1}}{(\ln n+1)^{n+1}}}{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \frac{(\ln n)^n\,(n+1)^{\ln n+1}}{(\ln n+1)^{n+1}\cdot n^{\ln n}}$$

mejor hacerlo por el criterio de la raiz

$$a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

(∞^0)

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \frac{(n^{\ln n})^{1/n}}{\ln n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\ln\left(n^{\frac{\ln n}{n}}\right)}}{\ln n}$$

$$= \frac{e^{\frac{\ln n}{n}\cdot \ln n}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n} \longrightarrow \frac{e^0}{\infty} = 0$$

$\frac{(\ln n)^2}{n} \to 0$

por el criterio de la raiz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ converge

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES DE TERMINOS CUALESQUIERA

- **Convergencia absoluta**

Sea $a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge → aquí podemos aplicar los criterios para términos positivos.

ejemplo
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ es absolutamente convergente, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

- **Teorema**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge absolutamente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}$$

Demostración:
Tenemos que $\sum |a_n|$ converge
Por la condición de Cauchy, S_n es de Cauchy
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow S_{n+p} - S_n < \varepsilon$$
pero
$$S_{n+p} - S_n = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$
de la desigualdad triangular
$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$
por lo tanto
$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$
Por la condición de Cauchy
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

- El recíproco no es cierto

convergencia absoluta es más fuerte que convergencia
más difícil de cumplir

Basta un contraejemplo:
consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

a) la serie converge si (por definición) la sucesión $S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ converge
si $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, la sucesión $S_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}$ converge

b) la serie $\sum |a_n|$ converge ($\equiv \sum a_n$ converge absolutamente)
si (por definición) $S_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ converge
si $|a_n| = \frac{1}{n} \Rightarrow S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$
y diverge

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge PERO no converge absolutamente

Ejercicio

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$$

estudiemos la convergencia absoluta

$$a_n = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}$$

$$a_3 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}$$

$$a_4 = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}$$

$$a_{n+1} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n+2)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)}{\cancel{(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}} = \frac{2n+3}{3n+2} \to \frac{2}{3} < 1$$

Por el criterio del cociente, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\cdot 5 \ldots (2n+1)}{2\cdot 5 \ldots (3n-1)}$

converge absolutamente.

- **Series telescópicas**

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice telescópica si:

Existe una sucesión $\{b_n\}$ tal que:

o bien (1) $a_n = b_n - b_{n+1}$
o bien (2) $a_n = b_{n+1} - b_n$

Calculando las sumas parciales de $\sum a_n$ en el caso (1):

$$
\begin{aligned}
S_n &:= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
&= (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_4}) + \dots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) \\
&= b_1 - b_{n+1}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\boxed{\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \underset{\text{si y sólo si}}{\Longleftrightarrow} \text{la sucesión } \{b_n\} \text{ converge}}$$

y además se puede calcular su suma:

$$\boxed{\{b_n\} \text{ converge} \Longrightarrow \begin{array}{l} (1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n \\ (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1 \end{array}}$$

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

sea $b_n = \frac{1}{n}$

$a_n = b_n - b_{n+1} \Rightarrow \sum a_n$ es serie telescópica

Se cumple

$$
\begin{aligned}
S_n &:= a_1 + \dots + a_n \\
&= b_1 - b_{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$\{b_n\}$ converge $\Longleftrightarrow \sum a_n$ converge

$$
\begin{aligned}
\sum a_n &= b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Conclusión:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge y suma 1.

Ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]$

sea $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$a_n = b_n - b_{n+1} \Rightarrow \{b_n\}$ converge $\Leftrightarrow \sum a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 2 - e$$

Ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$

por ser una serie telescópica: $b_n = \sqrt{n}$ diverge $\Leftrightarrow \sum a_n$ diverge

Calcularlo sin usar serie telescópica

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ se puede comparar con $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to \frac{1}{2}$$

Por comparación, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ diverge

$\Rightarrow \sum \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ diverge

Ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

$$4x^2-1 = 4\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4x^2-1} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \frac{A}{x+\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}}$$

$$1 = A(x-\tfrac{1}{2}) + B(x+\tfrac{1}{2})$$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad 1 = B$

$x=-\frac{1}{2}$ $\quad 1 = -A$ $\qquad \boxed{A+B=0}$

$$\frac{4}{4x^2-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$$

sea $b_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1}$

$a_n = b_n - b_{n+1} \Rightarrow \sum a_n$ es serie telescópica

como $b_n \to 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

Ejemplo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)\cdot 3^n}$

esto no es descomposición en fracciones simples.

$$\frac{2n+3}{n(n+1)3^n} = \frac{A}{n\,3^{n-1}} + \frac{B}{(n+1)3^n}$$

$$\frac{2n+3}{n(n+1)3^n} = \frac{A(n+1)\cdot 3}{n(n+1)\cdot 3^n} + \frac{nB}{n(n+1)3^n}$$

$$2n+3 = A(n+1)\cdot 3 + nB$$

$n=-1$ $\quad 1 = -B$

$n=0$ $\quad 3 = 3A$

$\boxed{\begin{array}{l} B=-1 \\ A=1 \end{array}}$ $\quad \boxed{A+B=0}$

$$\frac{2n+3}{n(n+1)3^n} = \frac{1}{n\,3^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)3^n}$$

sea $b_n = \dfrac{1}{n\,3^{n-1}}$ $\qquad a_n = b_n - b_{n+1}$

como $b_n \to 0 \Rightarrow \sum a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)\cdot 3^n} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

Ejemplo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$

1ª forma: (estrictamente telescópica PERO sin usar estrictamente descomposición en fracciones simples)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)}$$

$$1 = A(n+2) + B(n)$$

$n=-2$: $\quad 1 = -2B$

$n=0$: $\quad 1 = 2A$

$\boxed{\begin{array}{l} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{array}}$ $\quad \boxed{A+B=0}$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n(n+1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)}$$

sea $b_n = \dfrac{\frac{1}{2}}{n(n+1)} \Rightarrow a_n = b_n - b_{n+1}$

como $b_n \to 0$ converge $\Leftrightarrow \sum a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = b_1 - \lim b_n$$

$$= \frac{1}{4}$$

2ª forma: (sin ser estrictamente telescópica pero usando estrictamente la descomposición en fracciones simples)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

$$1 = A(n+1)(n+2) + B(n)(n+2) + C(n)(n+1)$$

$n=0 \quad 1 = 2A$

$n=-1 \quad 1 = -B$

$n=-2 \quad 1 = 2C$

$\boxed{A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{1}{2}}$ $\quad A+B+C=0$

$n=1 \rightarrow \quad \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{3}$

$n=2 \rightarrow \quad \frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{4}$

$n=3 \rightarrow \quad \frac{1/2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{5}$

$n=4 \rightarrow \quad \frac{1/2}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{1/2}{6}$

$n=5 \rightarrow \quad \frac{1/2}{5} + \frac{-1}{6} + \frac{1/2}{7}$

0 0 0

$+ \frac{1/2}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

como $S_n \to \frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

se puede ver que converge porque el grado del denominador es 3/2

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{(n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}(n+1))}{(n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}(n+1))(n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n})}$$

$$= \frac{n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}(n+1)}{n^2(n+1) - n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}(n+1)}{n^3+n^2-n^3-2n^2-n} = \frac{n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}(n+1)}{-n^2-n}$$

$$= \frac{n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}(n+1)}{-n(n+1)}$$

$$= \frac{\boxed{\sqrt{n}}\cancel{(n+1)}}{\boxed{n}\cancel{(n+1)}} - \frac{\cancel{n}\boxed{\sqrt{n+1}}}{\cancel{n}\boxed{(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

sea $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow a_n = b_n - b_{n+1}$

b_n converge $\Longleftrightarrow \sum a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}) + (n+1)\sqrt{n}} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)} + \sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}}$$

mult y dividir por conjugado

$$= \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}\right)}{\ln^2(n+1)\ln(n+2) - \ln(n+1)\ln^2(n+2)}$$

factor comun

$$= \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}\right)}{\ln(n+1)\ln(n+2)\left[\ln(n+1) - \ln(n+2)\right]}$$

$\ln\frac{n+1}{n+2}$

$= \ln(n+1) - \ln(n+2)$

$= -(\ln(n+2) - \ln(n+1))$

$= -\ln\frac{n+2}{n+1}$

$$= \frac{\cancel{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}\left(\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}\right)}{\ln(n+1)\ln(n+2)\left(-\cancel{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}\right)}$$

para darle la vuelta

$$= \frac{-\left(\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)} - \sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}\right)}{\ln(n+1)\ln(n+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}}{\ln(n+1)\ln(n+2)} - \frac{\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)}}{\ln(n+1)\ln(n+2)}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{\ln n+1}}{\ln(n+1)}} \cdot \cancel{\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+2)}} - \cancel{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{\ln(n+2)}}{\ln(n+2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{\ln(n+2)}}$$

sea $b_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}$

$a_n = b_n - b_{n+1}$

b_n converge $\Leftrightarrow$ Σa_n converge

$\Sigma a_n = b_1 - \lim b_n$

$= \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$

- Criterio de Dirichlet

Sea $\{a_n\}$ monótona decreciente que tiende a cero y $\{b_n\}$ una sucesión con sumas parciales acotadas ($B_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n$, es acotada)

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ converge}$$

hay cierto ejercicio del criterio de dirichlet muy difícil que no hace falta pensarlo

ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n+2)}$$

$$a_n = \frac{1}{\ln(n+2)} \searrow 0$$

$$b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$n=0 \longrightarrow b_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$n=1 \longrightarrow b_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b_2 = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$b_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b_4 = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = b_0$

$b_5 = b_1 \quad b_6 = b_2 \dots$

¿Qué ocurre con las sumas parciales?

$$B_n := b_0,\ b_0+b_1,\ b_0+b_1+b_2,\ \underbrace{b_0+b_1+b_2+b_3}_{=0},\ \underbrace{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4}_{=b_4=b_0}$$

Las sumas parciales solo toman un número finito de valores, por lo tanto están acotadas.

Por Dirichlet $\Rightarrow$ la serie converge

- Series alternadas

Sea $\{a_n\} \searrow 0$ ($a_n \geq 0$) se llama serie alternada a una serie con la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ó} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

si $b_n = (-1)^n$, $B_n := (-1, 0, -1, 0, \dots)$ tiene sumas parciales acotadas: $\{B_n\}$ está acotada

Luego, por el criterio de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge ejemplo $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

converge por lo anterior.
(y no converge absolutamente)

· **Criterio de Abel**

Sea $\{a_n\}$ monótona y acotada (converge)
Sea $\{b_n\}$ tal que la serie $\sum b_n$ converge.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge

ejemplo $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n+2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$b_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n+2)}$

En el ejemplo anterior hemos probado que $\sum b_n$ converge.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monotona creciente (nos lo creemos / es difícil de probar)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\downarrow\, e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1} \to e$$

Por el criterio de Abel, la serie converge

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$a_n = \frac{\ln n}{n} \searrow 0$ es monótona decreciente y convergente a cero

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \searrow 0$ es monótona decreciente y convergente a cero (en los primeros términos no es así, pero ya sabemos que los primeros términos no importan)

$\overset{\text{Dirichlet}}{\Longrightarrow}$ las dos series convergen

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ converge

$\underbrace{\underbrace{(-1)^n}_{b_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}_{a_n \searrow 0}}_{\text{por Dirichlet, converge (no absolutamente)}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$ diverge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ es suma de dos series convergentes

$\Rightarrow$ la serie converge (no absolutamente)

Ejercicios

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n}{n}$$

$$\operatorname{sen} n \geq -1$$
$$\Rightarrow 2+\operatorname{sen} n \geq 2-1 = 1$$
$$\Rightarrow \frac{2+\operatorname{sen} n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

Por comparación, la serie diverge

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^q$, $p>0$, $q<0$

Sea $a_n = p^n n^q$

$$\sqrt[n]{a_n} = p\left(\sqrt[n]{n}\right)^q \xrightarrow{\uparrow} p$$
$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

Por el criterio de la raiz: si $p>1 \Rightarrow$ la serie diverge $\forall q$

si $p<1 \Rightarrow$ la serie converge $\forall q$

si $p=1$

la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} n^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha=-q$

converge $\Leftrightarrow \alpha>1$

$\Leftrightarrow -q>1$

$\Leftrightarrow q<-1$

si $p=1$, la serie converge $\Leftrightarrow q<-1$

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b_n)^n}$ y $b_n \to +\infty$

$$a_n = (b_n)^{-n} \longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = b_n^{-1} = \frac{1}{b_n} \to 0$$

por el criterio de la raiz, la serie converge

TEMA 2. EL ESPACIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$

El espacio $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las n-tuplas de números reales

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Definición:

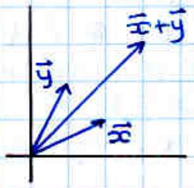
La norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
es una función tal que

1) $\|\vec{x}\| = \|-\vec{x}\|$
2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
3) $\|\vec{x}\| \geq 0$

$\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow$

4) Desigualdad triangular $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$



Ejemplos

1) $\|x\|_{max} = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ es una norma
2) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ Norma euclídea
3) $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ es una norma

Norma deducida de un producto escalar

$$<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

La función $\|x\| : \sqrt{<x, x>}$
se puede probar que es una norma

Ejemplo:
Producto escalar euclídeo:
$$<\vec{x}, \vec{y}> = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

La norma euclídea se define del producto escalar euclídeo

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

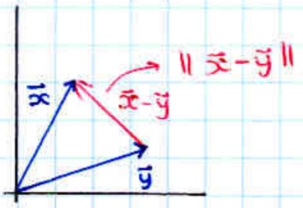
por provenir de un producto escalar tiene mejores propiedades

· Distancia euclídea

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$$

donde $\| \cdot \|$ norma euclídea

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$



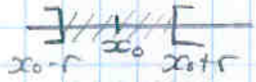
· $\boxed{\text{Entornos}}$

se llama bola abierta de centro $\vec{x}_0$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$B_r(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r \}$$

- para $n = 1 \rightarrow$ estamos en $\mathbb{R}$

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, d(x, x_0) < r \}$$
$$d(x, x_0) = |x - x_0|$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x - x_0| < r$$
$$= \,]x_0 - r, x_0 + r[$$



- para $n = 2 \rightarrow$ estamos en $\mathbb{R}^2$

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^2, \| x - x_0 \| < r \}$$

- para $n = 3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

se llama bola cerrada de centro $\vec{x}_0$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$\overline{B_r(\vec{x}_0)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, d(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq r \}$$

- Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si:

$\forall \vec{x}_0 \in A \quad \exists r > 0 \,/\, B_r(x_0) \subseteq A$

$\equiv$ "Para cualquier punto del conjunto podemos encontrar un radio tal que la bola de centro dicho punto y radio encontrado esté contenida en el conjunto"

se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si

$\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto

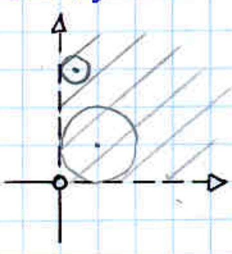
"si su complementario es abierto"

Nota:

- Los conjuntos abiertos no contienen ningun punto de su frontera
- Los conjuntos cerrados contienen TODOS los puntos de su frontera

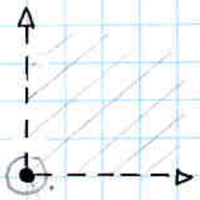
Ejemplos

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0,\ y > 0\}$



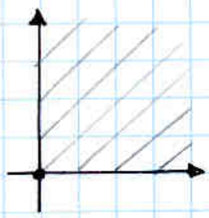
es abierto

(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0,\ y > 0\} \cup \{0,0\}$



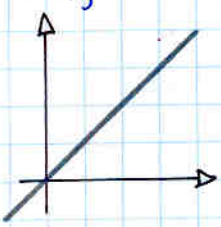
no es abierto
TAMPOCO es cerrado

(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$



es cerrado

(4) $\{(x,y) \,/\, x = y\}$



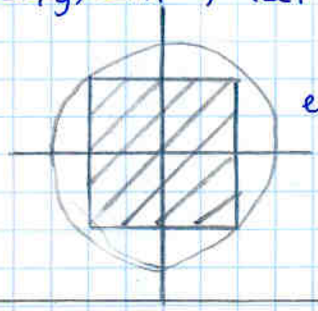
es cerrado

Nota

Por convenio los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados

Ejemplos:

(1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, |x|\leq 1,\ |y|\leq 1\}$



es cerrado y acotado

Definición: Conjunto acotado

se dice que $A\subseteq\mathbb{R}^n$ esta acotado si

$\exists\ M>0 \,/\, \|x\|\leq M\ \ \forall x\in A$

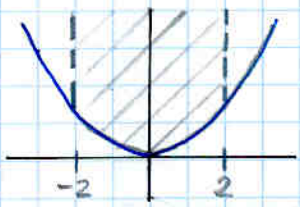
$\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\in B_M(0)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B_M(0)$

Ejemplos:

(2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ y\geq x^2\ ,\ |x|<2\}$

la coma es equivalente a intersección



no es abierto
no es cerrado
no es acotado

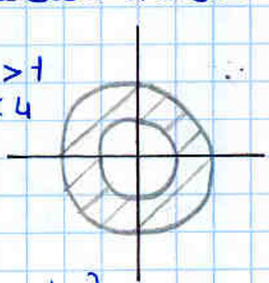
(3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^n / (x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)>0\}$

$(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1>0,\ 4-x^2-y^2>0 \\ \text{ó} \\ x^2+y^2-1<0,\ 4-x^2-y^2<0 \end{cases}$

Union de dos conjuntos, cada uno de ellos siendo una intersección.

$A=\{(x,y)/ \begin{array}{l} x^2+y^2-1>0 \rightarrow x^2+y^2>1 \\ 4-x^2-y^2>0 \rightarrow x^2+y^2<4 \end{array}$

$x^2+y^2=1 \qquad x^2+y^2=4$



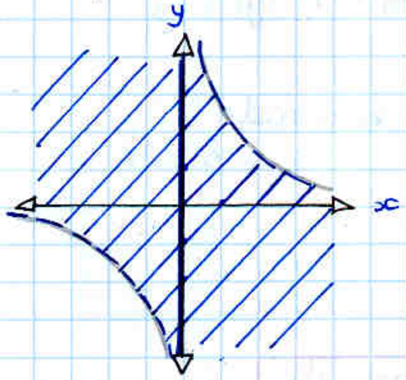
$B=\{(x,y)/ \begin{array}{l} x^2+y^2-1<0 \rightarrow x^2+y^2<1 \\ 4-x^2-y^2<0 \rightarrow x^2+y^2>4 \end{array}\}=\emptyset$

El conjunto que se pide $A\cup B = A\cup\emptyset = A$
abierto y acotado

(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy < 1\}$

CUIDADO, PARA X NEGATIVAS LA IGUALDAD CAMBIA DE SIGNO

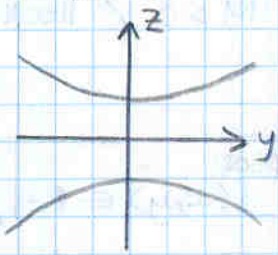
para $x > 0$ $\quad xy < 1 \rightarrow y < \frac{1}{x}$
para $x = 0$ $\quad xy < 1 \rightarrow \forall y$
para $x < 0$ $\quad xy < 1 \rightarrow y > \frac{1}{x}$



(5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0\}$

Sugerencia: cortar en planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ conocidos

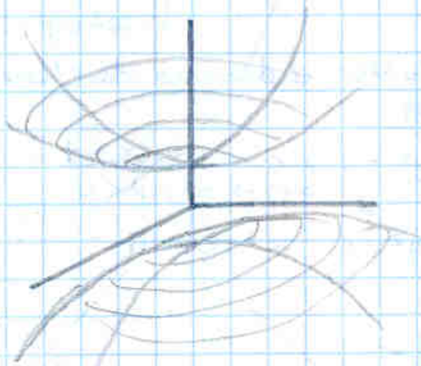
si $x = 0$
$\hookrightarrow z^2 = y^2 + 1$
$z^2 - y^2 = 1$ hipérbola



si $y=0$
$\hookrightarrow z^2 = x^2 + 1$
$z^2 - x^2 = 1$ la misma hipérbola

si $z = 0$
$\hookrightarrow x^2 + y^2 + 1 = 0$
$x^2 + y^2 = -1 \quad = \{\emptyset\}$
no hay corte con $z=0$

$z = 2$
$\hookrightarrow 4 = x^2 + y^2 + 1$ circunferencia centrada en cero
$x^2 + y^2 = 3$



II 5

(6) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -z^2 + x^2 + y^2 = 1\}$

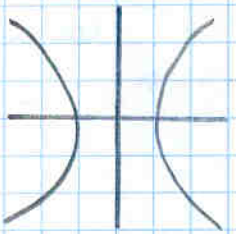
si $x=0$

$\hookrightarrow -z^2 + y^2 = 1$

$y^2 - z^2 = 1$
hipérbola

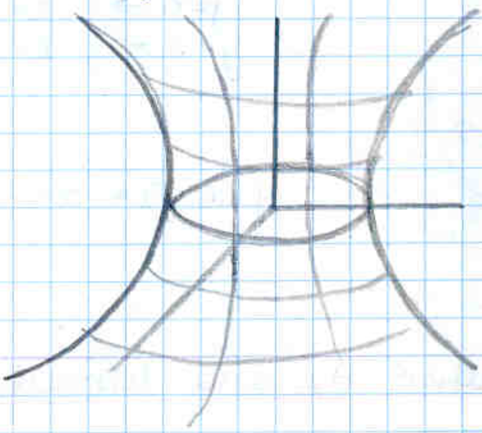
si $y=0$

$x^2 - z^2 = 1$
hipérbola



si $z=0$

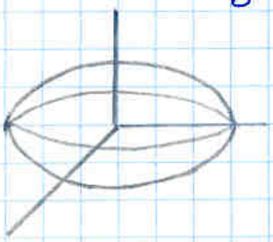
$x^2 + y^2 = 1$ circunf



Algunas de estas superficies son funciones

$f(x,y) = z$

ej: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Elipsoide
No es gráfica de ninguna función

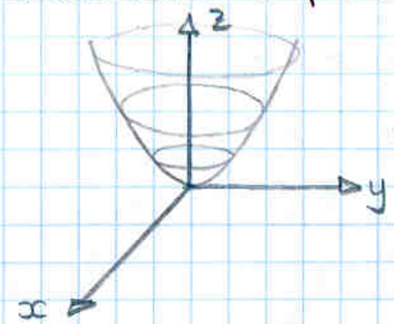


ej: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Esfera. Tenemos dos z's para un mismo (x,y). No es una función

Podríamos convertirlo en función
$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
gráfica $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

tomando sólo los valores positivos

ej: Paraboloide elíptico



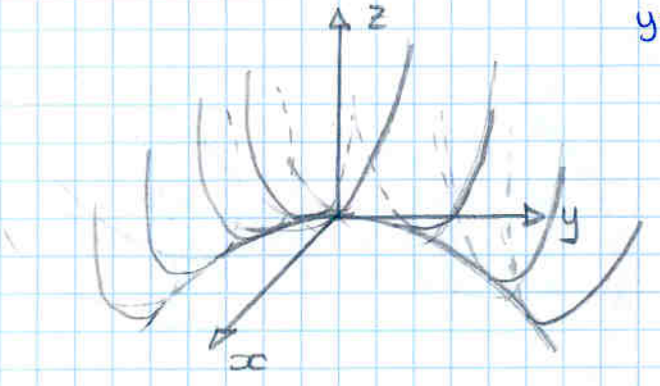
$z = x^2 + y^2$

los cortes con el eje z son esferas

ej Paraboloide hiperbólico
"silla de montar"

$z = x^2 - y^2$

cortar en
$x = a$ ($a=0$ ó $a>0$)
$y = a$ ($a=0$ ó $a>0$)



$y = 0 \rightarrow \quad z = x^2$
$y = 2 \rightarrow \quad z = x^2 - 4$ una parábola bajada

$f(x,y) = x^2 - y^2$

Definición: gráfica de una función

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Recuerda la gráfica de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ era en $\mathbb{R}^2$

Se llama gráfica de f al subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$(x,y) \in A, \quad z = f(x,y)$$

- **Gráfica de una función lineal**

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineal

existen $(\alpha\ \beta) \in \mathbb{R}^2$ tales que

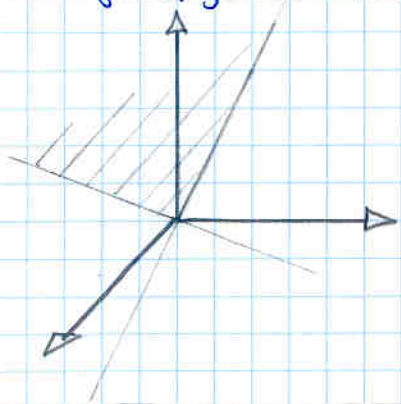
$$f(x,y) = (\alpha\ \ \beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \alpha x + \beta y$$

$\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ z = f(x,y)$

$z = \alpha x + \beta y$ plano en $\mathbb{R}^3$

ejemplo

$f(x,y) = x + 2y$



$x = 0 \to z = 2y$
$y = 0 \to z = x$

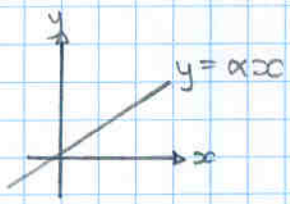
el plano formado por las dos rectas

Nota:

Gráfica de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal

$\exists \alpha \in \mathbb{R} /\ f(x) = \alpha x$

$\text{Graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \ y = \alpha x\}$



TEMA 3. FUNCIONES EN $\mathbb{R}^n$. LIMITES. CONTINUIDAD

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\exists f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

tales que $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

Las funciones f_i se llaman funciones coordenadas

ej $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = \left(e^{xy}, \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)$

funciones coordenadas:

$f_1(x,y) = e^{xy}$

$f_2(x,y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$

· **Definición LIMITE**

sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

↳ A abierto de $\mathbb{R}^n$

existe $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{l} \in \mathbb{R}^m$ si:

¿Porque A abierto de $\mathbb{R}^n$? si A fuera cerrado para calcular límites en la frontera habría que aproximarse sólo por ciertos sitios. Nosotros no haremos eso

dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{l}\| < \varepsilon$

Caso particular $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

existe $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \in \mathbb{R}$ si

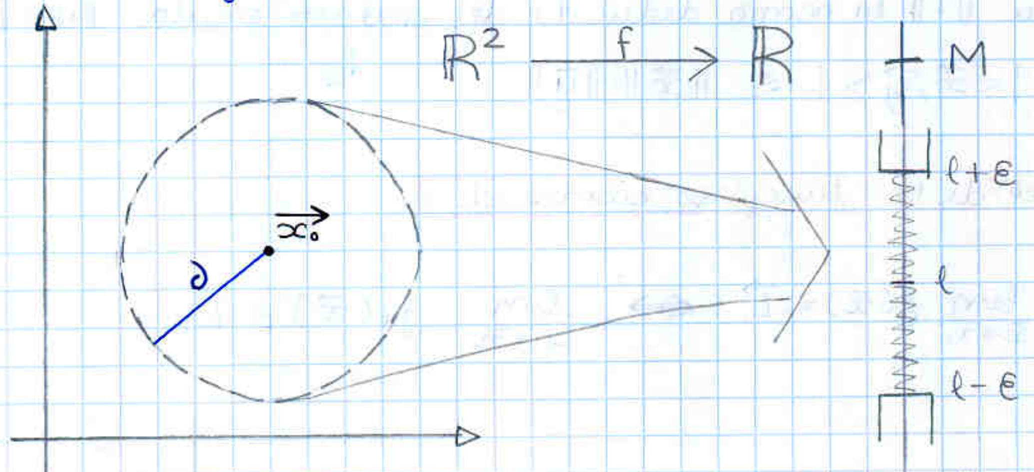
dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

si $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

es decir, si $x \in (B_\delta(\vec{x}_0) \setminus \underbrace{\{\vec{x}_0\}}_{\text{menos el propio punto}}) \Rightarrow f(x) \in \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

es decir $f(B_\delta(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}) \subseteq \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$



Propiedad: supongamos $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(\bar{x}) = l \in \mathbb{R}$

$\exists\, \delta > 0,\ M > 0 \,/\, |f(\bar{x})| < M \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}) \setminus \{x_0\}$

Ejemplo:

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$

$f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y) \longrightarrow 0$

$f(x,y) = \left(e^{xy}, \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) \qquad \lim_{(x,y)\to \vec{0}} f(x,y) = (1,1)$

Teorema. Operaciones con límites

sean $g, f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad$ A abierto

sea $\vec{x}_0 \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$

sea $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{L} \qquad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \vec{S}$

1.) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\lambda \cdot f(\vec{x})) = \lambda \cdot \vec{L}$

2.) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \vec{L} + \vec{S}$

3.) para $m=1$, es decir f, g $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ los vectores no se pueden multiplicar y dividir

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = L \cdot S$

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{L}{S} \qquad S \neq 0$

4.) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto escalar en $\mathbb{R}^m$

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{L}, \vec{S} \rangle$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

sea $\|\cdot\|$ la norma deducida del producto escalar $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Límite de las funciones coordenadas

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{L} \iff \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i$

CALCULO DE LIMITES

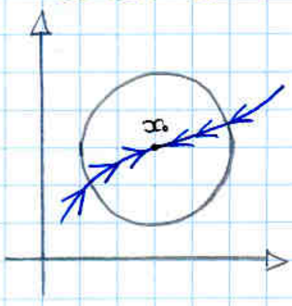
- **Límites por curvas**

sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Para todo $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(a) = b$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(\underset{a}{x}, \underset{b}{y}) = l \implies \lim_{x\to a} f(\underset{a}{x}, \underset{b}{g(x)}) = l$$

es decir. Si el límite global es l,
el límite de una curva/recta es l.



Nota:
Este resultado sólo sirve para probar que el límite NO existe. (encontrando dos curvas cuyo límite no es el mismo)

Ejemplo

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to\bar{0}} f(x,y) \; ?$$

Veamos que no existe tomando curvas

- $g(x) = x$ (pasa por $(0,0)$; punto en el que calculamos el límite)

$$\lim_{x\to 0} f(x, g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

- $g(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 0} f(x, g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x, 2x) = \lim \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}$$

hasta aquí bastaría para probar que no existe

- en general $g(x) = mx$

$$\lim_{x\to 0} f(x, g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

el límite cambia según la curva que tomemos (depende de m) por lo tanto el límite global NO Existe

Ejemplo

$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$ $\quad \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$?

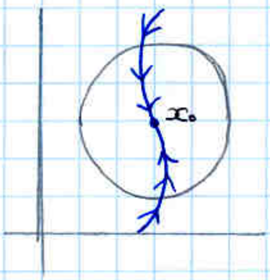
sea $y = mx$

$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2}$ depende de m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$ no existe

• Curvas en la variable y

no es obligatorio sustituir y por $g(x)$
tambien se puede sustituir x por $g(y)$ para obtener más curvas. (segun nos convenga)



ejemplo

$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

¿ $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$?

intentamos conseguir mismo grado

esto se consigue mediante
$x = g(y) = my^2$

$\lim_{y\to 0} f(g(y), y) = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{m^2y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{(m^2+1)y^4} = \frac{m}{m^2+1}$

depende de m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$ no existe

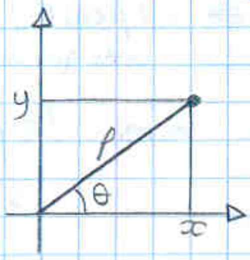
- Coordenadas polares

En los ejemplos anteriores deciamos que no existia el límite cuando éste dependía de m, donde m era el gradiente de la curva donde hallabamos el límite.

m representaba los distintos ángulos por los cuales las curvas se acercaban a $\vec{x}_0$

Cuando estamos calculando el límite en $\vec{0}$, es muy util y sencillo en algunos casos pasar x e y a polares y ver si el límite depende del ángulo θ

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$

Teorema

sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (0,0) \in A$

Son equivalentes

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = l$$

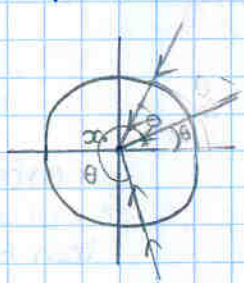
Definición de límite
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \partial > 0 \ / \ 0 < \|(x,y)\| < \partial \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

Pasar a polares
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \partial > 0 / 0 < \rho < \partial \Rightarrow |f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - l| < \varepsilon$

Ejemplo

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

en polares: $\displaystyle \lim_{\rho\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,\rho^2}{\rho^2} = 1$ $\quad$ no depende del ángulo



$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x-y}{x+y}$$

en polares: $\displaystyle \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta}$ $\quad$ el límite depende del ángulo. No existe límite global

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$$

ejemplo

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

en polares

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{3\rho^2 \cos^2\theta\, \rho \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} 3\rho \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = l$$

es equivalente a

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \,/$$
$$0<\rho<\delta \Rightarrow |f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) - l| < \varepsilon$$

tiene que cumplirse $\forall \theta$!

en nuestro ejemplo $\quad |3\rho\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 0| < \varepsilon \ \forall \varepsilon$?

$$3\rho \underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1} \underbrace{|\operatorname{sen}\theta|}_{\leq 1} < \varepsilon$$

$$3\rho\cos^2\theta|\operatorname{sen}\theta| \leq 3\rho < \varepsilon$$

cuando $\rho\to 0$

por lo tanto no depende de θ

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2) \qquad \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)?$$

en polares

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho\cos\theta}\operatorname{sen}\rho^2 = \lim_{\rho\to 0} \tan\theta \operatorname{sen}(\rho^2)$$

los θ's en el denominador pueden ser peligrosos!

en este caso, aunque ρ tienda a cero, $\tan\theta$ se puede disparar.
$\tan\theta \operatorname{sen}\rho^2$ no está acotada $\forall\theta$

se puede razonar rigurosamente: pág siguiente

Ejemplo

$$f(x,y) = \frac{y}{x} \operatorname{sen}(x^2+y^2) \qquad \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) \ ?$$

en polares

$$\lim_{\rho\to 0} \tan\theta \operatorname{sen}(\rho^2)$$

utilizando la siguiente propiedad:

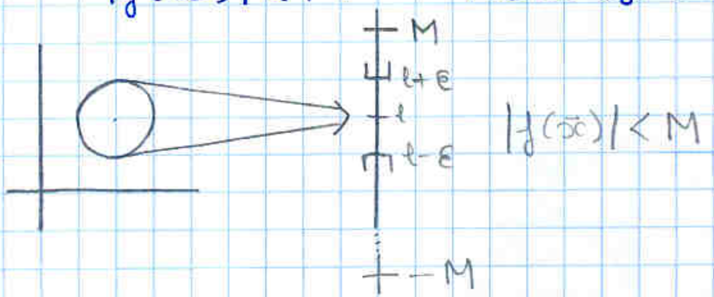
supongamos $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $x_0 \in A$

$$f: A \to \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{\bar{x}\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta>0,\ \exists\, M>0 \ /$$

$$|f(\bar{x})| < M \qquad \forall \vec{x} \in B_\delta(\bar{x}) \setminus \{x_0\}$$



veamos, por reducción al absurdo, que f no tiene límite

supongamos $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = l$

$$\overset{\text{propiedad}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta>0,\ M>0 \ /$$

$$\forall (x,y) \in B_\delta(0,0)\setminus\{0,0\} \quad |f(x,y)| \leq M$$

si $(x,y) \in B_\delta(0,0) \setminus \{0,0\}$

significa $0 \leq \|(x,y)\| \leq \delta$

la propiedad anterior en polares

$$\text{si } 0 < \rho < \delta \Rightarrow |f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)| \leq M$$

$$|\tan\theta \operatorname{sen}\rho^2| \leq M$$

vamos a fijar ρ $\quad 0<\rho<\delta \Rightarrow \operatorname{sen}\rho^2 > 0$

$$|\tan\theta| \leq \frac{M}{|\operatorname{sen}\rho^2|}$$

$$|\tan\theta| \leq \text{cte}$$

contradicción

Problemas $\lim_{x \to 0} f(x,y)$

$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y}$ $\quad f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^6+y^3}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(x+y)\right) & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y}$$

en polares

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho \operatorname{sen}\theta)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho}{\rho\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

$$\theta = 0 \longrightarrow f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho}{\rho\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1$$

$$\theta = \pi/6 \longrightarrow f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho}{\rho\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} \longrightarrow 0$$

por lo tanto depende de $\theta \Rightarrow \nexists$ limite

tambien se podia hacer por curvas

$$y = x \longrightarrow f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+x} = \frac{2x}{x+1} \qquad \lim_{x \to 0} f(x,x) = 0$$

$$y = x^2 \longrightarrow f(x,x^2) = \frac{x^2+x^4}{x^2+x^2} = \frac{1+x^2}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

por lo tanto depende de la curva $\Rightarrow \nexists$ limite

---

$$f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^6+y^3}$$

$$x = y^{1/2} \qquad f(y^{1/2}, y) = \frac{(y^{1/2})^4 y}{(y^{1/2})^6 + y^3} = \frac{y^2 y}{y^3+y^3} = \frac{y^3}{2y^3} = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{y = x \qquad f(x,x) = \frac{x^5}{x^6+x^3} = \frac{x^3 x^2}{x^3(x^3+1)}}$$

$$\cancel{y = mx \qquad f(x,mx) = \frac{x^4 mx}{x^6+(mx)^3} = \frac{mx^5}{x^6+m^3x}}$$

$$y = mx^2 \qquad f(x, mx^2) = \frac{x^4 mx^2}{x^6+m^3x^6} = \frac{mx^6}{x^6(1+m^3)} = \frac{m}{1+m^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) \text{ no existe}$$

3) $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 1 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$

en polares:

$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$

$|f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)| = \rho^2 \cdot \underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\operatorname{sen}\theta|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq \rho^2 \to 0$

$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$ no es continua pues no coincide con $f(0,0)$

Pero eso es irrelevante para calcular el límite

4) $f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(x+y)\right) & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$

estudiando cada función coordenada por separado

$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to 0} \operatorname{sen}(x+y) = 0$

$\Rightarrow \exists \lim f(x,y)$ y vale cero

la función es continua en $(0,0)$ pues $f(0,0) = 0$

$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = f(0,0)$

5) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |x| \to 0$ cuando $(x,y) \to 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

como $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = f(0,0)$ la función es continua en $(0,0)$

en los puntos $(x,0)$ con $x \neq 0$
p. ej en $(1,0)$ el límite no existe

La función es continua en todos los puntos menos $(x,0)$ con $x \neq 0$

LIMITES DE SUCESIONES EN $\mathbb{R}^2$

• Definición: Sucesión en $\mathbb{R}^2$

una sucesión en $\mathbb{R}^2$ es una colección de pares de números reales

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

• Límite de una sucesión en $\mathbb{R}^2$

$$\{(x_n, y_n)\} \text{ tiene límite } (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2 \iff \begin{cases} x_n \to l_1 \text{ en } \mathbb{R} \\ y_n \to l_2 \text{ en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Definición formal

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (l_1, l_2)$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \ n \geq n_0 \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (l_1, l_2)\| < \varepsilon$$

Ejemplo:

$\{(a^n, na^n)\}_{n=1}^{\infty} \qquad 0 < a < 1$

$$a^n \longrightarrow 0$$

$$na^n \xrightarrow[\sqrt[n]{na^n} = \sqrt[n]{n}\, a = a < 1]{\text{teorema de la raíz}} 0$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} (a^n, na^n) = (0,0)$$

Ejemplo:

$\left\{\left(\frac{(-1)^n}{n}, (-1)^n\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (-1)^n$ no converge

$\nexists \lim$

Ejemplo:

$\left\{\left(e^{-n}, \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left.\begin{aligned} e^{-n} &\to 0 \\ \cos\left(\tfrac{1}{n}\right) &\to 1 \end{aligned}\right\} \left(e^{-n}, \cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \to (0,1)$$

• Teorema (caracterización sucesional del límite)

Sea: $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
A abierto, $(a,b) \in A$

supongamos: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$

sea: $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \in A$ tal que: $\left.\begin{array}{l} x_n \to a \\ y_n \to b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a,b)$

entonces: consideremos la función real $\{f(x_n, y_n)\}$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l$

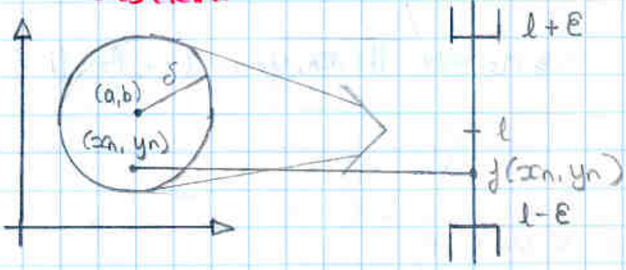
el recíproco no es cierto

RESUMEN

sea $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$

sea $x_n \to a$, $y_n \to b$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l$



Caso similar: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

supongamos $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

supongamos: $a_n \to x_0$

entonces: $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$

el recíproco no es cierto

ejemplo $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{1/n}$?

sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

y tenemos que $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$

$\xRightarrow{\text{Teorema}} \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$

Se utiliza para probar que no existe límite

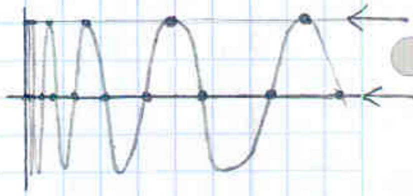
la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no tiene límite en $x = 0$

sin embargo:

sea $a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$ y $b_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$

hemos encontrado dos sucesiones que tienden a cero en el punto donde calculamos el límite (que es cero) y la función de esas sucesiones tiende a límites distintos $\Big\}$ $\nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$



- **Definición continuidad**

$A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $(a,b) \in A$

$f: A \to \mathbb{R}$

se dice que f es continua en el punto (a,b) si:

a) existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Características:
- Las funciones continuas no tienen saltos
- pequeños cambios en (x,y) implican pequeños cambios en $f(x,y)$

ejemplo:
$$f(x,y) \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq 0 \\ 1 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

se cumple a) $\quad \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

no se cumple b) $\quad f(0,0) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ no es continua en $(0,0)$

- **Teorema de Weierstrass**

Sea $f: K \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continua}}$
donde $K \in \mathbb{R}^2$ $\boxed{\text{cerrado y acotado}}$ $\Big\}$ Hipótesis que se deben cumplir para que el teorema sea válido

se cumple:

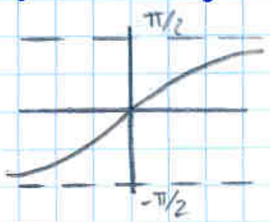
a) $f(K)$ es cerrado y acotado $\left(\text{donde } f(K) = \{f(\bar{x}) / \bar{x} \in K\}\right)$

b) f alcanza sus extremos

$$\exists\, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K \;/\; \begin{matrix} f(\bar{x}_1) & \leq & f(\bar{x}) & \leq & f(\bar{x}_2) \\ m & \leq & f(\bar{x}) & \leq & M \end{matrix} \quad \forall \bar{x} \in K$$

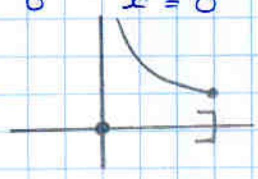
ejemplos donde las hipótesis no se cumplen

(1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$



falla una hipótesis ($\mathbb{R}$ no es acotado)
no se cumple Weierstrass
(no alcanza sus extremos)
(aunq. si q es acotada)

(2) $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \in \,]0,1[\\ 0 & x = 0 \end{cases}$



falla una hipótesis (f no es continua)
no se cumple Weierstrass
(no es acotada)

Ejercicios

calcular el límite en cero, si existe.

a) $$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^2-y^2}$$

por curvas

$$f(x, mx) = \frac{x^2\, m^2x^2}{x^2m^2x^2 + x^2 - m^2x^2} = \frac{m^2x^4}{m^2x^4+(1-m^2)x^2}$$

~~en polares~~

$$\cancel{f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\mathrm{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\cos^2\theta} = \frac{\rho^4(\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta)}{\rho^4(\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta)}}$$

$$= \frac{m^2x^4}{m^2x^4+((1-m)x)^2} = \frac{m^2x^2}{m^2x^2+(1-m)^2}$$

para $m \neq 1$ $\quad \frac{m^2x^2}{m^2x^2+(1-m)^2} \to 0$

para $m = 1$ $\quad \frac{m^2x^2}{m^2x^2+(1-m)^2} \to 1$

el límite no existe

b) $$\frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$$

este es mas difícil

por polares y curvas no se llega a nada

Lo que se hace es poner el nominador en términos del denominador

$$|x| = \sqrt[6]{x^6} \leq \sqrt[6]{x^6+y^4}$$

$$|y| = \sqrt[4]{y^4} \leq \sqrt[4]{x^6+y^4}$$

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^6+y^4}\right| \leq \frac{(x^6+y^4)^{2/6}(x^6+y^4)^{3/4}}{x^6+y^4} = \frac{(x^6+y^4)^{13/12}}{(x^6+y^4)^{1}} = (x^6+y^4)^{1/12} \xrightarrow{(x,y)\to 0} 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y^2}{x^6+y^4} = 0$$

TEMA 4. FUNCIONES DIFERENCIABLES

• **Derivadas parciales**

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $(a,b) \in A$
$f: A \to \mathbb{R}$

• se llama derivada parcial primera de f en el punto (a,b) al límite, si existe:

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}}$$

y se denota
$$D_1 f(a,b) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

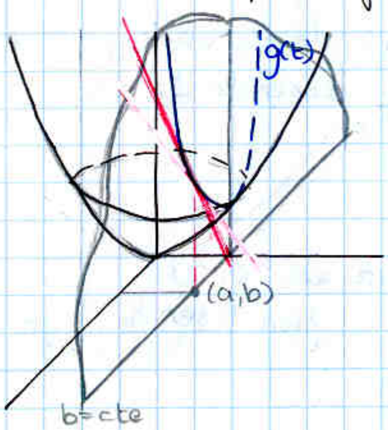
• se llama derivada parcial segunda de f en (a,b) al límite, si existe:

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}}$$

y se denota
$$D_2 f(a,b) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

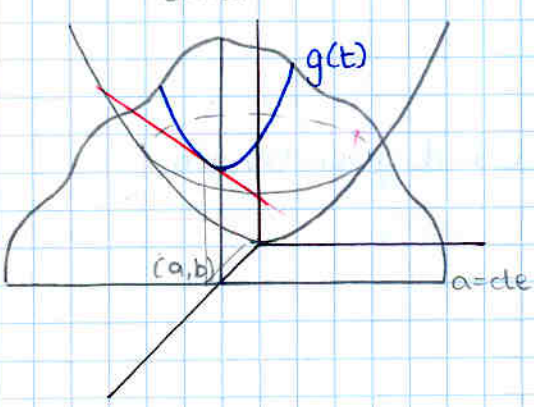
Gráficamente:

para $f(x,y) = x^2 + y^2$



para un determinado valor de b (y es cte)
sea $g_b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g_b(t) := f(a+t,b)$

$$D_1 f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g_b(t) - g_b(0)}{t} = g_b'(0)$$



para un determinado valor de a (x es cte)
sea $g_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g_a(t) := f(a,b+t)$

$$D_2 f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g_a(t) - g_a(0)}{t} = g_a'(0)$$

Ejemplos:

(1) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)\, e^{x}$

$$D_1 f(x,y) = y \cos(xy)\, e^{x} + \operatorname{sen}(xy)\, e^{x}$$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Además

$\exists \lim_{(x,y)\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ ya que $\left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |x|$

luego f es continua en $(0,0)$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

- tiene derivadas parciales en $(0,0)$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

- La función no es continua en $(0,0)$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pues, considerando curvas $y = mx^2$

$\lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{m}$ depende de m

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- No tiene derivada parcial primera en $(0,0)$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t \operatorname{sen} 1/t}{t} = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{t} \ \nexists$$

- Es continua en $(0,0)$

$$\exists \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = f(0,0)$$

$\boxed{\text{No existe relación entre continuidad y existencia de derivadas parciales}}$

• $\boxed{\text{Derivadas direccionales}}$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto $(a,b) \in A$
$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq 0$

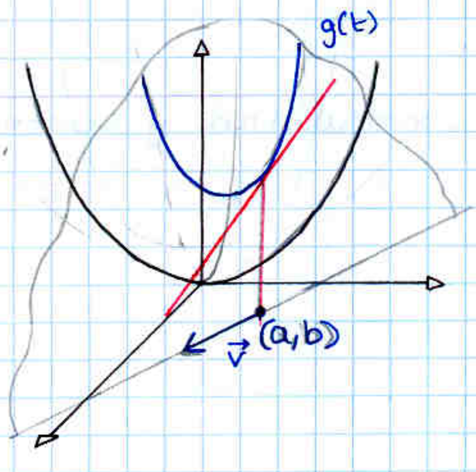
Supongamos que $\|\vec{v}\| = 1$ (esto no hace falta)

Se llama derivada direccional de f en el punto (a,b) en la dirección de $\vec{v}$ al límite, si existe:

$$D_v f(a,b) := \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b)+t\vec{v}) - f(a,b)}{t}$$

$$= \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t}}$$

Gráficamente:



$g_{\vec{v}}(t) = f(a+tv_1, b+tv_2)$

$D_v f(a,b)$

Casos particulares

$\vec{v} = \vec{e_1} = (1,0)$ $\quad D_{\vec{e_1}} f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = D_1 f(a,b)$

$\vec{v} = \vec{e_2} = (0,1)$ $\quad D_{\vec{e_2}} f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t} = D_2 f(a,b)$

Nota: en un punto
Pueden existir las derivadas parciales pero no existir todas las derivadas direccionales

ejemplo

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2/y & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$$

- no es continua en $(0,0)$ (ya visto)
- Derivada direccional existe en todas las direcciones

$$\exists D_v f(0,0) \quad \forall \vec{u}\neq(0,0)$$

sea $\vec{v}=(v_1, v_2)$

- para $v_2 \neq 0$

$$D_{(v_1,v_2)} f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1, tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(tv_1)^2/(tv_2)-0}{t}$$

$$=\frac{v_1^2}{v_2}$$

- para $v_2=0$

$$D_{(v_1,0)} f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,0)-f(0,0)}{t}=\lim\frac{0}{t}=0$$

Sigue sin haber relación entre continuidad y existencia de derivadas direccionales

LA DIFERENCIAL

Caso Real

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalo abierto $]x_1, x_2[$

- **f es derivable en $x=a$ si:**

$$\exists\ f'(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \qquad \text{sust } x-a=t$$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

es decir:

$$0 = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \overbrace{f'(a)}^{\text{cte}}\right)$$

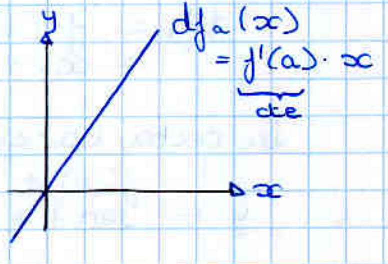
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-(f(a)+\underbrace{f'(a)(x-a)}_{df_a(x-a)})}{x-a} = 0$$

- **f es diferenciable en $x=a$ si:**

Existe la función

$$df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \mapsto f'(a)\cdot h$$

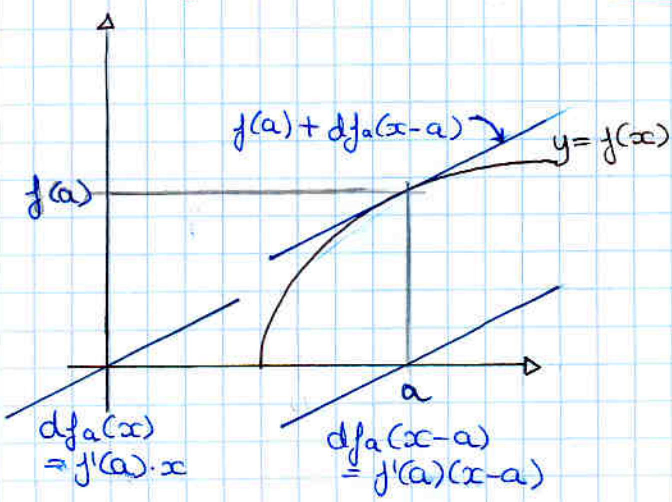


- se llama diferencial de f en $x=a$
- es lineal (matriz 1×1 $f'(a)$)

se cumple:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-[f(a)+df_a(x-a)]}{x-a} = 0}$$

el nominador se aproxima aún más rápido que el denominador



la ecuación de la recta tangente a f en el punto $x=a$ es precisamente

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

y por el límite vemos que se aproxima muy bien a $f(x)$ cuando $x\to a$.
¡se aproxima incluso más que x a a cuando $x\to a$!

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \text{recta tangente (diferencial colocada)}}{x-a} = 0$$

• Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$

Son equivalentes

1) f es derivable en $x = a$

$$\exists \; f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

NOTA: En $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} - \vec{a}$ es un vector. No se pueden dividir vectores

2) f es diferenciable en $x = a$, es decir, existe una aplicación lineal

$$df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$df_a(h) = f'(a)h \quad (h \in \mathbb{R})$$

tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x-a)}{x - a} = 0$$

en $\mathbb{R}^n$ como aquí el límite es cero, se puede considerar la norma. Ahora ya tiene sentido dividir por $\|\vec{x} - \vec{a}\|$

ejemplo:

Calcula df_1 para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$df_1 = f'(1) \cdot x = \cos 1 \cdot x$$

la recta tangente es:

$$y = \underbrace{\operatorname{sen} 1}_{f(a)} + \underbrace{\cos 1 \, (x - 1)}_{df_a(x-a)}$$

• Diferencial de una función en 2 variables

→ Derivabilidad y diferenciabilidad

• Derivable en $\mathbb{R}^2$ no tiene sentido: $\frac{f(\vec{x})-f(\vec{a})}{\vec{x}-\vec{a}}$ si $\vec{x}-\vec{a} \subset \mathbb{R}^2$ $\frac{1}{\vec{x}-\vec{a}}$ no existe

• Teniendo en cuenta:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$: $a_n = (x_n, y_n)$

$$a_n \to l \Rightarrow \|a_n\| \to \|l\|$$
$$\|a_n\| \to l \not\Rightarrow a_n \to l$$

sin embargo, cuando $l = 0$

$$\|a_n\| \to 0 \Leftrightarrow a_n \to 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-df_a(x-a)}{x-a} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)-f(a)-df_a(x-a)}{x-a}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-df_a(x-a)}{|x-a|} = 0$$

esta nueva expresión de diferenciabilidad se puede extender fácilmente a $\mathbb{R}^n$ tomando normas

• Definición: Función diferenciable en $\mathbb{R}^2$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $(a,b) \in A$ $f: A \to \mathbb{R}$

f es diferenciable en (a,b) si:

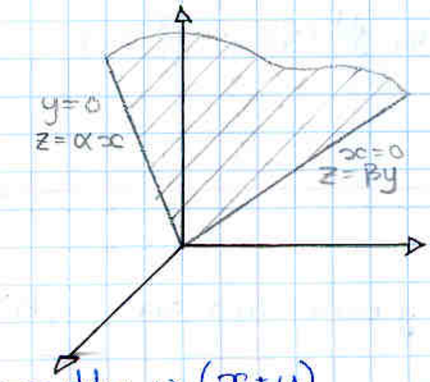
$\exists$ función lineal $df_{(a,b)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-df_{(a,b)}(x-a, y-b)}{\|(\bar{x}-\bar{a}, y-b)\|} = 0$$

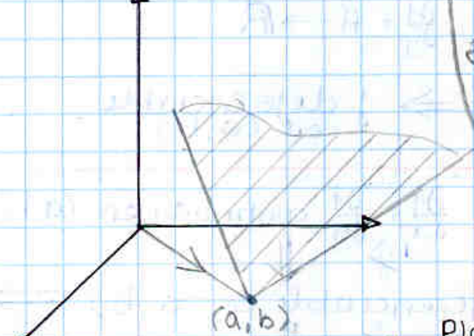
$$\|(x-a, y-b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b^2)}$$

• Gráficamente:

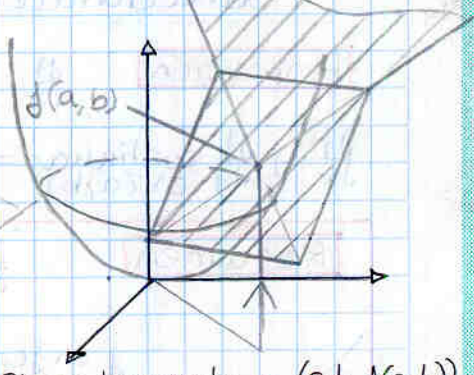
$df_{(a,b)}$ es lineal $\Rightarrow$ matriz asociada $(\alpha \ \beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$ es un plano



$z = df_{(a,b)}(x, y) = \alpha x + \beta y$



$z = df_{(a,b)}(x-a, y-b)$



Plano tangente a $(a,b,f(a,b))$

$$\boxed{z = f(a,b) + df_{(a,b)}(x-a, y-b)}$$

· **Vector gradiente:**

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right)$$

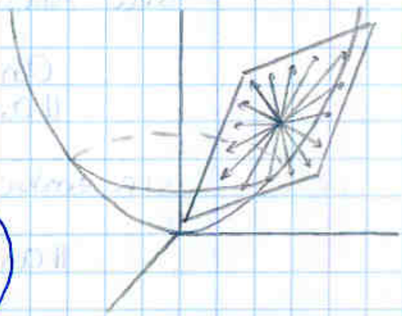
además, es la matriz asociada a $df_{(a,b)}$ en base canónica

· **Teorema**

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto; $(a,b) \in A$

f diferenciable en $(a,b) \Rightarrow$ existen todas las derivadas direccionales de f en (a,b)

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(a,b) = df_{(a,b)}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \neq 0}$$



Consecuencia

$\forall \vec{v} \neq 0$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = df_{(a,b)}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle u, v \rangle = u^t \cdot v}$$

$$= \langle \nabla f(a,b) \ , \ \vec{v} \rangle$$

sólo si f es diferenciable

$$\boxed{D_{(v_1,v_2)} f(a,b) = df_{(a,b)}(v_1, v_2) = \langle \nabla f(a,b) \ , \ (v_1, v_2) \rangle}$$

· **Proposición**

esta vez sí!

$\boxed{f \text{ diferenciable en } (a,b) \Rightarrow f \text{ continua en } (a,b)}$

En efecto:

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= df_{(a,b)}(\vec{v})$$

$$= df_{(a,b)}(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2)$$

como $df_{(a,b)}$ es lineal

$$= v_1 \, df_{(a,b)}(\vec{e}_1) + v_2 \, df_{(a,b)}(\vec{e}_2)$$

$$= v_1 \, D_{\vec{e}_1} f(a,b) + v_2 \, D_{\vec{e}_2} f(a,b)$$

$$= v_1 \, D_1 f(a,b) + v_2 \, D_2 f(a,b)$$

como $D_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$

$$= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

no continua en (a,b)
$\Rightarrow$ no diferenciable en (a,b)
pero sí tiene derivadas direccionales

Proposición $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en $(a,b) \Rightarrow f$ diferenciable en (a,b)

Resumen

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en (a,b)

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

f diferenciable en $(a,b) \Longrightarrow f$ continua en (a,b) ($\not\Longleftarrow$)

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

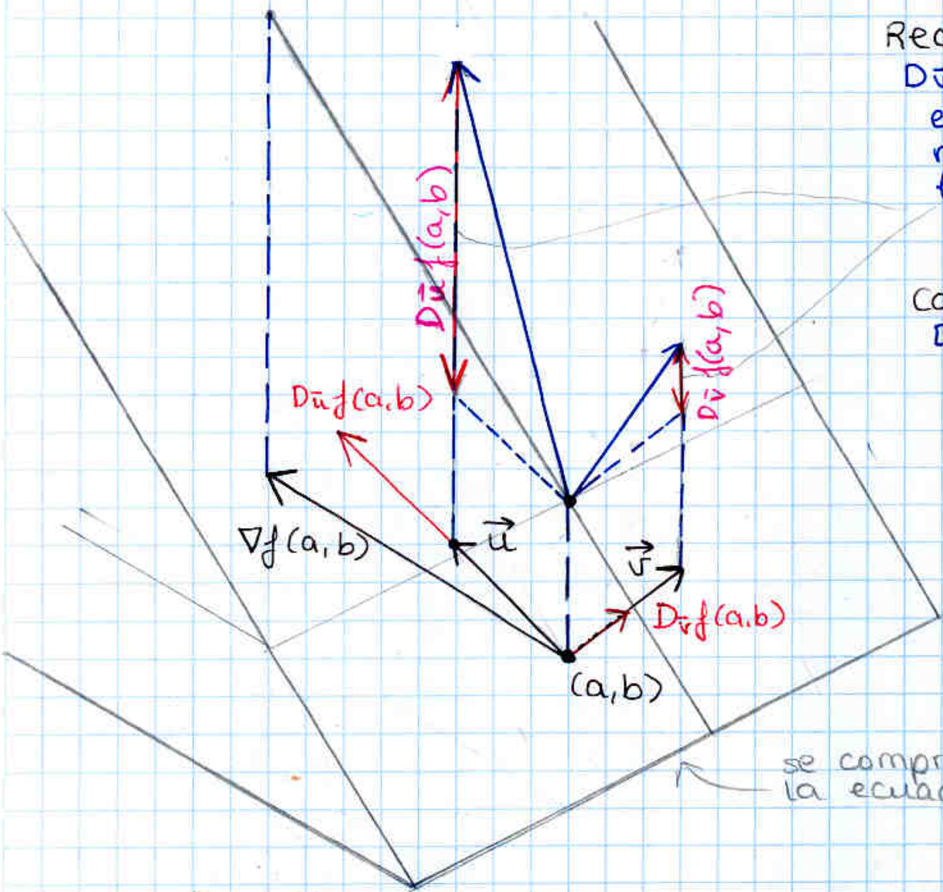
$\exists D_{\vec{v}} f(a,b) \ \forall \vec{v} \neq 0$ (derivadas direccionales)

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ (derivadas parciales)

Sólo si f es diferenciable:

①	$D_{\vec{v}} f(a,b) = \langle \nabla f(a,b), \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \neq 0$
②	$D_{\vec{v}} f(a,b) = df_{(a,b)}(\vec{v})$



Recuerda:
$D_{\vec{v}} f(a,b)$ es ESCALAR
en el dibujo se
representa mediante
las distancias en rojo.

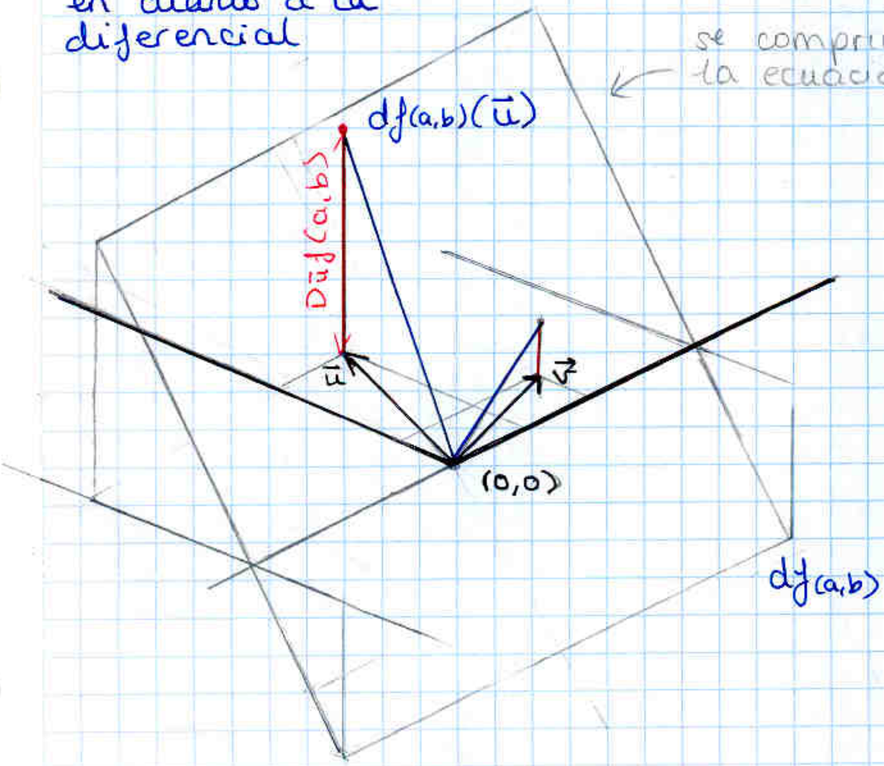
Cambio respecto a física:
$D_{\vec{v}} f(a,b)$ representa
el cambio de la función
por unidad de vector $\vec{v}$,
es decir, depende
de su módulo.

si $|\vec{u}|$ o $|\vec{v}| = 1$,
$D_{\vec{u}} f(a,b)$ habría
sido la proyección
de $\nabla f(a,b)$

se comprueba muy bien
la ecuación ①

en cuanto a la
diferencial

se comprueba
la ecuación ②

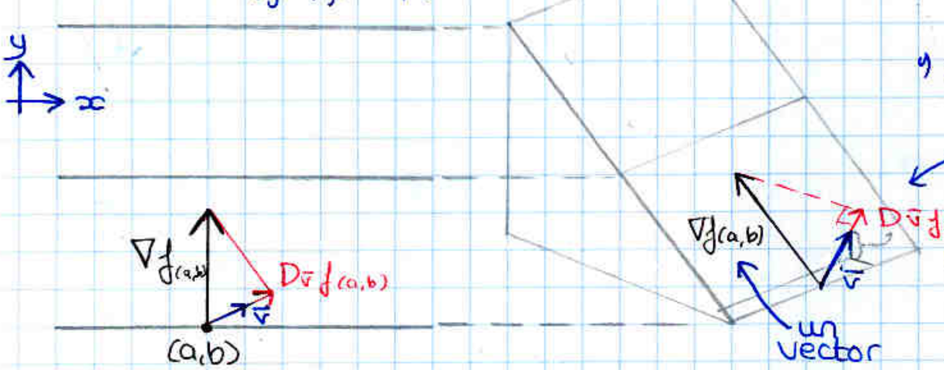


PRIMER INTENTO

solo si f es diferenciable

$$\boxed{\begin{array}{c} D_{\vec{v}} f_{(a,b)} = \langle \nabla f(a,b), \vec{v} \rangle \\ \hline df_{(a,b)}(\vec{v}) \overset{\parallel}{=} D_{\vec{v}} f_{(a,b)} \end{array}} \quad \forall \vec{v} \neq 0$$

ej $f(x,y) = y$ $\quad \nabla f(x,y) = (1,0)$



si $\vec{v}$ no es unitario, $D_{\vec{v}} f_{(a,b)}$ no es la proyección

un vector

un escalar que indica la variación POR UNIDAD de vector ($\vec{v}$)

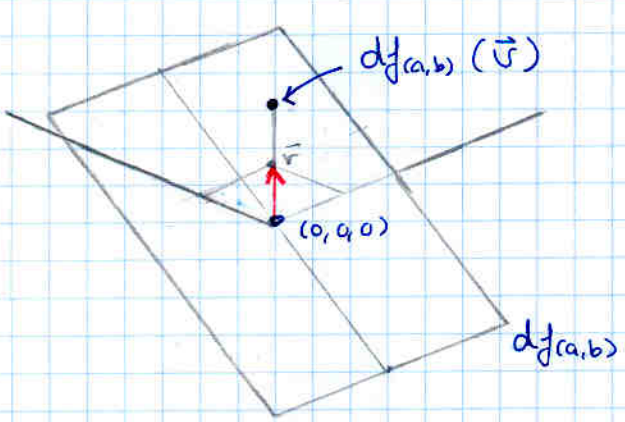
en cuanto a la diferencial:

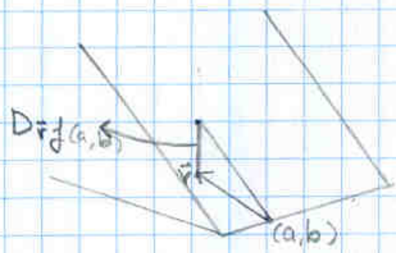
en el dibujo esta mal (∇f no es preciso)

el valor de $D_{\vec{v}} f(a,b)$ será igual a la altura de la punta de $\vec{v}$ menos la de (a,b).

Por definición:

$$D_{\vec{v}} f_{(a,b)} = \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b)+t\vec{v}) - f(a,b)}{t}$$





vemos que $df_{(a,b)}(\vec{v}) = D_{\vec{v}} f(a,b)$

$$\begin{aligned} & df_{(a,b)}(\vec{v}) \\ &= df_{(a,b)}(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) \\ &= v_1\, df_{(a,b)} \vec{e}_1 + v_2\, df_{(a,b)} \vec{e}_2 \\ &= v_1\, D_{\vec{e}_1} f(a,b) + v_2\, D_{\vec{e}_2} f(a,b) \\ &= D_{\vec{v}} f(a,b) \end{aligned}$$

lo que cambia respecto a física es que la derivada direccional no depende sólo de la dirección sino tambien del módulo del vector, ya que indica el cambio por unidad de ese vector.

11 - 1

Ejemplo

Plano tangente a $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,1)$

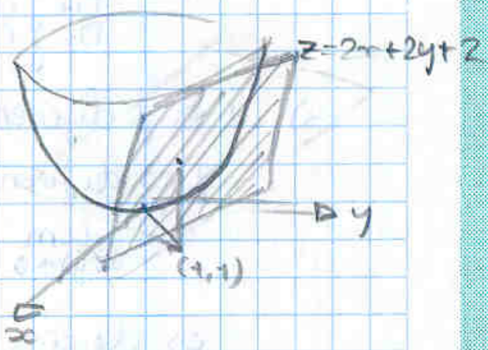
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

Son continuas en cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ es diferenciable en cualquier punto (x,y)

$$df_{(1,1)}(x,y) = \langle \nabla f(1,1), (x,y) \rangle$$
$$= \langle (2,2), (x,y) \rangle$$
$$= 2x + 2y$$



Plano tangente:

$$z = f(1,1) + df_{(1,1)}(x-1, y-1)$$
$$z = f(1,1) + \langle \nabla f(1,1), (x-1, y-1) \rangle$$
$$= 2 + \langle (2,2), (x-1, y-1) \rangle$$
$$= 2 + 2x - 2 + 2y - 2$$
$$z = 2x + 2y - 2$$

Ejemplo

$f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ Plano tangente en $(1, 2, f(1,2))$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \operatorname{sen} y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x \cos y \end{aligned}\right\}$$

Son continuas en cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

plano tangente:

$z = \langle (e \operatorname{sen} 2, e \cos 2), (x-1, y-2) \rangle$

Ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

1) f es continua en $(0,0)$?
2) Existen $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$?
3) Existen $D_v f(0,0)$ $\forall v \neq 0$?
3) f es diferenciable en $(0,0)$?

---

1) ¿$\exists \lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$?

en polares: $f(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^2}$

$= \rho \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \leq \rho \, |\cos^2\theta| \, |\operatorname{sen}\theta| \leq \rho$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

2) Existe $D_v f(0,0)$ $\forall v \neq 0$?

$$v = (v_1, v_2) \neq 0$$

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)^2 tv_2}{(tv_1)^2+(tv_2)^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 (v_1)^2 v_2}{t^3 (v_1{}^2 + v_2{}^2)}$$

$$= \frac{v_1{}^2 v_2}{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

En particular, las parciales son

$$D_1 f(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 0$$
$$D_2 f(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0$$

3) ¿ Es f diferenciable en $(0,0)$?

f es diferenciable si existe

es igual a $df_{(0,0)}(x,y)$ sólo si existe

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - \overset{0}{f(0,0)} - \langle \nabla f(\overset{\to 0}{0,0}), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

si el límite es cero $\langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle = df_0(x,y)$

si no es cero $\langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle \neq df_0(x,y)$ no existe

es decir, si existe

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

en polares

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^3} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^3}} = \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \quad \text{depende de } \theta$$

$\Rightarrow$ el límite no existe $\Rightarrow$ f no es diferenciable en $(0,0)$

Otra forma de probar que f no es diferenciable en $(0,0)$

supongamos que lo es $\Rightarrow D_v f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v\rangle$ $\forall v \neq 0$ $(*)$

Pero $D_v f(0,0) = \dfrac{v_1{}^2 v_2}{v_1{}^2 + v_2{}^2}$

y $\nabla f(0,0) = (D_1 f(0,0), D_2 f(0,0)) = (0,0)$

luego por $*$

$$\frac{v_1{}^2 v_2}{v_1{}^2+v_2{}^2} = \langle (0,0), (v_1, v_2)\rangle = 0 \quad \forall v$$

no es cierto para algunos v

ejemplo:

$f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$

a) f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$
(plano tangente en $(1, 2, e^1 \operatorname{sen} 2)$)

b) ¿Ayuda eso a calcular?
$D_{(1,2)} f(1,1)$

a) $D_1 f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$
$D_2 f(x,y) = e^x \cos y$

son continuas en (x,y), $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ f es diferenciable en (x,y), $\forall (x,y)$
Ecuación del plano tangente en $(1, 2, f(1,2))$

plano tangente $\boxed{(x,y,z) \,/\, z = f(1,2) + \langle \nabla f(1,2), \underline{(x-1, y-2)} \rangle}$

$\nabla f(1,2) = (e \operatorname{sen} 2, e \cos 2)$

$\langle \nabla f(1,2), (x-1, y-2) \rangle$
$= e \operatorname{sen}(2) x + e \cos(2) y - e(\operatorname{sen} 2 + 2\cos 2)$

$\boxed{z = e \operatorname{sen}(2) x + e \cos(2) y - 2e \cos(2)}$

b) como f es diferenciable en $(1,1)$
$\Rightarrow D_v f(1,1) = \langle \nabla f(1,1), v \rangle = df_{(1,1)}(v) \quad \forall v$

$\nabla f(1,1) = (e \operatorname{sen} 1, e \cos 1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} D_{(1,2)} f(1,1) &= \langle (e \operatorname{sen}(1), e \cos(1)), \underline{(1,2)} \rangle \\ &= e \operatorname{sen} 1 + 2e \cos 1 \end{aligned}}$

- **Diferencial de una función $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**

- Definición:

  f es diferenciable en $\vec{a} \in A$ si existe una aplicación lineal

$$df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - df_a(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

- Proposición:

  sea $f: A \to \mathbb{R}^m = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_m) \qquad f_i : A \to \mathbb{R}$

$$\exists\, df_a \Longleftrightarrow \exists\, d(f_1)_a, d(f_2)_a, \dots, d(f_m)_a$$

y además

$$df_a \equiv (d(f_1)_a, d(f_2)_a, \dots, d(f_m)_a)$$

- matriz de df_a

$$d(f_i)_a : A \to \mathbb{R}$$
$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$d(f_i)_a = \langle \nabla f(a), v \rangle = (D_1 f_i(a), D_2 f_i(a), \dots, D_n f_i(a)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$df_a(v) = \begin{pmatrix} d(f_1)_a(v) \\ d(f_2)_a(v) \\ \vdots \\ d(f_m)_a(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(a), v \rangle \\ \langle \nabla f_2(a), v \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(a), v \rangle \end{pmatrix}$$

$$df_a(v) = \begin{array}{c} df_{1a} \\ df_{2a} \\ \\ \\ df_{ma} \end{array} \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

se llama matriz jacobiana.

si f no es diferenciable, la matriz puede existir, pero obviamente, no es igual a la diferencial

la matriz jacobiana se denota $f'(a)$

$$f'(a) = (D_j f_i(a))_{i,j} \quad \begin{matrix} (1 \le i \le m) \\ (j \le i \le n) \end{matrix}$$
$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} \quad \begin{matrix} (1 \le i \le m) \\ (j \le i \le n) \end{matrix}$$

ejemplo

$$f(x,y) = (e^{xy} \operatorname{sen}(x), \cos(xy)) \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

1) f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$
2) $f'(1,1)$

1) f es diferenciable si lo es coordenada a coordenada.

$$f_1(x,y) = e^{xy} \operatorname{sen} x \qquad f_2(x,y) = \cos(xy)$$

$$D_1 f_1(x,y) = y e^{xy} \operatorname{sen} x + e^{xy} \cos x$$
$$D_2 f_1(x,y) = x\, e^{xy} \operatorname{sen} x$$

$$D_1 f_2(x,y) = -y \operatorname{sen}(xy)$$
$$D_2 f_2(x,y) = -x \operatorname{sen}(xy)$$

derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow f$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

2) $$f'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x,y) & D_2 f_1(x,y) \\ D_1 f_2(x,y) & D_2 f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \cdot (y \operatorname{sen} x + \cos x) & e^{xy} x \cdot \operatorname{sen}(x) \\ -y \cdot \operatorname{sen}(xy) & -x \operatorname{sen}(xy) \end{pmatrix}$$

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} e(\operatorname{sen} 1 + \cos 1) & e \operatorname{sen} 1 \\ -\operatorname{sen} 1 & -\operatorname{sen} 1 \end{pmatrix}$$

3) $$\Rightarrow df_{(1,1)}(v_1, v_2) = f'(1,1)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

'plano' tangente a $(1, 1, f(1,1))$

$$z \in \mathbb{R}^2 = f(1,1) + f'(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f = (f_1, f_2)$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \cos(xy)$$

1) Continuidad f en $(0,0)$
2) Derivadas parciales en $(0,0)$
3) Diferenciabilidad en $(0,0)$

---

1) • $f_1(x,y)$ es continua en $(0,0)$?

$$\exists \lim_{(x,y)\to 0} f_1(x,y) = f_1(0,0) = 0 \ ?$$

en polares

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \rho \cos^3\theta = 0$$

$$|\rho \cos^3\theta| \leq \rho |\cos^3\theta| \leq \rho \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to 0} f_1(x,y) = 0$$

sí es continua

• f_2 es claramente continua en todo $\mathbb{R}^2$

2) $$D_1 f_1(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3/t^2 - 0}{t} = 1$$

$$D_2 f_1(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(0,t) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f_2(x,y) = -y \operatorname{sen}(xy) \\ D_2 f_2(x,y) = -x \operatorname{sen}(xy) \end{array}\right\} \begin{array}{l} D_1 f_2(0,0) = 0 \\ D_2 f_2(0,0) = 0 \end{array}$$

esto no se podía hacer con f_1, porque la derivada parcial de f_1

$$D_1 f_1(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

no existe $\lim_{(x,y)\to 0} D_1 f(x,y)$ (por polares)

pero ahí estamos viendo si la derivada parcial es continua! es más fuerte que lo que hemos hecho nosotros

La derivada parcial NO es continua

3) f_1 es diferenciable?

$$(*)\ \exists \lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 ?$$

$$\nabla f_1(0,0) = (1,0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - \langle (1,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3 - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{-xy^2}{x^2+y^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

en polares

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{-\rho\cos\theta\,\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2\rho} = \lim_{\rho\to 0} -\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

depende de θ, por lo tanto, no existe (*)

f_1 no es diferenciable $\Rightarrow$ f no es diferenciable

IV-17

- **Regla de la cadena**

  - $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in A$
  - $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, $b \in B$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$f(a) \subseteq B$

(esta definida la composición $g \circ f: A \to \mathbb{R}^k$

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

- Teorema:

$\left.\begin{array}{l} f \text{ diferenciable en } a \\ g \text{ diferenciable en } b = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ diferenciable en a

y además $\boxed{d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \cdot df_a}$

En $\mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, I, J intervalos abiertos, $a \in I$, $b = f(a) \in J$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ derivable en } a \\ g \text{ derivable en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ derivable en a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

- matrices jacobianas en $\mathbb{R}$
- en este caso $df_a(x) = f'(a) \cdot x$

En $\mathbb{R}^n$

$d(g \circ f)_a$	tiene	matriz	$(g \circ f)'(a)$
df_a	"	"	$f'(a)$
$dg_{f(a)}$	"	"	$g'(f(a))$

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)}$$

¡¡¡PRODUCTO DE MATRICES!!!

Por lo tanto, desarrollando el producto de matrices

$$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(a)}$$

se mantiene cte. en la suma

En la práctica

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad g(u, v, w)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x, y, z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$

$h = g \circ f$

entonces:

$$\frac{\partial h_i}{\partial \underset{\left(\substack{y\\z}\right)}{x}}(a) = \frac{\partial g_i}{\partial u}(f(a)) \frac{\partial u}{\partial \underset{\left(\substack{y\\z}\right)}{x}}(a) + \frac{\partial g_i}{\partial v}(f(a)) \frac{\partial v}{\partial \underset{\left(\substack{y\\z}\right)}{x}}(a) + \frac{\partial g_i}{\partial w}(f(a)) \frac{\partial w}{\partial \underset{\left(\substack{y\\z}\right)}{x}}(a)$$

ejemplo $(f \circ g)'(1,1)$?

$g(x,y) = (x^2+1, y)$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(u,v) = (u+v, u, v^2)$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

g y f diferenciables (derivadas parciales continuas) $\Rightarrow$ $f \circ g$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{(f \circ g)'(1,1) = f'(g(1,1)) \cdot g'(1,1)}$$

¡¡Hazlo sin mirar para practicar la matriz de Jacobi!!

calculemos las matrices:

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to g'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(1,1) = (2,1)$$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \to f'(g(1,1)) = f'(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$(f \circ g)'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

---

calculandolo directamente

$$(f \circ g)(x,y) = f(x^2+1, y) = (x^2+1+y, x^2+1, y^2)$$

$$(f \circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \to (f \circ g)'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Consecuencia:

$$d(f \circ g)_{(1,1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$$

$$d(f \circ g)_{(1,1)}(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2x \\ 2y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$f \circ g = ((f \circ g)_1, (f \circ g)_2, (f \circ g)_3)$ coordenadas de $f \circ g$

$$d[(f \circ g)_1]_{(1,1)}(x,y) = 2x + y$$
$$= \langle \nabla[(f \circ g)_1](1,1), (x,y) \rangle$$
$$= \nabla[(f \circ g)_1](1,1) \text{ es la 1}^{\text{era}} \text{ fila de } (f \circ g)'(1,1)$$

ejemplo

$$f(x,y,z) = (\overset{u}{x^2y}, \overset{v}{y^2}, \overset{w}{e^{-xz}}) \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$g(u,v,w) = (u^2 + v^2 - w) \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$g \circ f := h(x,y,z) = g(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$$
$$= g(f(x,y,z))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\underset{=h}{g \circ f}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Regla de la cadena:

$$h'(x,y,z) = g'(f(x,y,z)) \cdot f'(x,y,z)$$
$$= g'(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \cdot f'(x,y,z)$$
$$= g'(u,v,w) \cdot f'(x,y,z)$$

matrices jacobianas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}, & \frac{\partial g}{\partial v}, & \frac{\partial g}{\partial w} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} & \begin{matrix} u = f_1(x,y,z) \\ v = f_2(x,y,z) \\ w = f_3(x,y,z) \end{matrix} \end{array}$$

en la práctica:
si nos piden $\frac{\partial h}{\partial x}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{habría que escribirlo así: } \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y,z)) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)} \text{fijo} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} + \quad - \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$= 2u(2xy) + 2v(0) - (-ze^{-xz})$$
$$= 2(x^2y)(2xy) + 2(y^2)(0) - (-ze^{-xz})$$
$$= 4x^3y^2 + ze^{-xz}$$

tambien (en este caso) se puede componer primero

$$h(x,y,z) = g(f(x,y,z))$$
$$= (x^2y)^2 + (y^2)^2 - (e^{-xz})$$
$$= x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}$$

y luego derivar parcialmente respecto de x.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3y^2 + ze^{-xz}$$

ejercicio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable

se define $F(x,y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$

Demuestra que

$$x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + y^2 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

1ª forma (la pro)

$$f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = f(g(x,y))$$

$$g(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "F = f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

regla de la cadena

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

hemos llamado $u = g(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
& x^2 \frac{\partial F}{\partial y} + y^2 \frac{\partial F}{\partial y} \\
&= x^2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= x^2 \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{1}{x^2}\right) + y^2 \frac{\partial f}{\partial u} \left(-\frac{1}{y^2}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2ª forma: (la intuitiva)

imaginemos $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$F(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \cos\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

para una f genérica

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 \frac{\partial F}{\partial x} = f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \qquad y^2 \frac{\partial F}{\partial y} = -f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + y^2 \frac{\partial F}{\partial x} = f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

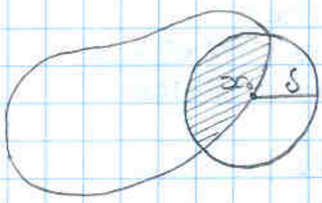
TEMA 5. PROBLEMAS DE EXTREMOS

- Extremo relativo. Definición

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
A subconjunto cualquiera

$x_0 \in A$ es extremo relativo de f en A si:
existe $\delta > 0$ tal que
o bien:
$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$ — x_0 es mínimo relativo
o bien:
$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$ — x_0 es un máximo relativo

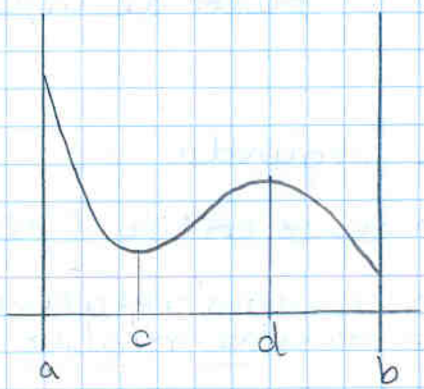
aunque x_0 esté en la frontera (A no será abierto) se toma la intersección



- Extremo absoluto. Definición

$x_0 \in A$ es un extremo absoluto de f en A si:
o bien
$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$ — x_0 es mínimo absoluto
o bien
$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$ — x_0 es un máximo absoluto

ejemplo:



$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

a, b son extremos absolutos

c, d son extremos relativos
(y en este ej no absolutos)

- En la práctica

A es abierto. se puede tomar $\delta > 0$ bastante pequeño
tal que $B_\delta(x_0) \subseteq A$
x_0 maximo absoluto $\Rightarrow$ x_0 maximo relativo.

- En $\mathbb{R}$

Teorema:

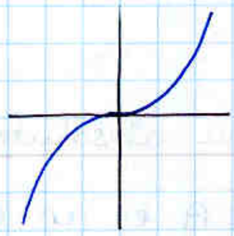
sea $f: I \to \mathbb{R}$
I intervalo abierto $]a,b[$
f derivable en I

$\boxed{x_0 \text{ extremo relativo} \Longrightarrow f'(x_0)=0}$

condición necesaria pero no suficiente

el recíproco no es cierto
ej:
$f(x)=x^3 \qquad f'(x)=3x^2$
$x=0 \Rightarrow f'(x)=0$
único punto crítico

pero $x=0$ es un punto de inflexión. No es máximo ni mínimo relativo
$f(x)<0 \quad \forall x<0$
$f(x)>0 \quad \forall x>0$
$f(0)=0$



Punto crítico:
x_0 es punto crítico si: $f'(x_0)=0$
un punto crítico puede ser: máximo relativo
mínimo relativo
punto de inflexion

Teorema
$f: I \to \mathbb{R}$ con derivada segunda
Supongamos que x_0 es un punto crítico $(f'(x_0)=0)$

a) si $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ es un mínimo relativo
b) si $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ es un máximo relativo

Para poder generalizar estos teoremas a $\mathbb{R}^2$, se necesitan antes algunas definiciones

- **Derivadas parciales sucesivas. Definición.**

supongamos $f: A \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales que definen funciones $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: A \to \mathbb{R}$

se obtienen las derivadas parciales sucesivas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Notación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_1(D_1 f) = D_{11} f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_2(D_2 f) = D_{22} f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_1(D_2 f) = D_{12} f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_2(D_1 f) = D_{21} f$$

- **Función de clase C^2. Definición.**

Una funcion f es de clase C^2 en A $\quad (f \in C^2(A))$ si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \to \mathbb{R} \quad \text{son continuas en } A \quad \forall i, j$$

$\equiv$ todas las derivadas parciales segundas

en el caso $\mathbb{R}^2$: $x_1 = x$, $x_2 = y$

- **Teorema**

sea $f \in C^2(A)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

en el caso de $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ejemplo

$$f(x,y) = e^{xy^2} \operatorname{sen}(x^2)$$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ b) ¿ $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} \operatorname{sen}(x^2) + e^{xy^2}\, 2x \cos(x^2)$$
$$= e^{xy^2} \left(y^2 \operatorname{sen}(x^2) + 2x \cos(x^2) \right)$$

$e^{xy^2}\, 2xy$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = e^{xy^2} (2y^3 x \operatorname{sen}(x^2) + 4y x^2 \cos(x^2) + 2y \operatorname{sen}(x^2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy^2} \operatorname{sen}(x^2)\, 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = e^{xy^2} (2xy^3 \operatorname{sen}(x^2) + 4y x^2 \cos(x^2) + 2y \operatorname{sen}(x^2))$$

---

ejercicio:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$D_{12} f(0,0) \neq D_{21} f(0,0)$$

¿Porque? No es funcion de clase C^2

Procedimiento:

1) $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$ calcularlas usando el limite de la definición.

2) $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$ calcularlas derivando normalmente $\forall (x,y) \neq 0$

3) $D_1(D_2 f)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{D_2 f(t,0) - D_2 f(0,0)}{t}$

$D_2(D_1 f)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{D_1 f(0,t) - D_1 f(0,0)}{t}$

se verá que noson iguales.

lo que sucede es que $D_{12} f$ ó $D_{21} f$ no son continuas en $(0,0)$

comprobarlo : ¿ $\underbrace{D_{12} f(0,0)}_{\text{ya lo tenemos}} = \lim_{(x,y) \to 0} D_{12} f(x,y)$?

¿ $D_{21} f(0,0) = \lim_{(x,y) \to 0} D_{21} f(x,y)$?

ya podemos generalizar los teoremas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{En } \mathbb{R}^2}$

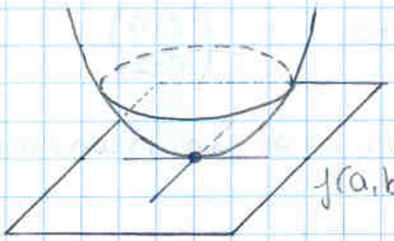
Teorema

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A abierto, f diferenciable.

$$\boxed{x_0 \text{ extremo relativo} \Longrightarrow \nabla f(x_0) = 0}$$

el gradiente es la matriz de la diferencial

¿es la matriz jacobiana?



plano tangente:

$f(a,b) + df_{(a,b)}(x-a, y-b)$

$a=0,$
$b=0$

Punto crítico: x_0 es punto crítico si $\nabla f(x_0) = 0$
- mínimo relativo
- máximo relativo
- punto de silla

Teorema

sea $f \in C^2(A)$

supongamos que x_0 es un punto crítico ($\nabla f(x_0) = 0$)

Definición: Matriz Hessiana

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} D_{11} f(x_0) & D_{12} f(x_0) \\ D_{21} f(x_0) & D_{22} f(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

es simétrica

se cumple:

a) si $A > 0$, $AC - B^2 > 0 \Rightarrow x_0$ es un mínimo relativo
b) si $A < 0$, $AC - B^2 > 0 \Rightarrow x_0$ es un máximo relativo
c) si $AC - B^2 < 0 \Longrightarrow x_0$ es un punto de silla

ejemplo:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

· Cálculo de puntos críticos.

Resolver el sistema $\nabla f(x,y) = 0$

es decir $(D_1 f(x,y) \quad D_2 f(x,y)) = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2x \qquad = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad (0,0) \text{ es el único punto crítico}$$

· Clasificación de puntos críticos.

$D_{11} f(x,y) = 2$

$D_{22} f(x,y) = 2$

$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = 0$

matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A > 0, \ AC - B^2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ es un mínimo relativo

se podía haber razonado.

$(0,0)$ es mínimo absoluto en $\mathbb{R}^2$ pues $0 = f(0,0) < f(x,y)$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$

min abs en intervalo abierto $\Rightarrow$ min relativo

ejemplo:

$f(x,y) = x^2 - y^2$

· cálculo de puntos críticos.

Resolver el sistema $\nabla f(x,y) = 0$

es decir $(D_1 f(x,y) \quad D_2 f(x,y)) = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2x \qquad = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right\} \quad (0,0) \text{ es el único punto crítico}$$

· clasificación de puntos críticos.

$D_{11} f(x,y) = 2$

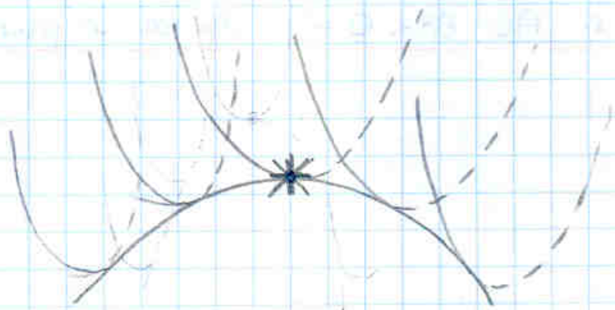
$D_{22} f(x,y) = -2$

$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = 0$

matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$A > 0, \ AC - B^2 < 0 \Rightarrow (0,0)$ es un punto de silla



Cuando $\det(Hf(x_0)) = 0$. Estudio del signo

ejemplo: $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

1) Puntos críticos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (y-2x^2) + (y-x^2) = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x(3y-4x^2) = 0 \\ 2y - 3x^2 = 0 \end{array}\right\}$$

si $x = 0 \rightarrow y = 0$

si $x \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y - 4x^2 = 0 \\ 2y - 3x^2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{z = x^2} \left.\begin{array}{l} 3y - 4z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right\}$ s.c.d. única sol. trivial $x = y = 0$ esta contradicción indica que $x \neq 0$

único punto crítico: $(0,0)$

2) Clasificación

$D_{11} f(x,y) = -2(3y - 4x^2) + 16x^2$

$D_{22} f(x,y) = 2$

$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = -6x$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(Hf(0,0)) = 0 \,!$$

3) Estudio del signo

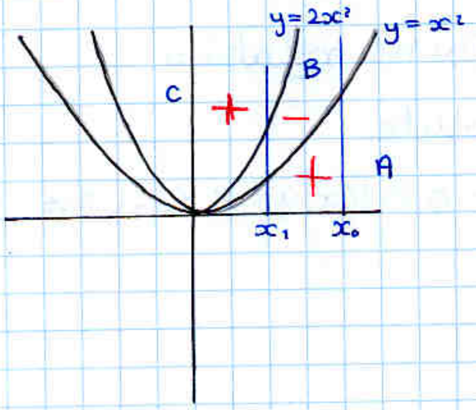
a) encontrar curvas donde $f(x,y)$ se anula.

$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} (y-x^2) = 0 \Leftrightarrow y = x^2 \\ (y-2x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2 \end{array}$

b) dibujar y estudiar el signo en cada region

↳ sustituyendo puntos

↳ fijando una coordenada y moviendonos por la otra

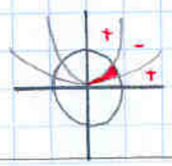


region A:
fijamos x_0 y movemos la y.
en A se cumple:
$\left.\begin{array}{l} y < x_0^2 \\ y < 2x_0^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y - x_0^2 < 0 \\ y - 2x_0^2 < 0 \end{array}\right\} f(x,y) > 0$

region B:
fijamos x_1 y movemos la y
en B se cumple:
$\left.\begin{array}{l} y > x_0^2 \\ y < 2x_0^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y - x_0^2 > 0 \\ y - 2x_0^2 < 0 \end{array}\right\} f(x,y) < 0$

c) buscar un entorno centrado en punto crítico, todo lo pequeño que se quiera, donde $f(x,y)$ tome el mismo signo.
no se puede

region C:
$\left.\begin{array}{l} y > x_0^2 \\ y > 2x_0^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y - x_0^2 > 0 \\ y - 2x_0^2 > 0 \end{array}\right\} f(x,y) > 0$



$(0,0)$ es un punto de silla

ejemplo: $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$

a) puntos críticos:

$$D_1 f(x,y) = 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3$$
$$D_2 f(x,y) = -4(x-y)^3$$

resolver el sistema $\nabla f(x,y) = 0$

$(D_1 f(x,y),\ D_2 f(x,y)) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4(x-1)^3 + 4(x-y)^3 = 0 \\ -4(x-y)^3 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} (x-1)^3 + (x-y)^3 = 0 \\ (x-y)^3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1} \\ (x-y) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=y} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{y=1} \end{array}$$

$(1,1)$ es el único punto crítico

b) Clasificación:

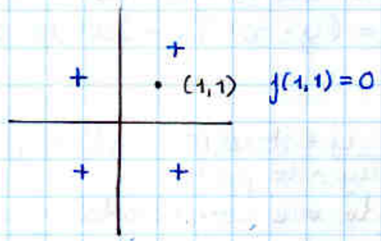
$$D_{11} f(x,y) = 12(x-1)^2 + 12(x-y)^2$$
$$D_{22} f(x,y) = 12(x-y)^2$$
$$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = -12(x-y)^2$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(Hf(1,1)) = 0$$

c) Signo de f

¿dónde se anula f?

$$f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^4 = 0 \\ (x-y)^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$



$(1,1)$ es un mínimo relativo

además es <u>absoluto</u>

$$f(1,1) = 0 < f(x,y) \ \forall (x,y) \neq (1,1)$$

ejemplo: muchos puntos críticos

$$f(x,y) = x^6 - x^2y^2$$

a) puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} D_1f(x,y) = 6x^5 - 2xy^2 = 0 \\ D_2f(x,y) = \quad - 2x^2y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x(6x^4 - 2y^2) = 0 \\ x^2y = 0 \end{array}\right\}$$

si $x = 0$, $(0,y)$ es pto crítico $\forall y$

si $x \neq 0$, en la 2ª ec $y = 0 \Rightarrow$ en la 1ª $6x^4 - 0 = 0$

$\Rightarrow x = 0$

b) clasificación

$$D_{11}f(x,y) = 30x^4 - 2y^2$$

$$D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y) = -4xy$$

$$D_{22}f(x,y) = -2x^2$$

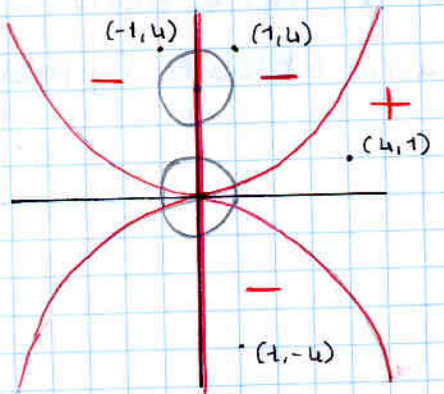
$$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |Hf(0,y)| = 0$$

c) signo de f

cuando se anula f?

$$f(x,y) = x^6 - x^2y^2 = 0 \iff x^2(x^4 - y^2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ \text{ó} \\ x^4 = y^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm x^2 \end{array}$$



hallemos el signo evaluando f en ciertos puntos

en $(1,4)$: $f(1,4) = 1^6 - 1^2 4^2 = -15 < 0$

en $(4,1)$: $f(4,1) = 4^6 - 4^2 1^2 = 4080 > 0$

en $(1,-4)$: $f(1,-4) = 1^6 - 1^2(-4)^2 = -15 < 0$

en $(-1,4)$: $f(-1,4) = (-1)^6 - (-1)^2(4)^2 = -15 < 0$

$(0,0)$ es un punto de silla

$(0,y)$ es un máximo relativo $\forall y \neq 0$

ejemplo: no siempre es necesario dibujar la funcion

$$f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$$
$$= \boxed{\left(y+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^4}$$ completar el cuadrado

a) $\left.\begin{array}{l} D_1f(x,y) = 4x^3 + 2xy = 0 \\ D_2f(x,y) = x^2 + 2y = 0 \end{array}\right\}$ si $x=0 \Rightarrow y=0$

si $x \neq 0$

$4x^3+2xy=0 \rightarrow y = \frac{-4x^3}{2x} = -2x^2$

$x^2+2y=0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$

$\Leftrightarrow x=y=0$

$(0,0)$ es el único punto crítico

b) $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(Hf(0,0)) = 0$$

c) estudio de la función

¿Cuándo vale 0?

$$\underbrace{\left(y+\frac{x^2}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}x^4}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow x=y=0$$

$$0 < f(x,y) \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ es un mínimo absoluto (y relativo)

Extremos condicionados

Objetivo

sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto , f continua

ahora se toma $K \subseteq A$, K cerrado (y acotado)

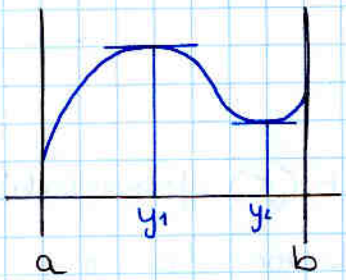
se trata de buscar los extremos relativos / absolutos de f sobre K

Teorema

$f: K \to \mathbb{R}$ continua K cerrado y acotado $\Longrightarrow$ f alcanza sus extremos en K	

- En $\mathbb{R}$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $]a,b[$

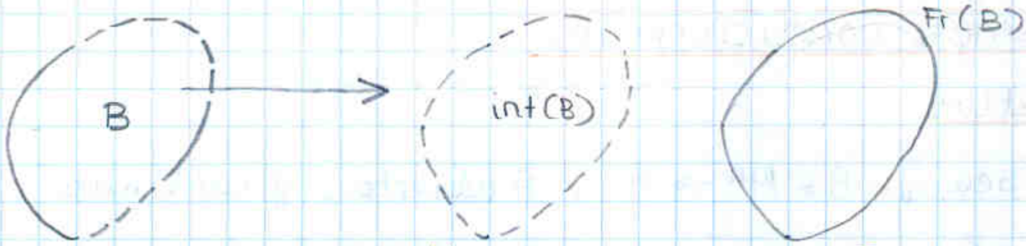


1) Buscar puntos críticos
$f'(x) = 0$
y clasificar los
$(y_1, y_2, \dots)$

2) Evaluar f en los ptos. críticos y en los extremos a y b

para generalizar a $\mathbb{R}^n$ se necesitan algunas definiciones.

· Definiciones



$B \subseteq \mathbb{R}^n$

se llama interior de B int(B), al mayor conjunto abierto en B.

Frontera de B Fr(B)

$int(B) = B \setminus Fr(B)$

Propiedades:

B es abierto $\iff int(B) = B$

B es cerrado $\iff Fr(B) \subseteq B$

$\boxed{B \text{ es cerrado} \iff B = int(B) \cup Fr(B)}$

ya podemos generalizar a $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$

sea $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable

El estudio de los extremos condicionados es:

1) Buscar puntos críticos $\nabla f = 0$ en $int(K)$

2) Evaluar f en $Fr(K)$ ← friki!!!
ó Teorema de los multiplicadores

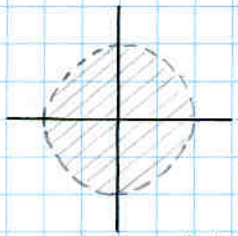
¿cómo?
Parametrizar Fr(K)
(escribirlo como imagen de una función uniparametrica)
y estudiar sus maximos y minimos

si K es una bola cerrada centrada en el origen, parametrizar Fr(K) se hace fácilmente pasando a polares, de forma que sólo dependa de θ.

ejemplo: extremos condicionados

$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ sobre $K = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1) $\underline{\text{int}(K) = \{(x,y) / x^2 + y^2 < 1\}}$



a) ptos. críticos

$\nabla f(x,y) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f(x,y) = 2x - 1 = 0 \\ D_2 f(x,y) = 2y - 1 = 0 \end{array}\right\} x = y = \frac{1}{2}$$

b) Clasificación: $D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = 0$

$D_{11} f(x,y) = 2$

$D_{22} f(x,y) = 2$

$Hf(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es mínimo relativo

2) $\underline{Fr(K) = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 1\}}$

Parametricemos $Fr(K)$. Pasando a polares obtengamos una función que, recibiendo el ángulo como único parametro, devuelva el valor de la función en la frontera de K

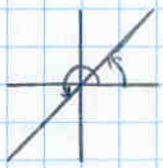
$g(\theta) = f(\sigma(\theta)) : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\sigma(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) \underset{\rho=1}{} : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$g(\theta) = f(\sigma(\theta)) = \underbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}_{1} - \cos\theta - \text{sen}\,\theta + 1$

$= -\cos\theta - \text{sen}\,\theta + 2$

estudiemos los máximos y mínimos de $g(\theta)$



$g'(\theta) = \text{sen}\,\theta - \cos\theta = 0 \iff \text{sen}\,\theta = \cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$g''(\theta) = \cos\theta + \text{sen}\,\theta$ $\quad g''(\frac{\pi}{4}) = > 0$ min rel.

$g''(\frac{5\pi}{4}) = < 0$ max rel

3) comparar $\text{int}(K)$ y $Fr(K)$

	0	30	45	60	90
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} \\ f(\sigma(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2} \\ f(\sigma(\frac{5\pi}{4})) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ es máximo absoluto

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es mínimo absoluto

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es mínimo relativo

· Definición: Restricción de f a C

Sea $f: A \rightarrow B$, $C \subseteq A$

se llama restricción de f a C a la función:

$$f|_C : C \rightarrow B$$

ejemplo:

$f(x) =$ sen x

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$g := f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

f no es inyectiva pero g si lo es

≠ dos elementos no pueden tener la misma imagen

Las restricciones PUEDEN modificar propiedades y características de la función

· Teorema (multiplicadores de Lagrange)

- Condiciones previas

  · sean $f, g \in C^1(A)$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto

  · Para que no hayan problemas al decir que un punto crítico es extremo cuando no lo es

$$\nabla g(x_0) \neq 0$$

en general, la matriz del gradiente debe tener rango máximo.

- Objetivo

sean $f, g \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto

sea $M = \{x \in A \ / \ g(x) = cte\} \subseteq A$

se trata de buscar los extremos de $f|_M$ (de f sobre M)

- Teorema

x_0 es extremo relativo de f sobre M (y $\nabla g(x_0) \neq 0$)

$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

en nuestros ejercicios lo consideraremos de doble implicación puesto que no nos aparecerá el caso de puntos de silla.

Ejemplo.

Calcular el punto del plano $2x + 3y - 4z = 1$ más próximo al origen.

Minimizar la distancia al origen: $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

por simplificar, coincide con minimizar $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$

Consideramos:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$g(x, y, z) = 2x + 3y - 4z$$

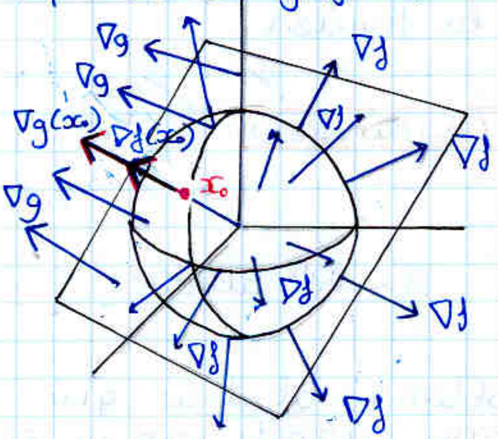
$$M = \{(x, y, z) \,/\, g(x, y, z) = 1\}$$

- 1^{era} condición: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓
- 2^{a} condición: $¿\nabla g(\bar{x}) \neq 0 \quad \forall \bar{x} \in M?$

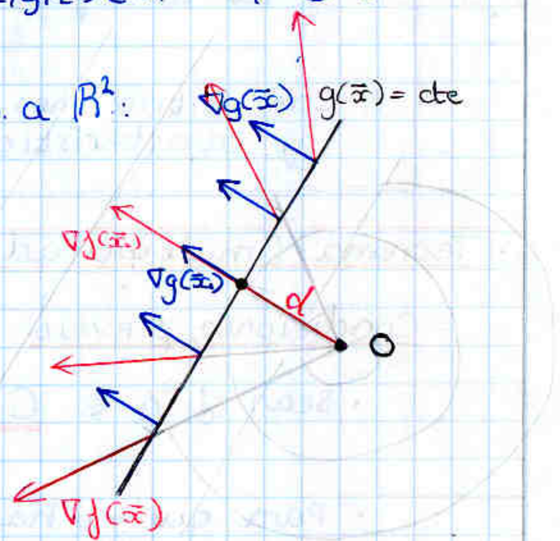
$$\nabla g(\bar{x}) = (2, 3, -4) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \neq 0 \ ✓$$

- Aplicamos el teorema:

representación gráfica:



simp. a $\mathbb{R}^2$:



si x_0 es extremo de $f|_M \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador) tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$
$$(2x, 2y, 2z) = \lambda (2, 3, -4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 2z = -4\lambda \end{array}\right\}$$ aaagh! falta una ecuación! Se le añade la condición de estar en el plano

$$\left.\begin{array}{r} 2x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 2z = -4\lambda \\ 2x + 3y - 4z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x = \lambda \\ \longrightarrow y = \frac{3}{2}\lambda \\ \longrightarrow z = -2\lambda \\ \longrightarrow 2(\lambda) + 3(\frac{3}{2}\lambda) - 4(-2\lambda) = 1 \end{array}$$

$$29\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{2}{29} \longrightarrow \begin{array}{l} x_0 = 2/29 \\ y_0 = 3/2 \cdot 2/29 = 3/29 \\ z_0 = -4/29 \end{array}$$

• Observación:

se puede resolver como un problema de extremos relativos en $\mathbb{R}^2$

$g(x,y,z)=1 \longrightarrow$ despejar z en función de x e y

$$z = \frac{-1+2x+3y}{4}$$

y sustituirlo en $f(x,y,z)$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{-1+2x+3y}{4}\right)^2$$

Ahora basta con minimizar en todo $\mathbb{R}^2$

Esto no se puede hacer siempre porque en algunos casos será difícil despejar z.

Será sin embargo directo cuando nos digan algo de 'la gráfica' de una función, ya que en ese caso ya está z despejado.

ejemplo

sin usar multiplicadores.

Encontrar los puntos más cercanos a (0, 0) desde la gráfica de la función $f(x,y) = \frac{1}{xy}$

la gráfica de f en $\mathbb{R}^3$ es: $z = \frac{1}{xy}$ ¡ya está despejada la z!

basta minimizar $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{xy}\right)^2$$

en todo $\mathbb{R}^2$

matriz jacobiana, en este caso = a gradiente

$$f'(\bar{x}) = \left(2x - \frac{2}{y^2x^3},\ 2y - \frac{2}{x^2y^3}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - \frac{2}{y^2x^3} = 0 \\ 2y - \frac{2}{x^2y^3} = 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} 2y^2x^4 = 2 \\ 2y^4x^2 = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y^2x^4 = 1 \\ y^4x^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^4 = y^2 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{array}$$

ptos críticos: (1,1), (1,−1), (−1,−1), (−1, 1)

matriz hessiana

$$Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{6}{y^2x^4} & \frac{4}{y^3x^3} \\ \frac{4}{x^3y^3} & 2 + \frac{6}{x^2y^4} \end{pmatrix} \xrightarrow{x^2=y^2=1} \begin{pmatrix} 8 & (-)4 \\ (-)4 & 8 \end{pmatrix}$$

(−1,1) (1,−1)

A > 0
det > 0

son los 4 mínimos relativos

ejemplo: utilizando multiplicadores

Hallar los puntos de la elipse $x^2 + xy + y^2 = 27$ más cercanos y más lejanos al origen.

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 \quad \in C^1(\mathbb{R})$$

¿ $\nabla g(x,y) \neq 0 \quad \forall x,y \in M$?

siendo $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, g(x,y) = 27\}$

$$g(x,y) = 27$$
$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 27$$
$$\Rightarrow g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \rightarrow (0,0) \notin M$$

se cumplen las condiciones: apliquemos el teorema de Lagrange.

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

Hay que resolver

$$\left.\begin{array}{l} 2x = \lambda(2x + y) \\ 2y = \lambda(x + 2y) \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{array}\right\}$$

en las 2 primeras ecuaciones:
$x = 0 \rightarrow y = 0$
$y = 0 \Rightarrow x = 0$

pero en la 3era ecuación $(x,y) \neq (0,0)$

Luego 'x' nunca es cero, 'y' nunca es cero.
$\Rightarrow$ Podemos dividir por ellos

$$\frac{2x}{2x+y} = \frac{2y}{x+2y}$$

$$2x^2 + \cancel{4xy} = \cancel{4xy} + 2y^2$$
$$2x^2 = 2y^2$$
$$x^2 = y^2$$
$$x = \pm\sqrt{y^2}$$
$$x = \pm y$$

en la elipse:

$x = y$
$$x^2 + x^2 + x^2 = 27$$
$$3x^2 = 27$$
$$x = \pm 3$$
$$(-3,-3),\ (3,3)$$

$x = -y$
$$x^2 - x^2 + x^2 = 27$$
$$x^2 = 27$$
$$x = \pm\sqrt{27}$$
$$x = \pm 3\sqrt{3}$$
$$(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}),\ (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$$

sustituyendo los puntos en $f(x,y)$ (distancia al origen) y sin preocuparnos de que existan puntos de silla (al fin y al cabo es una elipse!)

$(-3,-3), (3,3) \Rightarrow f(x,y) = 18 \longrightarrow$ mínimos
$(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}), (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}) \Rightarrow f(x,y) = 54 \longrightarrow$ máximos

Teorema de Lagrange con 2 multiplicadores

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto $n \geq 3$ supongamos $n \geq 3$

$$M = \left\{ (x,y,z) \in A \;/\; \begin{matrix} g_1(x,y,z) = cte1 \\ g_2(x,y,z) = cte2 \end{matrix} \right\}$$

· Condiciones previas:

- $f, g_1, g_2 \in C^1(A)$
- el rango de $\begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix}$ es máximo $\forall M$

· Teorema

si (x,y,z) es un extremo relativo de $f|_M$

$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, \nabla f(x,y,z) = \lambda g_1(x,y,z) + \mu g_2(x,y,z)$

ejemplo (parte complicada de este ejemplo es demostrar que el rango es máximo para todo M)

Halla los puntos de intersección de las superficies
$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$
mas próximos al origen.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ g_1(x,y,z) &= x^2 - xy + y^2 - z^2 \\ g_2(x,y,z) &= x^2 + y^2 \end{aligned} \qquad f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}) ✓$$

Comprobar que rango de
$\begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & -x+2y & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$
sea 2 en todo $M = \left\{ x,y,z \,/\, \begin{matrix} g_1(x,y,z) = 1 \\ g_2(x,y,z) = 1 \end{matrix} \right\}$

$\rightarrow$ si $z \neq 0$
rango es 2: 1^{era} fila es l.i. de la 2^a

$\rightarrow$ si $z = 0$

$\left. \begin{matrix} g_1(x,y,0) = 1 \\ g_2(x,y,0) = 1 \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{matrix} \right\} \quad xy = 0$

uno de los dos es cero
PERO no los dos

$\hookrightarrow x \neq 0 \Rightarrow y = 0 \quad \begin{pmatrix} 2x & -x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango 2

$\hookrightarrow y \neq 0 \Rightarrow x = 0 \quad \begin{pmatrix} -y & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix}$ rango 2

· Teorema

si x_0 es extremo relativo $\Rightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ /

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu(\nabla g_2(x,y,z)$$

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(2x-y, -x+2y, -2z) + \mu(2x, 2y, 0)$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x-y) + \mu(2x) \\ 2y = \lambda(2y-x) + \mu(2y) \\ 2z = \lambda(-2z) \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

si $z \neq 0$

en la 3: $\lambda = -1$

de la 1 y 2: $2x = -2x + y + \mu 2x$
$2y = -2y + x + \mu 2y$

si $x=0 \rightarrow y=0$
si $y=0 \rightarrow x=0$
incumple la 5ª ec.
Luego ninguno de los dos puede ser cero.
se puede dividir por ellos.

$$\frac{4x-y}{2x} = \frac{4y-x}{2y} = \mu$$

$$8xy - 2y^2 = 8xy - 2x^2$$
$$x^2 = y^2$$

en la 5ª ec: $x^2 + y^2 = 1$
$2x^2 = 1 \qquad x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

en la 4ª ec: $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$
$-xy - z^2 = 0$
$-xy = z^2$

xy debe ser siempre <0
$\rightarrow x>0 \leftrightarrow y<0$
$\rightarrow y>0 \leftrightarrow x<0$

$= (-x^2) = z^2 \qquad z = \pm\sqrt{0{\cdot}5}$

ptos: $(\sqrt{0{\cdot}5}, -\sqrt{0{\cdot}5}, \sqrt{0{\cdot}5})$ $(-\sqrt{0{\cdot}5}, -\sqrt{0{\cdot}5}, -\sqrt{0{\cdot}5})$ $\quad \lambda = -1$
$(\sqrt{0{\cdot}5}, -\sqrt{0{\cdot}5}, -\sqrt{0{\cdot}5})$ $(-\sqrt{0{\cdot}5}, \sqrt{0{\cdot}5}, -\sqrt{0{\cdot}5})$ $\quad \mu = 2{\cdot}5$

si $z = 0$

de la 4 y la 5: $x^2 - xy + y^2 = 1$
$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow -xy = 0$

o bien: $x=0 \rightarrow y = \pm 1$
o bien: $y=0 \rightarrow x = \pm 1$

si $x=0$, $y=\pm 1$
1ª y 2ª ec: $0 = \lambda(-y)$
$2y = \lambda(2y) + \mu(2y)$
$\lambda = 0, \mu = 1$

si $y=0$, $x=\pm 1$
1ª y 2ª ec: $\lambda = 0, \mu = 1$

ptos $(0,1,0)$ $(1,0,0)$ $\quad \lambda = 0$
$(0,-1,0)$ $(-1,0,0)$ $\quad \mu = 1$

ptos más cercanos al origen

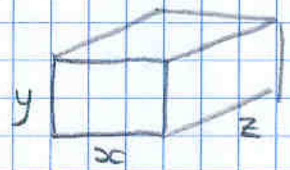
ejercicio

Maximizar el volumen de una caja de zapatos

$f(x,y,z) = xyz$

$A = \{(x,y,z) / x>0,\ y>0,\ z>0\}$

con perímetro de área fija



$$\underbrace{2xz + 2xy + 2yz}_{g(x,y,z)} = c$$

Condiciones previas:

- $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓
- $\nabla g(x,y,z) = (2z+2y,\ 2x+2z,\ 2x+2y)$

  $\neq 0 \quad \forall M$ ✓

  siendo $M = \{(x,y,z) / x>0, y>0, z>0, 2xz+2xy+2yz = c\}$

Teorema

si $\vec{x}_0$ es un extremo relativo

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \quad \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$

$$\begin{aligned}
&① \quad yz = \lambda(2z+2y)\\
&② \quad xz = \lambda(2x+2z)\\
&③ \quad yx = \lambda(2x+2y)\\
&\quad 2xz + 2xy + 2yz = \text{cte}
\end{aligned}$$

① - ②

$yz - xz = \lambda(\cancel{2z} + 2y - 2x - \cancel{2z})$

$z(y-x) = \lambda(2y-2x)$

$z(y-x) = 2\lambda(y-x)$

$z = 2\lambda$

① - ③

$y = 2\lambda$

② - ③

$x = 2\lambda$

$x = y = z$

V-20

Resumen y ejercicios

haciendo TODOS los ejercicios de este boletín se domina la asignatura

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I. de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Valencia

Sucesiones de números reales

1. Definición de sucesión de números reales.

Definición 1.1
Una sucesión de números reales *es una aplicación*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & f(n) \end{array}.$$

El término $f(n)$ se llama término n-ésimo *y se denota a_n.*

Para representar una sucesión , usaremos las cualquiera de las notaciones siguientes

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \{a_n\}_{n\geq 1} \qquad \{a_n\}.$$

Ejemplo 1

(i) $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \ldots, \frac{2^n}{2n-1},$

(ii) $\{0{,}3\ , 0{,}33\ , \ldots, 0{,}333\cdots 333, \ldots\},$

(iii) $a_n = 2n-1$ *(sucesión de impares)* $\quad a_n = 2n$ *(sucesión de pares),*

(iv) $a_n = 2^n,$

(v) $\{1, 1+2, 1+2+3, \ldots, 1+2+3+\cdots+n\},$

(vi) $a_1 = 1$ *y* $a_{n+1} = 1 + a_n^2$ *(Forma recurrente).*

2. Monotonía y acotación de sucesiones.

Definición 2.1
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que

(i) $\{a_n\}$ es monótona creciente *si* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\{a_n\}$ es monótona decreciente *si* $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\{a_n\}$ es estrictamente creciente *si* $a_n < a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

(iv) $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente *si* $a_n > a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2
Estudiar la monotonía de las sucesiones

$$(i)\ a_n = \frac{n^2+3}{3n+2} \qquad (ii)\ a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Definición 2.2
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que

(i) $\{a_n\}$ *está* acotada superiormente *si existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\{a_n\}$ *está* **acotada inferiormente** *si existe* $N \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq N$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\{a_n\}$ *está* **acotada** *existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Nota 1

- *Toda sucesión de términos positivos (resp. negativos) está acotada inferiormente (resp. superiormente).*
- *Un sucesión está acotada si está acotada superior e inferiormente.*

Ejemplo 3

Demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *está acotada superiormente.*

3. Convergencia de sucesiones.

Definición 3.1

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Diremos que* $\{a_n\}$ *es* **convergente a** $a \in \mathbb{R}$ *si*

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ entonces } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Es decir, para todo entorno reducido A del punto a existe un índice n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n \in A$.

Dicho de otra forma, en el intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ están todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, un número finito.

Escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *para indicar que* $\{a_n\}$ *converge a* a.

Definición 3.2

Diremos que una sucesión es **divergente** *si no es convergente. En este caso, se dice que*

(i) es **divergente a** $+\infty$ *y escribiremos* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *si cumple que*

$$\text{para todo } k \in \mathbb{R} \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ entonces } a_n \geq k,$$

(ii) es **divergente a** $-\infty$ *y escribiremos* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *si cumple que*

$$\text{para todo } k \in \mathbb{R} \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ entonces } a_n \leq k,$$

(iii) es **divergente a** ∞ *y escribiremos* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *si cumple que* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$,

(iv) es **finitamente oscilante** *si es divergente y está acotada,*

(v) es **infinitamente oscilante** *si es divergente, no está acotada y no tiene por límite ni* $+\infty$ *ni* $-\infty$.

Ejemplo 4

(i) $a_n = n$ *(ii)* $a_n = -n$ *(iii)* $a_n = n(-1)^n$ *(iv)* $a_n = (-1)^n$

(v) $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es impar} \\ n \text{ si } n \text{ es par} \end{cases} = \{0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots\}.$

4. Regularidad de sucesiones (sucesiones de Cauchy).

Definición 4.1

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión. Diremos que* $\{a_n\}$ *es* **regular (o de Cauchy)** *si*

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > m \geq n_0 \text{ entonces } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Definición 4.2

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *es* **contractiva** *si existen* $k \in [0, 1[$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq k|a_{n+1} - a_n| \text{ para todo } n \geq n_0.$$

$$\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^a.$$

(vi) Sea $\{a_n\}$ *sucesión de números positivos convergente a* $a > 0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (\log_b a_n) = \log_b a.$$

(vii) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes a* a *y* b *respectivamente con* $a_n > 0$ *y* $a > 0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

(viii) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones de tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad a_n \neq 1 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1)}.$$

Nota 3

Se llama **producto de Hadamard** *a la sucesión obtenida al multiplicar miembro a miembro dos sucesiones.*

Teorema 5.3 (Criterio del emparedado)

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ *tres sucesiones tales que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

y, además, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces* $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Teorema 5.4

Toda sucesión creciente (resp. decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente) es convergente.

Teorema 5.5

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 5.6

Toda sucesión creciente (resp. decreciente) que no está acotada superiormente (resp. inferiormente) tiende a $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Teorema 5.7 (Álgebra de límites de sucesiones divergentes)

(i) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *y* $\{b_n\}$ *está acotada. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

(ii) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq n_0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

(iii) Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *y sea* $\{b_n\}$ *una sucesión tal que existe* $\alpha > 0$ *y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tales que* $\alpha \leq b_n$ *para todo* $n \geq n_0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty.$$

Ejemplo 5
Demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+5}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Teorema 4.1
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales, entonces*

(i) $\{a_n\}$ *es convergente si y sólo si* $\{a_n\}$ *es de Cauchy.*

(ii) Si $\{a_n\}$ *es de Cauchy, entonces* $\{a_n\}$ *está acotada.*

(iii) Si $\{a_n\}$ *es contractiva, entonces* $\{a_n\}$ *es de Cauchy.*

5. Propiedades de los límites.

Teorema 5.1
Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes a* a *y* b *respectivamente. Entonces si* $a < b$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces* $a_n < b_n$.

Nota 2
El recíproco no es válido en general pues $a_n = \dfrac{1}{n}$ *y* $b_n = \dfrac{2}{n}$ *cumplen que* $a = b = 0$. *Se tiene pues que* $a_n < b_n$ *para todo* n, *pero en cambio* $a \not< b$.

Corolario 1
(i) Sea $\{a_n\}$ *una sucesión convergente a* a. *Sea* $b > a$. *Entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces* $a_n < b$.

(ii) Sea $\{a_n\}$ *una sucesión convergente a* a. *Sea* $c < a$. *Entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces* $a_n > c$.

(iii) Sea $\{a_n\}$ *una sucesión convergente a* $a \neq 0$. *Entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *entonces* $a_n \cdot a > 0$. *(Esto significa que a partir de un cierto índice, todos los términos de la sucesión tienen el mismo signo que su límite).*

(iv) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes a* a *y* b *respectivamente. Entonces si existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq b_n$ *entonces* $a \leq b$.

(v) Sea $\{a_n\}$ *una sucesión convergente a* a. *Entonces* a *es único. (Esto significa que una sucesión no puede converger a dos puntos distintos).*

Teorema 5.2 (Álgebra de límites de sucesiones convergentes)
(i) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes a* a *y* b *respectivamente. Sean* α,β *dos números reales cualesquiera. Entonces se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

(ii) Sea $\{a_n\}$ *una sucesión convergente a* a. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

(iii) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes a* a *y* b *respectivamente. Entonces se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

(iv) Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones convergentes a* a *y* $b \neq 0$ *respectivamente. Entonces se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

(v) Sea $b > 0$ *y sea* $\{a_n\}$ *convergente a* a. *Entonces*

P4

6. Infinitos e infinitésimos.

Definición 6.1
Una sucesión $\{a_n\}$ *diremos que es un* `infinitésimo` *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Propiedad 1 (Infinitésimos equivalentes)
Sea $\{a_n\}$ *un infinitésimo. Entonces*

(i) $\operatorname{sen}(a_n) \approx a_n$ *(ii)* $\operatorname{tg}(a_n) \approx a_n$ *(iii)* $\log(1+a_n) \approx a_n$ $\cos(a_n) \approx 1 - \frac{a_n^2}{2}$.

La sucesión $a_n = n!$ es un infinito. Cuando n se hace infinitamente grande $(n \to \infty)$ la llamada `Fórmula de Stirling` nos da una aproximación de esta sucesión:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

7. Número e.

Teorema 7.1
Sean las siguientes sucesiones

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad c_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Entonces se tiene que,

(i) $\{a_n\}$ *es monótona decreciente y acotada inferiormente,*

(ii) $\{b_n\}$ *es monótona creciente y acotada superiormente,*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Definición 7.1
Llamamos

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

8. Ejercicios

Calcula los siguientes límites:

(1) $\lim\limits_{n} \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ (2) $\lim\limits_{n} \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt[3]{n}+n}$ (3) $\lim\limits_{n} \dfrac{\sqrt{2n^4+1}}{\sqrt[3]{2n^6+1}+\sqrt{n^2+1}}$

(4) $\lim\limits_{n} \sqrt{5n+3}-\sqrt{3n}$ (5) $\lim\limits_{n} \sqrt{n^2+2n-1}-4n$ (6) $\lim\limits_{n} \sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}$

(7) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}}$ (8) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ (9) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$

(10) $\lim\limits_{n} (5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\log(n^2+7n-5)}}$ (11) $\lim\limits_{n} n\log\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}}$ (12) $\lim\limits_{n} (2+3n^4)^{\frac{1}{1+2\log n}}$

(13) $\lim\limits_{n} \left(\sqrt{\dfrac{1+3n}{5+3n}}\right)^{\frac{n^2}{3n-1}}$ (14) $\lim\limits_{n} \left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$ (15) $\lim\limits_{n} \sqrt[n^2]{n^2+n+1}$

(16) $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n!}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$ (17) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ (18) $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}$

(19) $\lim\limits_{n} \dfrac{(-1)^{n+1}\log n}{n!}$ (20) $\lim\limits_{n} \dfrac{n!}{n^n}$ (21) $\lim\limits_{n} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

8.1. Soluciones de los ejercicios.

(1) 1 (2) 0 (3) $\sqrt[6]{2}$ (4) $+\infty$ (5) $-\infty$ (6) $\dfrac{2}{3}$ (7) e^2 (8) e^7 (9) e

(10) $e\sqrt{e}$ (11) 1 (12) e^2 (13) $e^{-\frac{2}{9}}$ (14) 1 (15) 1 (16) 0 (17) $+\infty$ (18) $\dfrac{1}{2}$

(19) 0 (20) 0 (21) e

P6

11 ejercicios

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I. de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Valencia

Problemas de Series Numéricas

1. Criterios de convergencia para series de términos no negativos.

Recordemos que estudiar el carácter (la convergencia) de una **serie** $\sum a_n$ asociada a la sucesión $\{a_n\}$ no es más que estudiar la sucesión de sus **sumas parciales** $\{S_n\}$ definida mediante la ecuación

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Cuando los términos de la sucesión $\{a_n\}$, es decir, la sucesión del término general, cumplen $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el estudio de la convergencia se simplifica bastante. Se establecen criterios, bien de comparación con otras series de términos no negativos de las cuales conocemos su carácter, o bien criterios que sólo afectan a la propia serie, para estudiar cómo se comportan.

Teorema 1.1 (Criterio de Comparación)
Si $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

(a) *Si existe n_0 tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$ y $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.*

(b) *Si existe el límite*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell \geq 0$$

entonces:

(1) Si $\ell = 0$, la convergencia de $\sum b_n$ implica la de $\sum a_n$

(2) Si $\ell = +\infty$, la convergencia de $\sum a_n$ implica la de $\sum b_n$

(3) Si $\ell > 0$, las dos series tienen el mismo carácter.

Ejemplo 1
Dado que el término general de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+10n}}$ cumple $\lim \frac{\sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+10n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$. Por Comparación, la serie es divergente.

Ejercicio 1
Estudiad el carácter de las siguientes series:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^p,\ a > 1,\ p \in \mathbb{R}^+$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$

Otro criterio que puede ser útil si aparecen logaritmos neperianos en la expresión del término general es el siguiente.

Teorema 1.2 (Criterio de Condensación de Cauchy)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal, que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. La serie es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

P7

Ejercicio 2
Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$, para $\alpha, \beta > 0$.
Estudia también la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Teorema 1.3 (Criterios de Cauchy y de D'Alembert)
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión de términos no negativos tal que, o bien existe*

$$\text{lím } \sqrt[n]{a_n} = \ell,$$

o bien existe

$$\text{lím } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

Entonces se cumple:

(1) *Si* $\ell > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *diverge*

(2) *Si* $\ell < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *converge*

(3) *Si* $\ell = 1$, *no se puede afirmar nada*

Raabe $\rightarrow$ $\lim \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \cdot n$
resultados igual
>1
<1
$=1$

Además, si el límite del cociente existe, también el de la raíz y vale lo mismo. Esto sirve para descartar el uso del criterio de la raíz cuando el del cociente da límite 1.

Ejercicio 3
Estudiad el carácter de las siguientes series:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

2. Criterios de convergencia para series de términos cualesquiera.

Un primer objetivo de estudio pueden ser las series alternadas. Una serie $\sum a_n$ que cumple $a_n a_{n+1} < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es `alternada`. Este hecho se puede escribir de la forma

$$a_n = (-1)^n b_n \quad \text{ó} \quad a_n = (-1)^{n+1} b_n \quad n \in \mathbb{N},$$

siendo $\{b_n\}$ una nueva sucesión con $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1 (Criterio de Leibniz)
Supongamos que la serie $\sum a_n$ *es alternada y como antes,* $a_n = (-1)^n b_n$, *siendo ahora* $\{b_n\}$ *monótona decreciente y que tiende a cero. Entonces la serie* $\sum a_n$ *converge.*

P8

Ejercicio 4
Estudia la convergencia de las siguientes series

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

Teorema 2.2 (Criterio de Dirichlet)
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene sumas parciales acotadas y la sucesión $\{b_n\}$ es monótona con límite nulo, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Teorema 2.3 (Criterio de Abel)
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la sucesión $\{b_n\}$ es monótona acotada, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Ejercicio 5
Estudia las series:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2+\pi/3)}{\ln(n+2)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2+\pi/3)}{\ln(n+2)}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

creo q diverge
esta es dificil

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{\cos(nx)}{n}$

3. Sumación de series.

En algunos casos es fácil determinar la expresión del término general de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ de una serie, y podemos determinar el límite de $\{S_n\}$, es decir, la suma de la serie.

3.1. Descomposición en fracciones simples

Ejemplo 2
Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n}$. *Se tiene la descomposición*

$$\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n}=\frac{2}{n}+\frac{3}{n+3}-\frac{5}{n+2}$$

de donde

$$S_n=2-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{3}{n+3},$$

y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n}=2.$$

Ejercicio 6
Suma las series:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n}$

3.2. Series telescópicas

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice `telescópica` si $a_n = b_n - b_{n+1}$, donde $\{b_n\}$ es conocida. En tal caso, $S_n = b_1 - b_{n+1}$, y por tanto puede determinarse el carácter de la serie estudiando la sucesión $\{b_n\}$.

Ejercicio 7
Halla la suma de las series:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)}+\sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}}$$

4. Unos cuantos problemas más

Ejercicio 8
Estudia el carácter de las siguientes series:

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n^2]{2}-1) \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen} n}{n}$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n^n} \text{ siendo } \lim b_n = +\infty \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-2) \text{ siendo } a>0$$

$$(5)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^p} \text{ siendo } p>0 \qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}p^n n^q,\ p,q\in\mathbb{R}$$

$$(7)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)} \qquad (8)\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n-1}b_n \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ divergente}$$

$$(9)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln 2\cdots\ln n}{n!}$$

Ejercicio 9
Halla la suma de las siguientes series:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n\ln n\ln(n+1)^{n+1}}$$

Ejercicio 10
Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos no negativos tales que $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ convergen. Probar que las series $\sum a_n b_n$, $\sum(a_n+b_n)^2$ y $\sum a_n/n$ son convergentes.

Ejercicio 11
Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente. Demostrar que también son absolutamente convergentes las series $\sum a_n^2$, $\sum a_n/(1+a_n)$ (si $a_n \neq -1$ para todo $n\in\mathbb{N}$) y $\sum a_n^2/(1+a_n^2)$.

$\sum r^n$ converge $\Leftrightarrow |r|<1$ y suma $\frac{r}{1-r}$ $\qquad \sum\left(\frac{1}{s}\right)^n$ converge $\Leftrightarrow s>1$

$\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p>1$

$\left(\frac{1}{n}\right)^p$

P10

22 ejercicios

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I. de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Valencia

Problemas de Funciones de Varias Variables

1. Continuidad.

Recordemos que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ es continua en un punto x_0 de este abierto si existe el límite de f cuando x tiende a x_0 y además coincide con el valor de la función en el punto. Es decir, existe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ejercicio 1
Estudiar la existencia del límite en el origen de las siguientes funciones:

$$\frac{x-y}{x+y} \qquad \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{3xy^2}{x^2+y^2} \qquad \frac{x^2y^3}{x^6+y^4} \qquad \frac{x^2+y^2}{x^2+y} \qquad \frac{x^4y}{x^6+y^3}$$

Ejercicio 2
Estudiar si las funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \mathrm{sen}(x+y)\right) & (x,y) \neq 0 \\ (0,0) & (x,y) = 0 \end{cases}$$

son continuas en el origen.

2. Derivadas parciales y diferenciabilidad. Regla de la Cadena

Recordemos que la existencia de derivadas parciales no implica ni siquiera la continuidad de una función en un punto. Ahora, si son continuas las derivadas parciales en un punto entonces la función es diferenciable en ese punto, y por lo tanto continua. En otras palabras, sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$. La existencia de las derivadas parciales $D_i f$, $1 \leq i \leq n$ en un punto x_0 de A no implica la continuidad de f. Ahora, si existen los límites $\lim_{x \to x_0} D_i f(x) = D_i f(x_0)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ entonces f es diferenciable en x_0, y por lo tanto continua en x_0.

Supongamos para simplificar que $n = 2$. Que f sea diferenciable en el punto (x_0, y_0) significa que el siguiente límite es 0:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - < \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) >}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}.$$

La existencia de este límite no implica la continuidad de las derivadas parciales en (x_0, y_0). Por lo tanto, si no estamos seguros de la continuidad de las derivadas parciales hay que utilizar la definición para calcularlas. Es decir, calcular el límite:

$$D_i f(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t\mathbf{e}_i) + f(x_0, y_0)}{t}$$

para $i = 1, 2$, siendo $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Finalmente decimos que f es de clase C^1 en el abierto A si las derivadas parciales son funciones continuas en todo el abierto, lo que implica que f es diferenciable en cada punto del abierto, y por lo tanto continua en todo el abierto.

Ejercicio 3

Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto indicado.

1. $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ *en el punto* $(1, 0, 1)$
2. $f(x, y, z) = e^{xy} + \operatorname{sen}(xy)$ *en el punto* $(0, 1, 1)$
3. $f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ *en el punto* $(0, 0)$ *y en el punto* $(a, 0)$.
4. $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ *en el punto* $(0, 0)$.

Ejercicio 4

Calcular la matriz jacobiana de $F = f \circ g$ *en el punto indicado:*

1. $g(x, y) = (\operatorname{sen}(x + y), y^3)$ *y* $f(u, v) = (u - 2v, v, ue^v)$ *en el punto* $(\pi/2, 0)$.
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *y* $g(u, v) = (u + v, u - v, u^2 - v^2)$ *en el punto* $(2, 0)$.

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *y se define* $F(x, y) = f(1/y - 1/x)$ *siempre que* x *e* y *no se anulen. Comprueba que* F *satisface la ecuación:*

$$x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + y^2 \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Ejercicio 6

Sea $f(x, y) = \varphi(x - cy) + \psi(x + cy)$ *donde* c *es una constante y* φ *y* ψ *son funciones de una variable con derivada segunda. Demostrar que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Ejercicio 7

Sea $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ *donde* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función que se puede derivar tantas veces como sea preciso. Prueba que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r) \quad \textit{siendo } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 8

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *en las variables u y v que sea de clase* C^1. *Mediante la sustitución* $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$ *obtenemos la función de tres variables* $F(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$. *Calcular* $\|\nabla F\|^2$.

Ejercicio 9

Hallar un vector unitario normal a la superficie de ecuación $x^3 y^3 + y - z + 2 = 0$ *en el punto* $(0, 0, 2)$.

P12

Ejercicio 10
Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Estudiar:

1. *La continuidad de* f *en* $(0,0)$.
2. *La existencia de las derivadas parciales en* $(0,0)$.
3. *La existencia de las derivadas direccionales en* $(0,0)$. *¿Cúanto valen* $D_{(1,1)}f(0,0)$ *y* $D_{(1,2)}f(0,0)$*?*
4. *La diferenciabilidad de* f *en* $(0,0)$.
5. *Calcular* $D_2(D_1 f)(0,0)$.

Ejercicio 11
Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+3y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Calcular las derivadas direccionales en el origen. ¿Qué puede decirse de la diferenciabilidad en el origen?

Ejercicio 12
Sea $f(x,y) = e^y \cos x^2$. *Calcular sus derivadas parciales, ¿son continuas? ¿Saberlo ayuda a calcular la derivada de* f *en* $(0,3)$ *en la dirección del vector* $(2,1)$*?*

Ejercicio 13
Sea la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y la diferenciabilidad de f *en el origen.*

Ejercicio 14
Consideramos la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + e^z, z^3 x)$$

Calcular la diferencial $df_{(x_0,y_0,z_0)}$ *en un punto genérico* (x_0, y_0, z_0).

Ejercicio 15
Consideramos la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Estudiar:

1. *La existencia de las derivadas parciales en* $(a,0)$

2. *La diferenciabilidad de f en $(a, 0)$*

3. *La continuidad de las derivadas parciales en $(a, 0)$*

Ejercicio 16
Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Calcular $d(g \circ f)_{(1,1,1)}$ sabiendo que

1. $f(1, 1, 1) = 1$

2. $df_{(1,1,1)} = (2\ 2\ 2)$

3. $dg_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Extremos relativos y condicionados

Ejercicio 17
Identificar y clasificar los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = 1 - x^2 - (y-1)^2 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$
$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2) \qquad f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$$
$$f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4 \qquad f(x,y) = x(x-2y) + y^2$$
$$f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2 \qquad f(x,y) = x^6 - x^2y^2$$

Ejercicio 18
Calcular el punto del plano $2x + 3y - 4z = 1$ que esté más próximo al origen.

Ejercicio 19
Halla los puntos de $xy = 1$ que más cerca se encuentren del origen.

Ejercicio 20
Halla los puntos de la elipse $x^2 + xy + y^2 = 27$ más cercanos y más lejanos del origen.

Ejercicio 21
Estudiar los extremos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las condiciones $(x+y)z = 2$ y $xy = 1$

Ejercicio 22
Calcular el punto del plano de ecuación $x + y + z = 1$ más próximo al punto $(1, 2, 3)$.

PROBLEMAS DE SERIES NUMÉRICAS

Series de términos no negativos

ejercicio 1. Criterio de Comparación

(1) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ $\quad \lim \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1}{n^{1/n}}$

$= e^{\lim(-\ln n^{1/n})} = e^{\lim\left(-\frac{\ln n}{n}\right)} = 1$

$\xRightarrow{\text{comparación}} \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ se comporta igual que $\sum \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

(2) $\sum (\sqrt[n]{a}-1)^p$ $\quad \lim \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^p}{(\sqrt[n]{a})^p} = \lim \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^p = \lim\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^p = 0$

$\xRightarrow{\text{comparación}} \sum (a)^{\frac{p}{n}}$ diverge $\not\Rightarrow (\sqrt[n]{a}-1)^p$ diverge

$\lim \frac{(\sqrt[n]{a}-1)^p}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^p} = \lim \left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{a^n}}\right)^p$

$= \lim \left(a^n a^{\frac{1}{n}} - a^n\right)^p = \lim\left(a^{n+\frac{1}{n}} - a^n\right)^p$

$= \lim e^{\ln(a^{n+\frac{1}{n}} - a^n)^p}$

$= \lim e^{p\ln a^n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

$= \lim e^{p(n\ln a) + \ln(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

(3) $\sum \frac{1}{1+2+\ldots+n} = \sum \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad \lim \frac{\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2n^2}{n^2+n} = ~~\lim 2+2n \to \infty~~$

$= \lim \frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n})} = \lim \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$

$\xRightarrow{\text{comp}} \sum \frac{1}{1+2+\ldots+n}$ se comporta igual que $\sum \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

(4) $\sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)} = \sum \frac{\frac{e^n+e^{-n}}{2}}{\frac{e^{2n}+e^{-2n}}{2}} = \sum \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}}$

$\lim \frac{\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim \frac{e^n(e^n+e^{-n})}{e^{2n}+e^{-2n}} = \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}+e^{-2n}}$

$= e^{\lim \ln \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}+e^{-2n}}} = e^{\lim \ln(e^{2n}+1) - \ln(e^{2n}+e^{-2n})}$

$= e^{\lim \ln e^{2n}(1+\frac{1}{e^{2n}}) - \ln e^{2n}(1+e^{-4n})}$

$= e^{\lim \cancel{2n\ln e} + \ln(1+\frac{1}{e^{2n}}) - \cancel{2n\ln e} - \ln(1+e^{-4n})}$

$= e^{\lim \ln(1+\frac{1}{e^{2n}}) - \ln(1+\frac{1}{e^{4n}})}$

$= e^0 = 1$

$\xRightarrow{\text{comp}} \sum \frac{1}{e^n}$ converge porq $e>1 \rightarrow \sum \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$ converge ejercicio 2 — condensación de Cauchy

(1) $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $\overset{\text{criterio condensación Cauchy}}{\sim}$ $\sum 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}(\ln 2^n)^\beta}$

$$= \sum \frac{2^n}{2^{n\alpha}(n\ln 2)^\beta} = \sum \frac{1}{2^{n(\alpha-1)} n^\beta (\ln 2)^\beta}$$

$$\lim \frac{\frac{1}{2^{n(\alpha-1)}n^\beta(\ln 2)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}} = \lim \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}\ln 2^\beta} = \lim \frac{1}{\ln 2^\beta} \cdot \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}} = 0 \quad \alpha > 1$$

convergencia de $\sum \frac{1}{n^\beta}$ implica la de $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

converge $\Longleftrightarrow$ $\beta > 1$ y $\alpha > 1$

(2) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \sim \sum \frac{2^n}{(\ln 2^n)^{\ln 2^n}} = \sum \frac{2^n}{(n\ln 2)^{n\ln 2}}$

$$= \sum \left(\frac{2}{(n\ln 2)^{\ln 2}}\right)^n = \sum \left(\frac{2}{(\ln 2)^{\ln 2}} \cdot \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim \left(\frac{\frac{2}{(\ln 2)^{\ln 2}} \cdot \cancel{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}}\right)^n = \lim$$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n\ln 2^{n\ln 2}}} = \lim \frac{2}{n\ln 2^{\ln 2}} = 0$$

criterio de la raiz

la serie $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge

ejercicio 3 — Cauchy y D'alambert

(1) $\sum \frac{n^2+1}{5^n}$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{5^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{5} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}{5}$$

$$= \lim \frac{n^{2/n}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}}{5} = e^{\lim \ln n^{2/n} \frac{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}}{5}}$$

$$= e^{\lim \ln \sqrt[n]{n^2+1} - \ln 5} = e^{\lim \frac{\ln(n^2+1)}{n} - \ln 5} = \frac{1}{5}$$

por el criterio de la raiz, la serie converge.

(2) $\sum \frac{n^n}{2^n n!}$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n n!}} = \lim \frac{n}{2\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}e^{-1}\sqrt[n]{2\pi n}} = \lim \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi n}}$$

$$= e^{\lim \ln \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi n}}} = e^{\lim \ln \frac{e}{2} + \ln (2\pi n)^{-1/n}} = e^{\lim \ln \frac{e}{2} - \frac{\ln(2\pi n)}{n}}$$

$$= e^{1-\ln 2} = \frac{e}{2} > 1$$

la serie $\sum \frac{n^n}{2^n n!}$ diverge

(3) $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ $\sim \cancel{\sum \frac{2^n \, 2^{n \ln 2^n}}{(\ln 2^n)^{2^n}}} = \cancel{\sum \frac{2^n \, 2^{n^2 \ln 2}}{(n \ln 2)^{2^n}}}$

$\lim \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{\ln n^n}} = \lim \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = e^{\lim \ln(n^{\frac{\ln n}{n}}) - \ln(\ln n)}$

$= e^{\lim \frac{\ln n}{n} \ln n - \ln(\ln n)}$

$= e^{-\infty} = 0$ la serie $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ converge

(4) $\sum \frac{n^2}{n!}$ = $\lim \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim \frac{\frac{(n+1)^2}{n!(n+1)}}{\frac{n^2}{\cancel{n!}}}$

$= \lim \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{n^3+n^2} = 0$

la serie $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge

(5) $\sum \cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)$ $\lim \cos^2 \frac{n\pi}{2n+4} = \lim \cos^2 \frac{n\pi}{n(2+\frac{4}{n})}$

$= \lim \cos^2 \frac{\pi}{2+\frac{4}{n}} = \lim \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$

La serie $\sum \cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{2n+4}\right)$ converge

(6) $\sum \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} = \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= e^{\lim \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{\boxed{\lim} \, n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$= 1^\infty = e^{\lim n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)} = e^{\lim\left(\frac{n-(n+1)}{n+1}\right)}$

$= e^{\lim \frac{-1}{n+1}} = 0$

la serie $\sum \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ conv

ejercicio 4. Leibniz

(1) $\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$ es una serie alternada.

Puesto que $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$

la serie converge

(2) $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ //

(3) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n+1)}\right) = \sum \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\,(n+1)}$ [redacted]

$$\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n+1)}\right)$$

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ converge

$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ converge pues $\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \to 0$
y por ser serie alternada converge

por combinación lineal de series, la serie converge

ejercicio 5 Criterio Dirichlet y Abel

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n+2)} = \sum \frac{1}{\ln(n+2)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

la sucesión $\{b_n\} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ tiene sumas parciales acotadas

$S_n = \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} + \cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} + \cancel{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} + \cancel{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$

la sucesión $\{a_n\} = \frac{1}{\ln(n+2)} \to 0$

por el criterio de Dirichlet, la serie converge

(2) $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n+2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

La sucesion $\{b_n\} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ tiene S_n acotadas

la sucesion $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\ln(n+2)} \to \frac{e^{n+1\left(\frac{1}{n}\right)}}{\ln(n+2)} = \lim \frac{e^{\frac{n+1}{n}}}{\ln(n+2)}$

$= \lim \frac{e^{\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}}}}{\ln(n+2)} = \frac{e^1}{\ln(n+2)} = 0$

por el criterio de Dirichlet, la serie converge.

(3) $\sum \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\frac{\cos(nx)}{n}$

la sucesión $\{b_n\} = \cos(nx)$ está acotada

la serie $\sum \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n} \sim \sum \frac{\ln n}{n}$

$\sim \sum \frac{\cancel{2^n} \ln 2^n}{\cancel{2^n}} = \sum n \ln 2$ ¿!?

ejercicio 6 Descomposicion en fracciones simples

(1) $\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ $\qquad \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

$A(2n+3) + B(2n+1) = 1$

$N = -\frac{3}{2}$ $\quad B(-3+1) = 1$

$-2B = 1 \qquad B = -\frac{1}{2}$

$N = -\frac{1}{2}$ $\quad A(-1+3) = 1$

$2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \sum \frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2n+3}$$

S_n

$N=1 \qquad \frac{1/2}{3} \qquad - \frac{1/2}{5}$

$N=2 \qquad \frac{1/2}{5} \qquad - \frac{1/2}{7}$

$N=3 \qquad \frac{1/2}{7} \qquad - \frac{1/2}{9}$

$$S_n = \frac{1}{6} - \frac{1/2}{2n+3}$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{6}$$

(2) $\sum \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n} = \sum \frac{5n-6}{n(n^2-3n+2)} = \sum \frac{5n-6}{n(n-2)(n-1)}$

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n-2} + \frac{C}{n-1} = \frac{5n-6}{n(n-2)(n-1)}$$

$A(n-2)(n-1) + B(n)(n-1) + C(n)(n-2) = 5n-6$

$N=2 \qquad 2B = 10-6 \qquad \underline{B=2}$

$N=1 \qquad -C = -1 \qquad \underline{C=1}$

$N=0 \qquad 2A = -6 \qquad \underline{A=-3}$

$$= \sum \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1} - \frac{3}{n} =$$

S_n

~~n=1~~ $\cancel{\frac{2}{-1} + \frac{1}{0} - \frac{3}{1}}$ es para $n>2$

~~n=2~~ $\cancel{\frac{2}{0} + \frac{1}{1} - \frac{3}{2}}$

$n=3 \qquad + \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{3}{3}$

$n=4 \qquad \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n} = 2$$

ejercicio 7 Series telescópicas

(1) $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

$$\frac{A}{\sqrt{n}}+\frac{B}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$

$$\frac{A}{\sqrt{n}}\left(n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}\right)+\frac{B}{\sqrt{n+1}}\left(n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}\right)$$

$$\frac{An\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+A(n+1)+Bn+\frac{B\sqrt{n}(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

$$A\sqrt{n}\sqrt{n+1}+A(n+1)+Bn+B\sqrt{n}\sqrt{n+1}=1$$

$A=1$
$B=-1$

$$=\sum \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$S_n=S_1-S_{n+1}$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$S_\infty=1$$

(2) $\sum \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)}+\sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}}$

$$=\frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)}-\sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}\right)}{\ln^2(n+1)\ln(n+2)-\ln^2(n+2)\ln(n+1)}$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\cancel{\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)}}}$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\sqrt{\ln^2(n+1)\ln(n+2)}\,\cancel{\ \ }\right)}{\ln^2(n+1)\ln(n+2)-\ln^2(n+2)\ln(n+1)}-\frac{\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\sqrt{\ln(n+1)\ln^2(n+2)}}{\ln^2(n+2)\ln(n+1)}$$

$$=\frac{\cancel{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}\left(\sqrt{\ }-\sqrt{\ }\right)}{\ln(n+1)\ln(n+2)\cancel{\left(\ln(n+1)-\ln(n+2)\right)}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\ }-\sqrt{\ }\right)}{\ln(n+1)\ln(n+2)}$$

$$=\frac{\cancel{\ln(n+1)}\sqrt{\ln n+2}}{\ln\cancel{(n+1)}\ln(n+2)}-\frac{\cancel{\ln(n+2)}\sqrt{\ln(n+1)}}{\cancel{\ln(n+2)}\ln n+1}$$

ejercicio 8 DE TODO

(1) $\sum (\sqrt[n^2]{2} - 1)$

criterio de la raiz

$\lim \sqrt[n]{\sqrt[n^2]{2}-1}$

$= \lim (2^{1/n^2} - 1)^{1/n}$

comparación

$\lim \dfrac{\sqrt[n^2]{2} - 1}{(\frac{1}{2})^{n^2}} = 2^{n^2} (2^{1/n^2}$

$\boxed{\frac{d}{dx} a^u = u' a^u \ln a}$

$\lim \dfrac{\sqrt[n^2]{2} - 1}{\frac{1}{n^2}}$

$= \lim \dfrac{2^{1/n^2} - 1}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{L'H} \dfrac{-\cancel{\frac{2}{n^3}} 2^{1/n^2} \ln 2}{-\cancel{\frac{2}{n^3}}} = \lim 2^{1/n^2} \ln 2$

$= \ln 2 > 0$

$\sum \sqrt[n^2]{2} - 1$ se comporta igual que $\sum \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n}{n}$

comparación

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2+\operatorname{sen} n}{n}}{\frac{1}{n}} = 2 + \operatorname{sen} n \ \nexists$

$\dfrac{a^{1/n^2} + 1}{1/n^2}$ $\dfrac{-\cancel{1/n^3} a^{1/n^2} \ln a}{-\cancel{1/n^3}}$

comparación término a término

$\dfrac{\frac{2+\operatorname{sen} n}{n}}{\frac{1}{n}} = 2 + \operatorname{sen} n > 0 \ \forall n$

$\sum \frac{2+\operatorname{sen} n}{n}$ mismo caracter que $\sum \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

(3) $\sum \frac{1}{b_n^n}$ siendo $\lim b_n = +\infty$

$\lim \frac{1}{b_n} = 0$

criteria de la raiz

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{b_n^n}} = \lim \frac{1}{b_n^n} = 0 < 1$, la serie converge

(4) $\sum \left(\sqrt[n]{a} + \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 2\right) = \sum a^{1/n} - a^{-1/n} - 2$

por comparación

$\lim \dfrac{a^{1/n} - a^{-1/n} - 2}{1/n} \xrightarrow{L'H} \dfrac{-\cancel{1/n^2} a^{1/n} \ln a - \cancel{1/n^2} a^{-1/n} \ln a}{-\cancel{1/n^2}}$

$= \lim a^{1/n} \ln a + a^{-1/n} \ln a$

$= \lim e^{\cancel{\frac{1}{2}\ln a} + \ln a - \cancel{\frac{1}{2}\ln a} + \ln a}$

$= e^{2\ln a} = e^2 a > 0$ se comporta igual que $\frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

(5) $\sum \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$ condensación de Cauchy

$\sim \sum \frac{1}{2^n \ln 2^n (\ln(\ln 2^n))^p}$

$= \sum \frac{1}{2^n (n \ln 2)(\ln(n \ln 2))^p}$

comparación

$$\lim \frac{\frac{1}{2^n (n \ln 2)(\ln(n \ln 2))^p}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{(n \ln 2)(\ln(n \ln 2))^p} = 0$$

por comparación $\sum \frac{1}{2^n}$ converge $\Rightarrow \sum \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$ converge

(6) $\sum p^n n^q \overset{\text{cond. Cauchy}}{\sim} \sum p^{2^n} 2^{nq}$ criterio de la raiz

$\lim \sqrt[n]{p^{2^n} 2^{nq}}$

$= \lim p^{\frac{2^n}{n}} 2^q$

~~$= \lim p^{e^{\ln(\frac{2^n}{n})}} 2^q$~~

$\lim \frac{2^n}{n} \xrightarrow{L'H} \frac{2^n \ln n}{1} = +\infty$

$= +\infty$

$\sum p^n n^q$ criterio de la raiz

$\lim p n^{\frac{q}{n}}$

$= e^{\lim \ln p n^{\frac{q}{n}}} = e^{\lim (\ln p + \ln n^{\frac{q}{n}})}$

$= e^{\lim (\ln p + q \frac{\ln n}{n})}$

$= p$

$p<1$ $\sum p^n n^q$ converge

$p>1$ $\sum p^n n^q$ diverge

$p=1$ $\sum n^q$ diverge

(7) $\sum (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}$ es una serie alternada

que, por criterio de Leibniz converge si la sucesión $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$ converge a cero

consideramos la serie $\sum \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$ criterio del cociente

$$\frac{\frac{\cancel{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}(2(n+1)+1)}{\cancel{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}(3(n+1)-1)}}{\frac{\cancel{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}}{\cancel{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}}} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}<1$ por criterio cociente la serie converge $\Rightarrow$ la sucesión tiende a cero $\Rightarrow$ por Leibniz la serie alternada converge.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} b_n$ con $\sum b_n$ divergente

por comparación

$$\lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} \cdot \cancel{b_n}}{\cancel{b_n}} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}$$

$$= e^{\lim \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\right)} = e^{\lim (-n-1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-\ln(e) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-1} \text{ cte} > 0$$

$\sum b_n$ y $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} \cdot b_n$ tienen el mismo carácter

$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}$ diverge

(9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdots \ln n}{n!} = \sum \frac{\ln 2 \cdots \ln n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$

criterio de la raíz

$$\lim \frac{(\ln 2 \cdots \ln n)^{1/n}}{n e^{-1} \sqrt{2\pi n}^{1/n}}$$

Ejercicio 9

1. $\sum \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} = \frac{A}{1+2^{n-1}} - \frac{B}{1+2^n}$

$$A(1+2^n) - B(1+2^{n-1}) = 2^{n-1}$$
$$A + A2^n - B - B2^{n-1} = 2^{n-1}$$
$$A - B = 0$$
$$A = B$$

$N=0$ $\quad A - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$

$A = 1$
$B = 1$

$N=1$ $\quad 2A - B = 1$
$N=2$ $\quad 4A - 2B = 2$

$$\sum \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} = \sum \underbrace{\frac{1}{1+2^{n-1}}}_{b_n} - \underbrace{\frac{1}{1+2^n}}_{b_{n+1}} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$= \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

2. $\sum \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n \ln n \ \ln(n+1)^{n+1}}$

$= \sum \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\ln n^n \ \ln(n+1)^{n+1}}$

$= \frac{A}{\ln n^n} - \frac{B}{\ln(n+1)^{n+1}} = \frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\ln n^n \ \ln(n+1)^{n+1}}$

$A(\ln(n+1)^{n+1}) - B(\ln n^n) = \ln((1+\frac{1}{n})^n(1+n))$
$= \ln(1+\frac{1}{n})^n + \ln(1+n)$
$= n\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+n)$
$= n\ln(\frac{n+1}{n}) + \ln(1+n)$
$= n(\ln(n+1)-\ln n)+\ln(1+n)$

$A(n+1)\ln(n+1) - nB\ln n = \ln(n+1)(n+1) - (\ln n)(n)$

$\underline{A=1}$
$\underline{B=1}$

$= \sum \frac{1}{\ln n^n} - \frac{1}{\ln(n+1)^{n+1}}$

$= \sum b_n - b_{n+1}$

$= b_2 - \lim_{n\to\infty} b_n$

$= \frac{1}{\ln 2^2} = \frac{1}{\ln 4}$

Ejercicio 10:

se da que $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ convergen, términos no negativo

$\sum a_n b_n$

si $\sum a_n^2$ converge, ~~por el criterio de~~ está acotada
y por lo tanto $\sum a_n$ está acotada !!!!
$\Rightarrow$ a_n tiene sumas parciales acotadas
si $\sum b_n^2$ converge $\Rightarrow b_n^2 \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$

Por criterio de ~~Abel~~ Dirichlet
a_n sumas parciales acotadas
b_n tiene límite nulo
$\sum a_n b_n$ converge

$\sum (a_n+b_n)^2 = \sum a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$

dada la linealidad de las series, como $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ y $\sum 2a_nb_n$ convergen, su suma también lo hace

$\sum \frac{a_n}{n} = \sum a_n \cdot \frac{1}{n}$ [redacted] por comparación

$\lim \frac{a_n \frac{1}{n}}{a_n^2} = \frac{1}{na_n}$

$\sum a_n$ está acotada } criterio de Dirichlet
$\frac{1}{n} \to 0$ } converge

P-24

$a_n = \frac{2n}{n+5}$ es de Cauchy?

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 / \left|\frac{2(n+1)}{(n+1)+5}\right| - \left|\frac{2n}{n+5}\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$\frac{2n+2}{n+6} - \frac{2n}{n+5} < \varepsilon$$

$$\frac{(2n+2)(n+5)-(2n)(n+6)}{(n+6)(n+5)} < \varepsilon$$

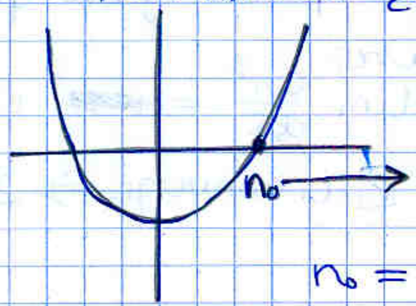
$$\frac{\cancel{2n^2}+\cancel{10n}+\cancel{2n}+10-\cancel{2n^2}-\cancel{12n}}{(n+6)(n+5)} < \varepsilon$$

$$\frac{10}{(n+6)(n+5)} < \varepsilon$$

$$\frac{10}{n^2+11n+30} < \varepsilon$$

$n^2+11n+30 > \frac{10}{\varepsilon}$ se puede encontrar un nº para todo $\varepsilon>0$

$$n^2+11n+30-\frac{10}{\varepsilon} > 0$$



$$n_0 = \frac{-11+\sqrt{11^2-4(30-\frac{10}{\varepsilon})}}{2}$$

$$\sum \left(\frac{1}{\ln(\ln n)}\right)^{\ln n} \sim \sum 2^n \left(\frac{\cancel{\ }}{\ln(n\ln 2)}\right)^{n\ln 2}$$

$\lim 2\left(\frac{1}{\ln(n\ln 2)}\right)^{\ln 2} = +\infty$ diverge

$$\sum (\sqrt[n]{2}-1)^{1/3}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\lim \frac{(\sqrt[n]{2}-1)^{1/3}}{(\frac{1}{n})^{1/3}} = \lim\left(\frac{2^{1/n}-1}{\frac{1}{n}}\right)^{1/3} = (2^{1/n}\ln 2)^{1/3}$ $\ln 2^{1/3} > 0$

se comporta igual que $\sum (\frac{1}{n})^{1/3} \to$ diverge

$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 > 0$ se comporta igual $\to$ diverge

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^{1/3} \to 0$

$$\cancel{\frac{(\sqrt[n]{2}-1)^{1/3}\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})}{(\sqrt[n]{2}-1)^{1/3}\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})}}$$

ejercicio 11

$\sum a_n$ es absolutamente convergente

$\sum a_n^2 = \sum a_n a_n$ donde $\sum a_n$ es convergent
y a_n está acotada puesto que
$a_n \to 0$
criterio de Abel.

$\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ por comparación
$$\lim \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim \frac{1}{1+a_n} = 1 > 0$$
se comporta igual que $\sum a_n$

$\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ por comparación
$$\lim \frac{\frac{a_n^2}{1+a_n^2}}{a_n^2} = \frac{1}{1+a_n^2} = 1 > 0$$
se comporta igual que $\sum a_n^2$

a su vez
$$\lim \frac{a_n^2}{a_n} = 0$$
$\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n^2$ converge

P-26

Problemas de Funciones de varias variables

Ejercicio 1.

(1) $\frac{x-y}{x+y}$ por curvas $x=my$ $\lim \frac{my-y}{my+y} = \lim \frac{y(m-1)}{y(m+1)} = \frac{m-1}{m+1}$

depende de por donde te aproximas

(2) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en polares $\frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\rho^2}$ no existe límite

(3) $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ en polares $\frac{\rho\cos\theta\, \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4 \operatorname{sen}^4\theta}$

por curvas $x = my^2$

$\lim \frac{my^4}{my^4+y^4} = \frac{m}{m+1}$ depende de la curva

(4) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ por curvas $x=my$

$\lim \frac{m^2y^2-y^2}{m^2y^2+y^2} = \frac{y^2(m^2-1)}{y^2(m^2+1)} = \frac{m^2-1}{m^2+1}$

depende de la curva

(5) $\frac{3xy^2}{x^2+y^2}$ por polares $\frac{3\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2} = 3\rho\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$

si que tiene límite.

(6) $\frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$ por polares $\frac{\rho^5\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\theta}{\rho^6\cos^6\theta + \rho^4\operatorname{sen}^4\theta} = \frac{\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\rho(\cos^6\theta + \operatorname{sen}^4\theta)}$

$|x| = \sqrt[6]{x^6} \leq \sqrt[6]{x^6+y^4}$

$|y| = \sqrt[4]{y^4} \leq \sqrt[4]{x^6+y^4}$

$\frac{|x|^2|y|^3}{x^6+y^4} \leq \frac{(\sqrt[6]{x^6+y^4})^2(\sqrt[4]{x^6+y^3})^3}{x^6+y^4} = \frac{(x^6+y^4)^{2/6}(x^6+y^3)^{3/4}}{(x^6+y^4)^1}$

$= (x^6+y^4)^{1/12}$

$= 0$

(7) $\frac{x^2+y^2}{x^2+y}$ en polares $\frac{\rho^2}{\rho^2\cos\theta+\rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\rho^2}{\rho(\rho\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}$

$= \frac{\rho}{\rho\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

por curvas $\frac{x^2+m^2x^2}{x^2+mx} = \frac{x^2(1+m^2)}{x^2(1+\frac{m}{x})}$

nominador en términos del denominador

$|x| = \sqrt[2]{x^2} \leq \sqrt[2]{x^2+y}$

$|y| = y \leq x^2+y$

$\frac{|x|^2+|y|^2}{x^2+y} \leq \frac{(\sqrt[2]{x^2+y})^2 + (x^2+y)^2}{x^2+y} = \frac{x^2+y + (x^2+y)^2}{x^2+y}$

$= 1 + (x^2+y) = 1$

$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$|x| = \sqrt[2]{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$|y| = \sqrt[2]{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{|x|^2-|y|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{0}{x^2+y^2}$

por curvas

$y = x$ $\frac{x^2+x^2}{x^2+x} = \frac{2x^2}{x^2+x} = \frac{2x}{x+1} = 0$

$y = x^2$ $\frac{x^2+x^4}{x^4+x^2} = \frac{x^2(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$

(8) $\frac{x^4 y}{x^6+y^3}$ $\quad y = x^2 \quad \frac{x^4 x^2}{x^6+x^6} = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$

∄ Límite

$y = 2x^2 \quad \frac{2x^4x^2}{x^6+64x^6} = \frac{2\cancel{x^6}}{65\cancel{x^6}} = \frac{2}{65}$

Ejercicio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en polares $\rho^2 \underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} \underbrace{|\operatorname{sen}\theta|}_{1\leq} \underbrace{\left|\operatorname{sen}\frac{1}{\rho}\right|}_{1\leq} \leq \rho^2 \to 0$

PERO $f(0,0) = 1$ DISCONT

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(x+y)\right) & (x,y) \neq 0 \\ (0,0) & (x,y) = 0 \end{cases}$$

$f_1(x,y)$ por polares $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} = 0 = f_1(0,0)$

$f_2(x,y) \quad \lim_{(x,y)\to 0} \operatorname{sen}(x+y) = 0 = f_2(0,0)$

Ejercicio 3 (1) $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2)$

$D_1 f(x,y,z) = \frac{1}{2x} \qquad D_1 f(1,0,1) = \frac{1}{2}$

$D_2 f(x,y,z) = \frac{1}{2y} \qquad D_2 f(1,0,1) = +\infty ?$

$D_3 f(x,y,z) = \frac{1}{2z} \qquad D_3 f(1,0,1) = \frac{1}{2}$

$$D_2 f(1,0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1,t,1) - f(1,0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(2+t^2) - \log 2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(\frac{2+t^2}{2}\right)}{t} \xrightarrow{L'H} \frac{1}{\frac{t}{1}} = \frac{1}{t} = +\infty$$

(2) $f(x,y,z) = e^{xy} + \operatorname{sen}(xy)$

$D_1 f(x,y,z) = ye^{xy} + y\cos(xy)$

$D_2 f(x,y,z) = xe^{xy} + x\cos(xy)$

$D_3 f(x,y,z) = 0$

$D_1 f(0,1,1) = 2y$

$D_2 f(0,1,1) = 0 \qquad \nabla f(\cancel{x,y,z}\ 0,1,1) = (2y, 0, 0)$

$D_3 f(0,1,1) = 0$

Como $D_1 f$, $D_2 f$ y $D_3 f$ son continuas $\Rightarrow$ f diferenciable

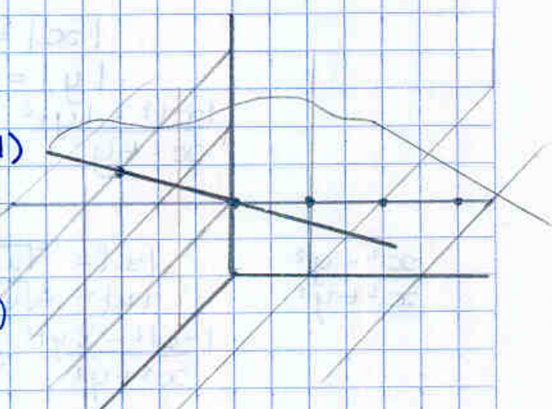
$df(0,1,1) = (2y, 0, 0)$

plano tangente

$f(0,1,1) + df_{(0,1,1)}(x, y-1, z-1)$

$= 2 + (2,0,0)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$= (2 + 2x, 0, 0)$



$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \frac{f(x,y,z) - f(a,b,c) - df_{(a,b,c)}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}}{\|x-a, y-b, z-c\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{2 - 2 - (2,0,0)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}}{\|x, y-1, z-1\|} = 0 \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-1)^2}} = 0$$

(3) $f(x,y)=\begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$

$D_1 f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & y\neq 0 \\ \end{cases}$

$D_2 f(x,y) = \begin{cases} 2xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) + -x \cos\left(\frac{1}{y}\right) & y\neq 0 \\ \end{cases}$

en $y=0$ $\quad D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$

(4) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim \frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t} = \lim \frac{t^3}{t^3} = 1$

límite en $(0,0)$ $\quad \frac{\rho^3\cos^3\theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2} = \rho(\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta) \to 0$

$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim \frac{-\frac{t^3}{t^2}-0}{t} = -1$

$\nabla f(0,0) = (1,-1)$

$\lim_{(a,b)\to(0,0)} D_1 f((a,b)\neq(0,0))$ $\quad \frac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3-y^3)2x}{(x^2+y^2)^2}$

$= \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4+2xy^3}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

$= \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

en polares $= \frac{\rho^4\cos^4\theta + 3\rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\rho^4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^4\cos^4\theta + 2\rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \rho^4\operatorname{sen}^4\theta}$

$= \frac{\cos^4\theta + 3\cos^2\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta}$

$D_1 f$ no es continua en $(0,0)$

es diferenciable?

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-\langle \nabla f(a,b),(x-a,y-b)\rangle}{\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}}$

$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 - \langle(1,-1),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{\rho^3\cos\theta - \rho^3\operatorname{sen}\theta}{\rho^2} - \rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \cos\theta - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$

si que es diferenciable en $(0,0)$ y es continua en $(0,0)$
PERO no tiene derivadas parciales continuas en $(0,0)$

ejercicio 4:

(1) $g(x,y) = (\text{sen}(x+y), y^3)$
$f(u,v) = (u+v, u-v, u^2-v^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = D_1 g_1(x,y) = \cos(x+y)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = D_2 g_1(x,y) = \cos(x+y)$
$\frac{\partial v}{\partial x} = D_1 g_2(x,y) = 0$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = D_2 g_2(x,y) = 3y^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = -1$

$\frac{\partial f_3}{\partial u} = 2u \qquad \frac{\partial f_3}{\partial v} = -2v$

sea $F(x,y) = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \cos(x+y) + 0$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \cos(x+y) + 3y^2$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \cos(x+y)$

$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \cos(x+y) - 3y^2$

$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u\cos(x+y) = 2\,\text{sen}(x+y)\cos(x+y)$

$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u\cos(x+y) - 2v\,3y^2$
$= 2\,\text{sen}(x+y)\cos(x+y) - 6y^5$

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y)+3y^2 \\ \cos(x+y) & \cos(x+y)-3y^2 \\ 2\,\text{sen}(x+y)\cos(x+y) & 2\,\text{sen}(x+y)\cos(x+y)-6y^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$F(x,y) = (\text{sen}(x+y)+y^3, \text{sen}(x+y)-y^3, \text{sen}^2(x+y) - y^6)$

puedes comprobar que es todo correcto.
Todo encaja!

$$F'(\tfrac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
$g(u,v) = (u-2v, v, ue^v)$

sea $F(u,v) \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$= 2x\cdot 1 + 2y\cdot 0 + 2z\cdot e^v = 2x + 2ze^v$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$= 2x\cdot -2 \quad 2y\cdot 1 + 2z\cdot ue^v = -4x + 2y + 2zue^v$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2x + 2ze^v = 2(u-2v) + 2(ue^{2v})$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -4x + 2y + 2zue^v = -4(u-2v) + 2v + 2u^2e^{2v}$$

$$F = (u-2v)^2 + v^2 + (ue^v)^2$$ ✓ wow!!

matriz jacobiana
$$F'(2,0) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 $\quad F(x,y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$

definimos $\quad g(x,y) = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$
$f(u)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x^2} \qquad F = f\circ g$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$x^2\frac{\partial F}{\partial x} + y^2\frac{\partial F}{\partial y} = x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + y^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Ejercicio 6

$$f(x,y) = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy)$$

definimos $\quad f(u,v) = u + v$
$g(x,y) = (\varphi(x-cy), \psi(x+cy))$
~~g...~~

~~...~~

$f(x,y) = x + y$
$g(a,b) = (\varphi(a), \psi(b))$
$h(u,v) = (\underbrace{u-cv}_{a}, \underbrace{u+cv}_{b})$

$$F = f\circ g\circ h \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial u}$$

$$f(x,y) = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy)$$

$2u^2$ $\quad$ $4u$ $\quad$ $2(x-cy)^2$ $\quad$ $2(x^2-2xcy+$ $\quad$ $2x^2-4xcy,$ $\quad$ $4x-4cy$

$$f = g \circ h$$

$$h(x,y) = (x-cy\,,\; x+cy)$$
$$g(u,v) = (\varphi(u) + \psi(v))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) \quad ①$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-c\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(-c) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(c) \qquad = c\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\right) \quad ②$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,1 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial v}c$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot 1 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(-c)$$

mal

sustituyendo en ① $\qquad$ sustituyendo en ②

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c\left(c\frac{\partial \psi}{\partial v} - -c\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$

quada demostrado que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

ejercicio 7

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

se define $\qquad h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\qquad g(r) \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f = g \circ h \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2)^{-1/2}\right)$$
$$= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$
$$= \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\right]$$
$$= \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$
$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{rx^2 + r^2 + x^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \cancel{y}}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{y^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{ry^2 + r^2 + y^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{ry^2+r^2+y^2}{r^3} + \frac{rx^2+r^2+x^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{ry^2+r^2+y^2+rx^2+r^2+x^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{2r^2+r(x^2+y^2)+\cancel{r}(x^2+y^2)}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\,\frac{2r^2+r^3+r^2}{r^3}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\,\frac{\cancel{r^2}(2+r+1)}{\cancel{r^3}}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{r+3}{r}\right)$$

$$=$$

ejercicio 6. (otra vez)

$$f(x,y) = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy)$$

se define $h(x,y) = (x-cy, x+cy)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g(u,v) = (\varphi(u) + \psi(v))$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)$$

por ser φ y ψ funciones clase C^1

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot 1\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot 1\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(-c) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(c)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-c\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c\,\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)$$

$$= \cancel{}$$

$$= c\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\right]$$

$$= c\left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right]$$

$$= c\left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]$$

$$= c\left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(-c)\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(c)\right)\right]$$

$$= c^2\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

Ejercicio 7 $\quad f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

se define $h(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$g(r)$

$f = g \circ h$

regla de la cadena

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial r}\right)}_{0}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{2}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial r}\right)}_{0}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r}g'(r) + \frac{1}{r}g''(r)$$

$$= \frac{1}{r}\left(g'(r) + g''(r)\right)$$

ejercicio 8. $F(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

se define $f(u,v,w): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = (x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$F = f \circ g$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} =$$

se define $f(u,v) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F = f \circ g$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \quad \cdots \quad = 2z\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\nabla F = \left(2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\ 2y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\ 2z\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\|\nabla F\|^2 = \left(2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(2y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(2z\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$= 4x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 4x\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 4y^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 4y\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 4z^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 4z\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + (\ )^2$$

$$= (4x^2+4y^2+4z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + (4x+4y+4z)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$= 4(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 4(x+y+z)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$= 4u\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 4v\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

Ejercicio 9

$$f(x,y,z) = x^3y^3 + y - z + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3y^2+1 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

$$\nabla f = (3y^3x^2,\ 3x^3y^2+1,\ -1)$$

La superficie $x^3y^3+y-z+2=0$ es una superficie isoescalar.

$$\nabla f(0,0,2) = (0,1,-1)$$

vector unitario $\dfrac{\nabla f(0,0,2)}{\|\nabla f(0,0,2)\|} = \dfrac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ejercicio 10.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

(1) continuidad en $(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}$ polares $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\cancel{\rho^2} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen}\theta)}{\cancel{\rho^2}}$

$$\|\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\theta)\| \leq |\operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen}\theta)| \leq |\operatorname{sen}\rho| \to 0$$

es continua en $(0,0)$

(2) derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cancel{t^2}\operatorname{sen} t}{\cancel{t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} = 0$$

(3) derivadas direccionales

$$D_{(v_1,v_2)} f(0,0) = \lim \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cancel{t^2}v_1^2 \operatorname{sen} tv_1}{\cancel{t^2}(v_1^2+v_2^2)} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 \operatorname{sen} tv_1}{t(v_1^2+v_2^2)} \qquad \operatorname{sen} tv_1 \sim tv_1 \text{ infinitésimo equivalente}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2\, \cancel{t} v_1}{\cancel{t}(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2}$$

$$D_{(1,1)} f(0,0) = \frac{1}{2} \qquad D_{(1,2)} f(0,0) = \frac{1}{5}$$

(4) Diferenciabilidad de f en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \ ?$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} - 0 - \langle (1,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen}\theta)}{\rho^2} - \rho \operatorname{sen}\theta}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen}\theta) - \rho \operatorname{sen}\theta}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen}\theta)}{\rho} - \operatorname{sen}\theta \quad \nexists \text{ depende de } \theta$$

(5) $$D_1 f = \frac{(x^2+y^2)\left[2x \operatorname{sen} x + x^2\cos x\right] - 2x\left[x^2 \operatorname{sen} x\right]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x(2\operatorname{sen} x + x\cos x)}{x^2+y^2} - \frac{2x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2(D_1 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_1(0,t) - D_1(0,0)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Ejercicio 11.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+3y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3v_1^2v_2}{t^4v_1^4+3t^2v_2^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}v_1^2v_2}{\cancel{t^3}(t^2v_1^4+3v_2^2)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2v_2}{t^2v_1^4+3v_2^2} = \frac{v_1^2\cancel{v_2}}{3v_2^{\cancel{2}}} = \frac{v_1^2}{3v_2}$$

diferenciable $\Longrightarrow$ todas derivadas direccionales
$\not\Longleftarrow$

diferenciable $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+3y^2} - \langle$$ agh! no existe $D_1 f$!

$$D_1f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim \frac{0-0}{t} = 0$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y}{x^4+3y^2} - \langle(0,0)(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^4+3y^2)}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho\,(\rho^4\cos^4\theta+3\rho^2\mathrm{sen}^2\theta)}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{\rho^3}(\rho^2\cos^4\theta+3\,\mathrm{sen}^2\theta)} \quad \nexists \lim$$

no es diferenciable

otra forma

si f diferenciable $\quad D_vf(0,0) = \langle\nabla f(0,0),v\rangle \quad \forall v$

$$\frac{v_1^2}{3v_2} = \langle(0,0),(v_1,v_2)\rangle \quad \forall v$$

no es cierto para algunos v.

ejercicio 12

$$f(x,y) = e^y \cos x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x e^y \operatorname{sen} x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \cos x^2$$

son continuas

si que ayuda a saber $D_{(2,1)} f(0,3)$ puesto que

derivadas parciales continuas $\Rightarrow$ diferenciable $\Rightarrow D_v f(a,b) = \langle \nabla f(a,b), v \rangle$

$$D_{(2,1)} f(0,3) = \langle \nabla f(0,3), (2,1) \rangle$$
$$= \langle (0, e^3), (2,1) \rangle$$
$$= e^3$$

ejercicio 13

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$0 \leq \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}} \nexists$$

la función no es continua en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

existen las derivadas parciales

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2(v_1^2+v_2^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2(v_1^2+v_2^2)}}\right) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left| \frac{v_1 v_2}{t(v_1^2+v_2^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t\sqrt{(v_1^2+v_2^2)}}\right) \right|$$

$\nexists$ derivadas direccionales

$\Rightarrow f$ no es diferenciable

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x-a}{y}$$

Ejercicio 14

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})} = x+1$$

$f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + e^z, z^3 x) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = e^z$$

$\forall (x,y,z)$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = z^3 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 3z^2 x$$

la matriz asociada a $df_{(x_0,y_0,z_0)}$ es

$$\begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 & e^{z_0} \\ z_0^3 & 0 & 3z_0^2 x_0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(1) $$D_1 f(a,0) = \lim \frac{f(a+t,0) - f(a,0)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$D_2 f(a,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,t) - f(a,0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{a^2 \cancel{t} \cos\left(\frac{1}{a}\right)}{\cancel{t}} = a^2 \cos\left(\frac{1}{a}\right)$$

(2) f diferenciable $\Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{f(x,y) - f(a,0) - \langle \nabla f(a,0)\ (x-a,y)\rangle}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x^2 y \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0 - \langle (0, a^2 \cos\frac{1}{a}), (x-a,y)\rangle}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x^2 y \cos\left(\frac{1}{x}\right) - y\, a^2 \cos\frac{1}{a}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0$$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2$

$$D_{(v_1,v_2)} f(a,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, tv_2) - f(a,0)}{t} = \frac{(a+tv_1)^2 (tv_2)^2 \cos\left(\frac{1}{a+tv_1}\right)}{t}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\cancel{y}\left(x^2 \cos\frac{1}{x} - a^2 \cos\frac{1}{a}\right)}{\cancel{y}\sqrt{\left(\frac{x-a}{y}\right)^2 + 1}} = 0$$

$\sqrt{2}$

$$\underset{x\to a}{x-a} \sim \underset{y\to 0}{y}$$

(3) $D_1 f((x,y)\neq(a,0)) = 2xy \cos\frac{1}{x} + x^2y\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
$= 2xy\cos\frac{1}{x} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

$D_2 f((x,y)\neq(a,0)) = x^2\cos\frac{1}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} D_1 f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} 2xy\cos\frac{1}{x} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 = D_1 f(a,0)$$

$D_1 f(x,y)$ es continua en $(a,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} D_2 f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} x^2\cos\frac{1}{x} = a^2\cos\frac{1}{a} = D_2 f(a,0)$$

$D_2 f(x,y)$ es continua en $(a,0)$

f es de clase C_1

Ejercicio 16 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)}\cdot df_a$$

$$d(g\circ f)_{(1,1,1)} = dg_{f(1,1,1)}\circ df_{(1,1,1)}$$

$$d(g\cdot f)_{(1,1,1)} = dg_1 \circ df_{(1,1,1)}$$

$$d(g\circ f)_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\0&0&0\\6&6&6\end{pmatrix}$$

Ejercicio 17

$$f(x,y) = 1 - x^2 - (y-1)^2$$
$$= 1 - x^2 - (y^2 - 2y + 1)$$
$$= \cancel{1} - x^2 - y^2 + 2y - \cancel{1}$$
$$= 2y - x^2 - y^2$$

$D_1 f(x,y) = -2x \qquad D_2 f(x,y) = 2 - 2y$

$D_{11} f(x,y) = -2 \qquad D_{12} f(x,y) = 0$

$D_{21} f(x,y) = 0 \qquad D_{22} f(x,y) = -2$

ptos críticos:

$$\nabla f(x,y) = 0$$
$$(-2x,\ 2-2y) = (0,0)$$
$$-2x = 0 \qquad x = 0$$
$$2 - 2y = 0 \qquad y = 1$$

matriz Hessiana $Hf(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A < 0$, $AD - B^2 > 0$

$(0,1)$ es un punto máximo

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

$D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y \qquad D_2 f(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x$

$D_{11} f(x,y) = 12x^2 - 4 \qquad D_{12} f(x,y) = 4$

$D_{21} f(x,y) = 4 \qquad D_{22} f(x,y) = 12y^2 - 4$

$$4x^3 - 4x + 4y = 0$$
$$4y^3 - 4y + 4x = 0$$

$$4(x^3 - x + y) = 0$$
$$4(y^3 - y + x) = 0 \quad \downarrow +$$

$$x^3 + y^3 = 0$$
$$x^3 = -y^3$$
$$x = -y$$

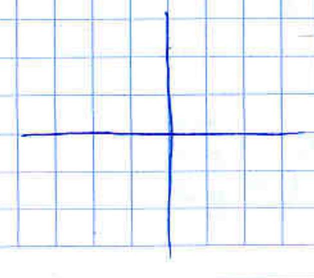
$$x^3 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - 2) = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2} \qquad x = 0$$
$$y = \mp\sqrt{2} \qquad y = 0$$

Matriz Hessiana

$Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ $\quad A > 0$, $\det(Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) = 384 > 0$ $\quad$ mínimo

$Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ $\quad$ mínimo

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad A < 0$, $\det = 0$



$$f(x,y) = x^2(x^2 - 2) + y^2(y^2 - 2) + 4xy$$
$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$
$$(x^2 + 4y)(x+y)(x-y)$$
$$(x^2 - y^2)$$

$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

$y^2 - 2yx^2 - x^2y + 2x^4$

$y^2 - 3x^2y + 2x^4$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -6xy + 8x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial x} = -6y + 24x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -6x$

$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = -6x \qquad \frac{\partial f}{\partial y \partial y} = 2$

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\begin{cases} -6xy + 8x^3 = 0 \\ 2y - 3x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x(6y + 8x^2) = 0 \\ 2y - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow y = 0 \qquad x \neq 0 \Rightarrow 2y = 3x^2$

$y = \frac{3}{2}x^2$

$-x(9x^2 + 8x^2) = 0$

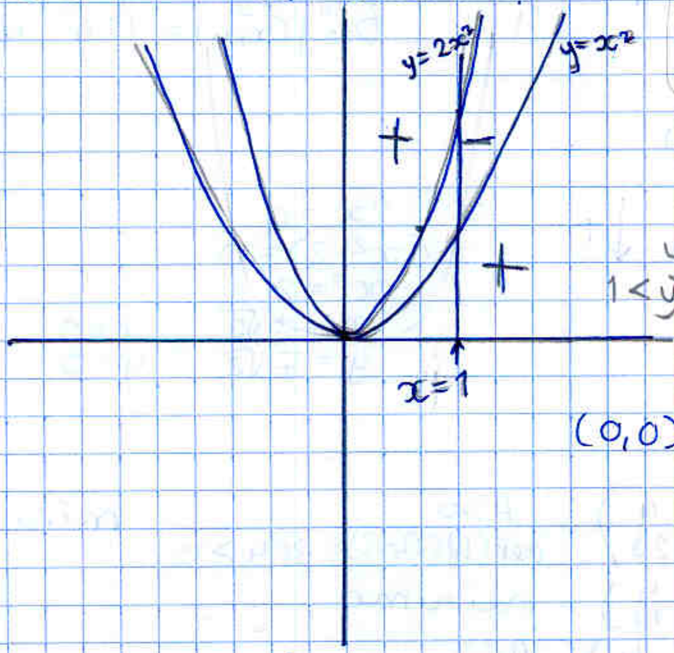
$-x\,17x^2 = 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det = 0$

Estudio del signo:

¿cuándo se anula? $\quad y = x^2$, $\quad y = 2x^2$



$x = 1$

$(y-1)(y-2)$

$y < 1$	< 0	< 0	+
$1 < y < 2$	> 0	< 0	−
$y > 2$	> 0	> 0	+

$(0,0)$ es un punto de silla

P-44

Ejercicio 18

$2x + 3y - 4z = 1$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
$g(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$

$g, f \in C_1$ ✓

$M = \{ x,y,z : g(x,y,z) = 1 \}$

$\nabla g(x,y,z) = (2,3,-4) \neq 0 \ \forall M$ ✓

$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$

$(2x, 2y, 2z) = \lambda(2,3,-4)$

$2x = 2\lambda$ $\cancel{x = \lambda =}$
$2y = 3\lambda$ $\cancel{y = \frac{3}{2}x}$
$2z = -4\lambda$

$(0,0,0) \notin M$
se puede dividir por ellos

$\lambda = \frac{2x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{2z}{-4}$ $x = \lambda$

$x = \frac{2}{3}y = -\frac{1}{2}z$ $y = \frac{3}{2}\lambda$, $z = -2\lambda$

necesitamos una ecuación mas:

$2x + 3y - 4z = 1$
$2\lambda + 3(\frac{3}{2}\lambda) - 4(-2\lambda) = 1$
$2\lambda + \frac{9}{2}\lambda + 8\lambda = 1$
$\frac{29}{2}\lambda = 1$
$\lambda = \frac{2}{29}$

$$\boxed{x = \frac{2}{29} \quad y = \frac{3}{29} \quad z = -\frac{4}{29}}$$

Ejercicio 19:
Condiciones previas a utilizar los multiplicadores de Lagrange:

1) La ecuación a minimizar $f(x) = x^2 + y^2$
La condición $g(x) = xy = 1$ $\in C^1$

2) $\nabla g(x) = (y, x) \neq (0,0) \ \forall M$
donde $M = \{(x,y) \ / \ g(x,y) = 1\}$

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$
$2x = \lambda y$ $\boxed{2xy = \lambda xy}$ $\lambda = 2$
$2y = \lambda x$ $2y = 2x \Rightarrow y = x$
$xy = 1$ $xy = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
$x = y = \pm 1$
$(1,1)$ $(-1,-1)$

Ejercicio 20

$$x^2 + xy + y^2 = 27$$

$$f(x) = x^2 + y^2 \in C^1$$
$$g(x) = x^2 + xy + y^2 \in C^1$$

$$\nabla g(x) = (2x + y,\ 2y + x) \neq (0,0)\ \forall g(x,y) = 27$$

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

$$(2x, 2y) = \lambda(2x + y,\ 2y + x)$$

$$2x = \lambda(2x + y)$$
$$2y = \lambda(2y + x)$$
$$x^2 + xy + y^2 = 27$$

$x = 0$ $\quad y^2 = 27$ $\quad y = 0$:

$y = \pm\sqrt{27}$

en ②: $\lambda = 1$

en ① $0 = \lambda y$

no se cumple $\quad$ no se cumple

ni x ni y son 0, se puede dividir por ellos.

$$\lambda = \frac{2x}{2x+y} = \frac{2y}{2y+x}$$
$$2x(2y+x) = 2y(2x+y)$$
$$\cancel{4xy} + 2x^2 = \cancel{4xy} + 2y^2$$
$$2x^2 = 2y^2$$
$$x^2 = y^2$$
$$x = \pm\sqrt{y^2}$$
$$x = \pm y$$

$x = +y$

$$x^2 + x^2 + x^2 = 27$$
$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

$(3, 3)\ (-3, -3)$

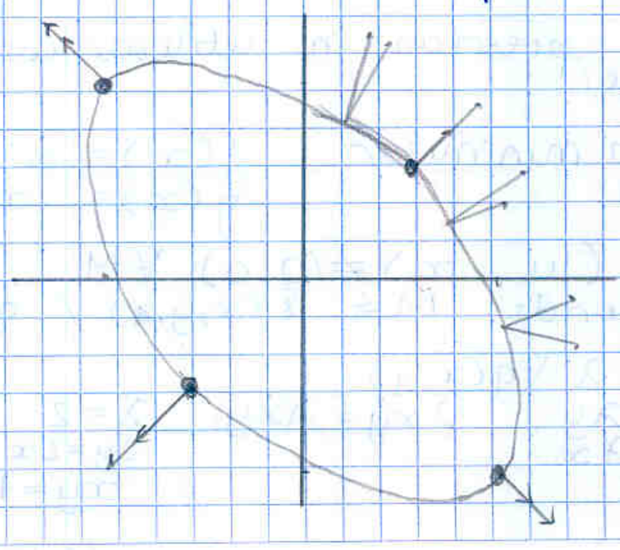
puntos mas cercanos

$x = -y$

$$x^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} = 27$$
$$x^2 = 27$$
$$x = \pm\sqrt{27} = \pm\sqrt{9 \cdot 3} = \pm 3\sqrt{3}$$

$(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})\ (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

puntos mas alejados



P-'46

ejercicio 21.

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$
$$g(x,y,z) = (x+y)z = 2$$
$$h(x,y,z) = xy = 1$$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g(x \quad) = (z, z, x+y) \quad \in C^1$$
$$\nabla h(x \quad) = (y, x, 0)$$

$$\begin{vmatrix} z & z & x+y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} \quad \forall \{x,y,z / \begin{matrix} g(x)=2 \\ h(x)=1 \end{matrix}$$

rango = 2 $\quad \begin{vmatrix} z & x+y \\ x & 0 \end{vmatrix} = -x(x+y) > 0 \quad \forall M$

ni x ni y son cero, puesto q $xy=1$

rango = 2 $\forall M$

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

$$2x = \lambda z + \mu y$$
$$2y = \lambda z + \mu x$$
$$2z = \lambda(x+y)$$
$$(x+y)z = 2$$
$$xy = 1$$

$$2x - 2y = \mu(y-x)$$
$$2(x-y) = \mu(y-x)$$
$$\mu = -2$$

$$2x+2y = \lambda z$$
$$\lambda = \frac{2x+2y}{z}$$
$$2z = \frac{2x+2y}{z}(x+y)$$
$$\cancel{2}z^2 = \cancel{2}(x+y)(x+y)$$
$$z^2 = (x+y)^2$$
$$z = \pm(x+y)$$

$$(x+y)z = 2$$
$$(x+y)^2 = \pm 2$$
$$x+y = \pm\sqrt{2}$$

$$\boxed{z = \pm\sqrt{2}}$$

$$x+y = \pm\sqrt{2}$$
$$xy = 1$$

$$\frac{x^2+1}{x} = \pm\sqrt{2}$$
$$x^2+1 = \pm\sqrt{2}\,x$$
$$x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1 = 0$$

$$x(\pm\sqrt{2}-x) = 1$$
$$\pm\sqrt{2}\,x - x^2 = 1$$
$$x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$= \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}$$

Ejercicio 22

$$f(x) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$$
$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14$$

$\in C^1$

$$g(x) = x + y + z = 1$$

$$(0,0,0) \notin \{M := (x,y,z) \,/\, g(x) = 1\}$$

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$

$$2x - 2 = \lambda 1$$
$$2y - 4 = \lambda 1$$
$$2z - 6 = \lambda 1$$

$$2x - 2 = 2y - 4 = 2z - 6$$

$$x = \frac{\lambda + 2}{2} \quad y = \frac{\lambda + 4}{2} \quad z = \frac{\lambda + 6}{2}$$

$$x + y + z = 1$$
$$\frac{\lambda+2}{2} + \frac{\lambda+4}{2} + \frac{\lambda+6}{2} = 1$$
$$\frac{3\lambda + 12}{2} = 1$$
$$3\lambda + 12 = 2$$
$$3\lambda = -10$$
$$\lambda = -\frac{10}{3}$$

$$x = \frac{-\frac{10}{3} + 2}{2} = -2/3$$
$$y = \frac{-\frac{10}{3} + 4}{2} = 1/3$$
$$y = \frac{-\frac{10}{3} + 6}{2} = 4/3$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$