ETSI Telecomunicación

Campos Electromagnéticos I

Problema 8. Una distribución volumétrica de carga cuya densidad es $\rho = 2(\rho_0/r^2)\,\mathrm{sen}\,\theta$ C/m³ se halla confinada en el volumen $a \le r \le b$, $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ y gira en torno al eje $\theta = 0$ con ω rad/s

a) Expresar mediante integral [illegible] $\vec{B}$ en el eje z.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\,dV'$$

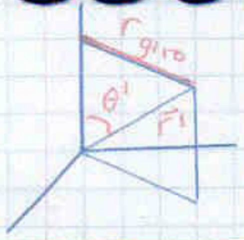
1. Calcular $\bar{J}(\bar{r}')$

[illegible] $(\bar{r}-\bar{r}')$

3. Integrar lo que podamos

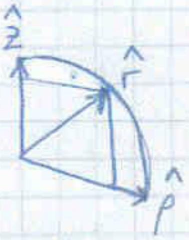
Paso 1. $\boxed{\bar{J}(\bar{r}') = \rho\cdot\bar{v}}$

$$\bar{v} = \dot{r}\,u_r$$
$$= \omega\cdot r_{giro}\,\hat{\varphi}'$$
$$= \omega\, r'\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\hat{\varphi}'$$



$$\bar{J}(\bar{r}') = \rho\cdot\omega\cdot r'\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\varphi}'$$
$$= \frac{2\rho_0}{(r')^2}\,\mathrm{sen}\,\theta'\cdot\omega\cdot r'\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\hat{\varphi}'$$
$$\bar{J}(\bar{r}') = \frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\mathrm{sen}^2\,\theta'\,\hat{\varphi}'$$

Paso 2.
$$\bar{r} = z\,\hat{z}$$
$$\bar{r}' = r'\,\hat{r} = r'\,[\cos\theta'\,\hat{z} + \mathrm{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}]$$



$$\bar{r}-\bar{r}' = (z - r'\cos\theta')\,\hat{z} - r'\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}'$$
$$|\bar{r}-\bar{r}'| = [(z^2 - 2zr'\cos\theta' + r'^2\cos^2\theta') + (r')^2\,\mathrm{sen}^2\theta']^{1/2}$$
$$= [z^2 + (r')^2 - 2zr'\cos\theta']^{1/2}$$

CUIDADO CON LOS SIGNOS

$$\bar{J}\times(\bar{r}-\bar{r}') \overset{\downarrow}{=} \left(\frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\mathrm{sen}^2\theta'\,\hat{\varphi}'\right)\times\left((z-r'\cos\theta')\,\hat{z} - r'\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}'\right)$$
$$= \frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\mathrm{sen}^2\theta'\,(z-r'\cos\theta')\,\hat{\rho}' - \frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\mathrm{sen}^2\theta\; r'\,\mathrm{sen}\,\theta'\,(-\hat{z})$$

Paso 3.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_a^b \frac{\frac{2\rho_0\omega\,\mathrm{sen}^2\theta'(z-r'\cos\theta)}{r'}\hat{\rho}' + 2\rho_0\,\omega\,\mathrm{sen}^3\theta'\,\hat{z}}{[z^2+(r')^2-2zr'\cos\theta']^{3/2}}\,((r')^2\,\mathrm{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'$$

si separaramos la integral en 2, sabemos que la componente en $\hat{\rho}'$ se anularía (tanto por simetría del problema como por $\int_0^{2\pi}\hat{\rho}\,d\varphi =$
Así que nos olvidamos de ella

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_a^b \frac{2\rho_0\,\omega(r')^2\,\mathrm{sen}^4\theta\;\hat{z}}{[z^2+(r')^2-2zr'\cos\theta']^{3/2}}\,dr'\,d\theta'\,d\varphi' \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$$

$$\vec{B} = \mu_0\,\rho_0\,\omega\,\hat{z}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_a^b \frac{(r')^2\,\mathrm{sen}^4\theta}{[z^2+(r')^2-2zr'\cos\theta']^{3/2}}\,dr'\,d\theta'$$

Apuntes de Pak

Campos Electromagnéticos I

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 2º curso
Curso 2004/2005

Contenido

- Formulario
- Apuntes de la asignatura.

Fecha de última actualización: 27 Agosto 2007

TEMA 1. ANALISIS VECTORIAL.

$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ rectangular $\bar{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$
↳ $\vec{dL}=dx\,\hat{x}+dy\,\hat{y}+dz\,\hat{z}$; $\vec{dS}=dydz\,\hat{x}+\dots$
$d\bar{V}=dxdy\,dz$

$(\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{z})$ cilíndricas $\bar{r}=\rho\hat{\rho}+z\hat{z}$
$\vec{dL}=d\rho\,\hat{\rho}+\rho d\varphi\,\hat{\varphi}+dz\,\hat{z}$
$\vec{dS}=\rho\,d\varphi\,dz\,\hat{\rho}+d\rho\,dz\,\hat{\varphi}+d\rho\,\rho\,d\varphi\,\hat{z}$
$dV=d\rho\,\rho\,d\varphi\,dz$

$(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi})$ esféricas $\bar{r}=r\hat{r}$
$\vec{dL}=dr\,\hat{r}+rd\theta\,\hat{\theta}+r\mathrm{sen}\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$
$\vec{dS}=r^2\mathrm{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{r}+r\mathrm{sen}\theta\,drd\varphi\,\hat{\theta}+rdrd\theta\,\hat{\varphi}$
$dV=r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$u_1u_2u_3$	$h_1\,h_2\,h_3$
$x\ y\ z$	$1\ 1\ 1$
$\rho\ \varphi\ z$	$1\ \rho\ 1$
$r\ \theta\ \varphi$	$1\ r\ r\mathrm{sen}\theta$

$\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{v}}=(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$

$\nabla f=\frac{\hat{u}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}+\frac{\hat{u}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}+\frac{\hat{u}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}$

$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2)+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{\hat{u}_1}{h_2h_3} & \frac{\hat{u}_2}{h_1h_3} & \frac{\hat{u}_3}{h_1h_2}\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}$$

siendo
$\vec{A}=(A_1,A_1,A_3)$
en las corresp. coordenadas
h_i factor de escala

$\nabla f=\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$
$\nabla f=\hat{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$
Gauss: $\oint\!\!\oint\vec{A}\cdot\vec{dS}=\iiint\nabla\cdot\vec{A}\,dV$
Stokes: $\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}=\iint_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{dS}$

1. Transformación de coordenadas Rectangulares-Cilíndricas:

$x=\rho\cos\varphi$	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$
$y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\in\begin{cases}[0,\pi] & \text{si } y\geq 0\\(\pi,2\pi) & \text{si } y<0\end{cases}$
$z=z$	$z=z$

Vectores unitarios:

$\hat{x}=\cos\varphi\hat{\rho}-\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\varphi}$	$\hat{\rho}=\cos\varphi\hat{x}+\mathrm{sen}\,\varphi\hat{y}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\hat{y}=\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\rho}+\cos\varphi\hat{\varphi}$	$\hat{\varphi}=-\mathrm{sen}\,\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\hat{z}=\hat{z}$	$\hat{z}=\hat{z}$

2. Transformación de coordenadas Rectangulares-Esféricas:

$x=r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$y=r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$\theta=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\in[0,\pi]$
$z=r\cos\theta$	$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\in\begin{cases}[0,\pi] & \text{si } y\geq 0\\(\pi,2\pi) & \text{si } y<0\end{cases}$

Vectores unitarios:

$\hat{x}=\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\hat{r}+\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta}-\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\varphi}$	$\hat{r}=\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\hat{x}+\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{y}+\cos\theta\hat{z}$ $=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\hat{y}=\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{r}+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\theta}+\cos\varphi\hat{\varphi}$	$\hat{\theta}=\cos\theta\cos\varphi\hat{x}+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{y}-\mathrm{sen}\,\theta\hat{z}$ $=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(z\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\hat{z}\right)$
$\hat{z}=\cos\theta\hat{r}-\mathrm{sen}\,\theta\hat{\theta}$	$\hat{\varphi}=-\mathrm{sen}\,\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Transformación de coordenadas Cilíndricas-Esféricas:

$\rho=r\,\mathrm{sen}\,\theta$	$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$
$\varphi=\varphi$	$\theta=\mathrm{arctg}\frac{\rho}{z}\in[0,\pi]$
$z=r\cos\theta$	$\varphi=\varphi$

Vectores unitarios:

$\hat{\rho}=\mathrm{sen}\,\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta}$	$\hat{r}=\mathrm{sen}\,\theta\hat{\rho}+\cos\theta\hat{z}=\frac{\rho\hat{\rho}+z\hat{z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$
$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}$	$\hat{\theta}=\cos\theta\hat{\rho}-\mathrm{sen}\,\theta\hat{z}=\frac{z\hat{\rho}-\rho\hat{z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$
$\hat{z}=\cos\theta\hat{r}-\mathrm{sen}\,\theta\hat{\theta}$	$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}$

INTEGRACIÓN (casos típicos)

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}$ si $x\ll 1$

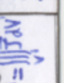
$\int_{-a}^{a}\frac{dy'}{[(y')^2+K^2]^{1/2}}=2\mathrm{arcsh}(\frac{a}{k})=2\ln\left[\frac{a}{k}+\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+1}\right]$

$\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy'}{[(y')^2+K^2]^{1/2}}=\ln\left[\frac{y_2}{k}+\sqrt{\frac{y_2^2}{k}+1}\right]-\ln\left[\frac{y_1}{k}+\sqrt{\frac{y_1^2}{k}+1}\right]$?

senos, cosenos, tangentes:
potencia impar sen, cos → $\cos^2+\mathrm{sen}^2=1$
par sen → $\cos 2A=1-2\mathrm{sen}^2A$
par cos → $\cos 2A=2\cos^2A-1$
potencia de tg → $1+tg^2=\frac{1}{\cos^2}$

$\int_a^b\frac{\rho}{[z^2+\rho^2]^{3/2}}=\left[-\frac{1}{[z^2+\rho^2]^{1/2}}\right]_a^b$

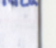
$S_{esfera}=4\pi r^2$



sup. corriente
$dI=J_s\,dl$
$\oint I\,\vec{dl'}=\iiint\vec{J}\,dV$
hilo: $J=I_0\delta()\delta()$
$dI=\vec{J}\cdot\vec{dS}$

TEMA 2. ELECTROSTATICA EN EL VACIO

· sup cónica



· Calcular $\vec{E}$
↳ simetria
↳ $dE=\frac{dq'(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$ → hacer $\frac{(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$ ↓ deshechar comp q se anulen por simetria
↳ integrar
∭ si $dq=\rho(r)dV$
∬ si $dq=\sigma(r)dS$
∫ si $dq=\lambda(r)\,dl$
elegir coord y limites ok
¡ $\theta\in[0,\pi]$!

· Fuerta
$F=q\cdot\vec{E}$

· Distribución generalizada
ej. igualar $\iint_{S'}\sigma\,ds'=\iiint\rho\,dV$
sustituir ds y dV adecuados (ej)
$\int_0^{2\pi}\int_0^R\sigma\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\,drd\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^R\rho^2\,r^2\mathrm{sen}\theta\,drd\theta d\varphi$
añadir una δ adecuada a la izquierda
$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^R\sigma\,\delta(\theta-\alpha)\,\mathrm{sen}\theta d\dots=\dots$
comparar integrandos y despejar $\rho=\frac{\sigma\,\delta(\theta'-\alpha)}{r'}$

mediante Gauss
· forma diferencial: $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon_0}$
· sup adecuada: integrando V ∭ $E\cdot S=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

circulación E
$\oint E\cdot dl=0$ $\nabla\times E=0$
Poisson $\nabla^2\phi=-\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon_0}$

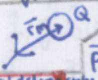
Fórmulas potencial:
$\phi(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dV'$
sup equipot $=k$
$E(\bar{r})=-\nabla\phi(\bar{r})$ $\underbrace{\Delta\phi}$
$W_{A\to B}^{INT}=-q(\phi_B-\phi_A)=-W_{A\text{-}B}^{EXT}$
$W_{\infty\to d}^{EXT}=\int_{\infty}^{d}\vec{F}_{ext}\cdot\vec{dr}=-\int_{\infty}^{d}q\vec{E}\cdot\vec{dr}$

Calculo potencial:
1ª forma: integrando (mismos pasos que $\vec{E}$ pero formula distinta)
2ª forma: conocemos $\vec{E}$ que sólo tiene comp. en una coordenada
muy típica ↗ en típica esfera con capas
$\vec{E}=-\nabla\phi=-\left(\frac{1}{h_j}\frac{\partial\phi}{\partial u_j}\hat{u}_j\right)=$ expresión conocida
despejar $\frac{\partial\phi}{\partial u_j}$ e integrar a mano → se puede tomar como ref un cond ← ∞
$\vec{E}$ por Gauss luego φ integrando $-\frac{\partial\phi}{\partial r}=\vec{E}(\bar{r})$ $V_{\infty}-V(r)=-\int_r\vec{E}$
$V_\infty\to 0$

Energia Electrostática:
$u_e=\frac{1}{2}\sum q_i'\,\phi(\vec{r_i}')$ $(=\frac{1}{2}QV)$ ↖ lo ideal cuando hay conductores
$u_e=\frac{1}{2}\iiint_V\rho(\bar{r}')\phi(\bar{r}')dV'$
$u_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V\infty}|E|^2dV$

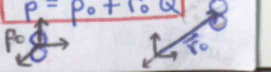
Desarrollo potencial en multipolos:
momento dipolar: $\vec{p}=\iiint_{V'}\vec{r'}\rho(\vec{r'})\,dv'$

$\vec{p}=\vec{r}_m Q$

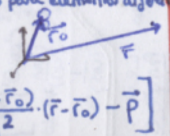


$\bar{p}=\bar{p}^++\bar{p}^-$
$=\vec{r}_m^+Q^++\vec{r}_m^-Q^-$
$=aQ^+\hat{z}+aQ^-(-\hat{z})$
$=2aQ^+\hat{z}$

$\vec{p}=\vec{p}_0+\vec{r}_0\,Q$



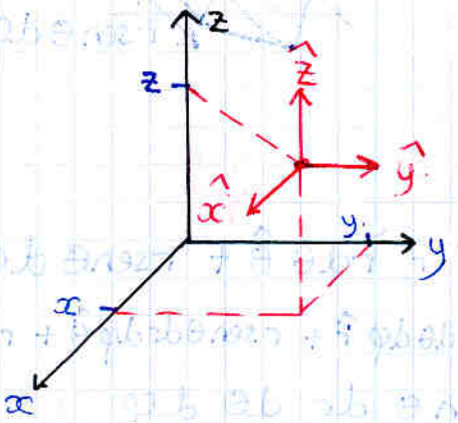
una vez tenemos $\vec{p}$ (a veces truco calcular ρ para elementos diferenciales)
$\phi(\bar{r})\simeq\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}_0|}+\frac{\vec{p}(\bar{r}-\bar{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}$
$E(\bar{r})\simeq\frac{Q(\vec{r}-\vec{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\left[\frac{3\vec{p}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)-\vec{p}\right]$

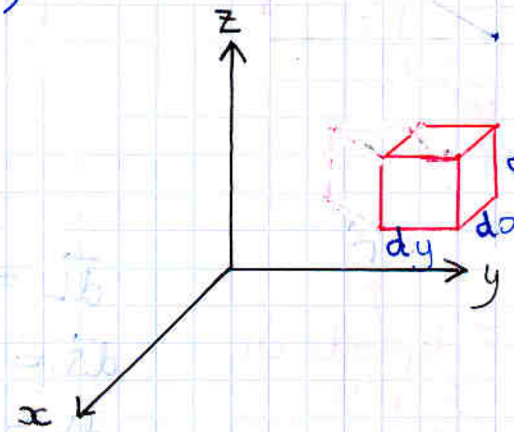


TEMA 1. ANALISIS VECTORIAL

Sistemas coordenados

Rectangular ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)





$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

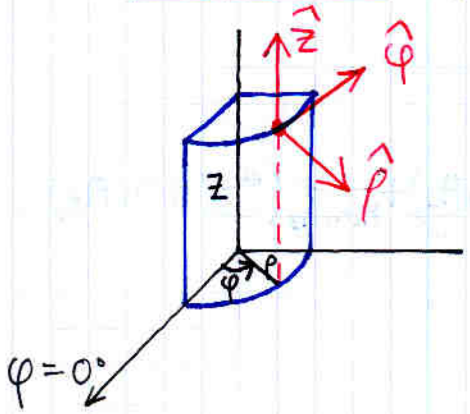
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son vectores unitarios siempre fijos

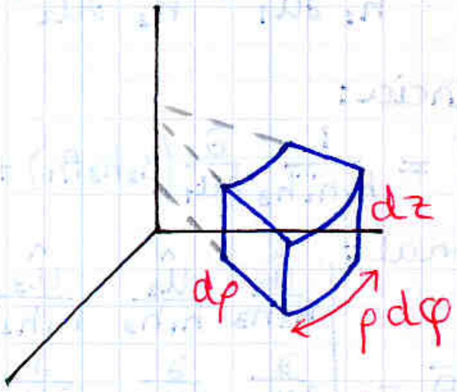
$d\vec{L} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$

$d\vec{S} = dydz\,\hat{x} + dxdz\,\hat{y} + dxdy\,\hat{z}$

$dV = dx\,dy\,dz$

Cilindrico ($\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$)





$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$

↑ $\hat{\rho}$ depende de φ

$\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ no son fijos. Dependen del punto

Ademas:

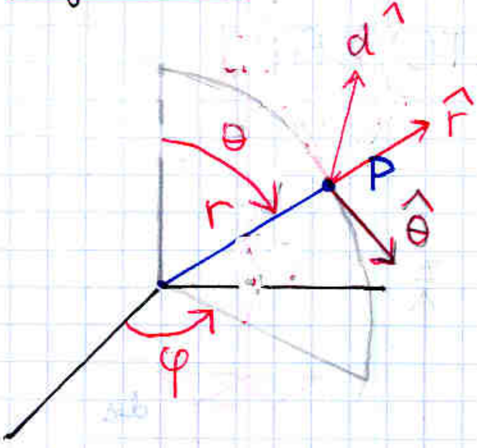
$$\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$$

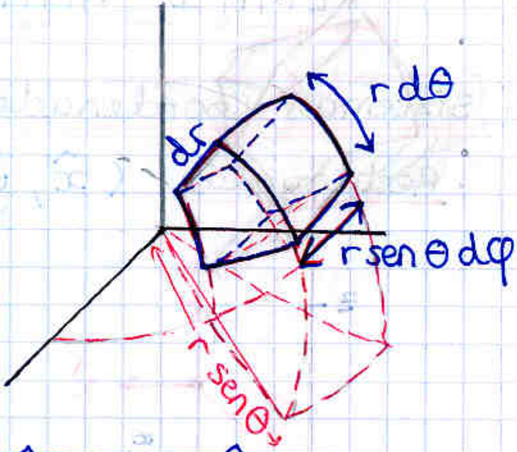
$d\vec{L} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z}$

$d\vec{S} = \rho d\varphi dz\,\hat{\rho} + d\rho dz\,\hat{\varphi} + d\rho\,\rho\,d\varphi\,\hat{z}$

$dV = d\rho\;\rho d\varphi\;dz$

• Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$





$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$\vec{r}$ depende de φ y θ

$\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ no són fijos

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$$

$$\vec{dl} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r sen\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$d\vec{S} = r^2 sen\theta\, d\theta\, d\varphi\,\hat{r} + r sen\theta\, dr\, d\varphi\,\hat{\theta} + r\, dr\, d\theta\,\hat{\varphi}$$

$$dV = r^2\, sen\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Factores de escala y operador Nabla (referencia muy útil)

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\hat{u}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)$$

Rotacional:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} & \frac{\hat{u}_2}{h_1 h_3} & \frac{\hat{u}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

siendo $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ los vectores unitarios del sistema de coordenadas

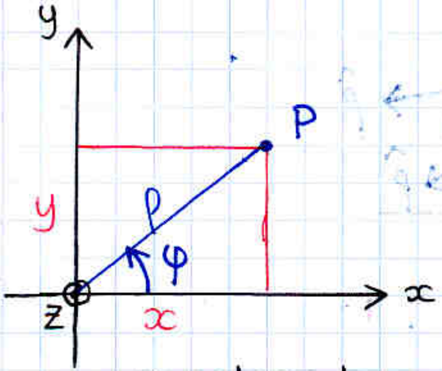
siendo $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$

siendo h_1, h_2, h_3 los factores de escala de cada coordenada

Sistema de cordenadas:	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
- Rectangulares	x	y	z	1	1	1
- Cilíndricas	ρ	φ	z	1	ρ	1
- Esféricas	r	θ	φ	1	r	$r sen\theta$

Transformación de coordenadas

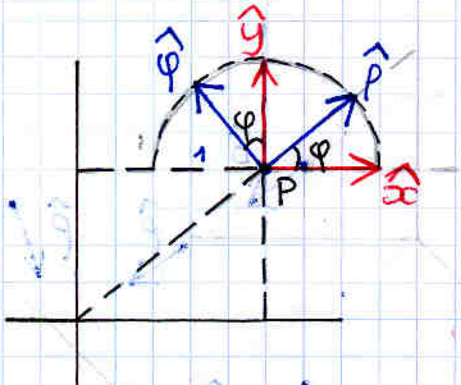
· Rectangulares ⟷ Cilindricas



Coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = y/x \\ \varphi = \operatorname{atan}(y/x) \end{cases}$$



Vectores unitarios

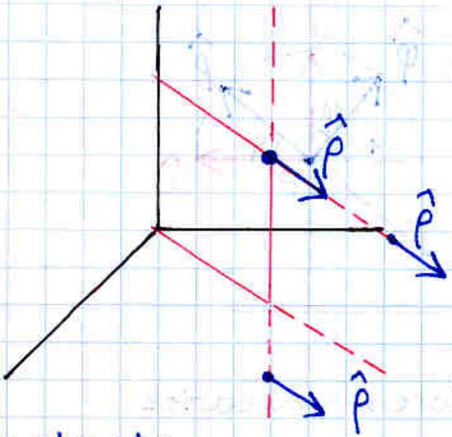
$$\begin{cases} \hat{\rho} = \cos \varphi \, \hat{x} + \operatorname{sen} \varphi \, \hat{y} \\ \hat{\varphi} = -\operatorname{sen} \varphi \, \hat{x} + \cos \varphi \, \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos \varphi \, \hat{\rho} - \operatorname{sen} \varphi \, \hat{\varphi} \\ \hat{y} = \operatorname{sen} \varphi \, \hat{\rho} + \cos \varphi \, \hat{\varphi} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

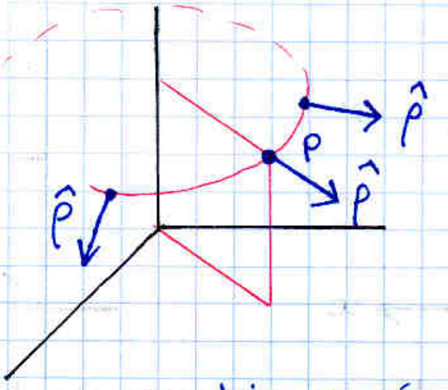
ejercicio 1.1 del libro

En sistema cilíndrico, calcular derivadas parciales de los vectores unitarios respecto a coordenadas

Vector $\hat{\rho}$



constante
respecto a ρ y a z



cambia según cambia φ

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\ \hat{x} + \operatorname{sen}\varphi\ \hat{y}$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\rho} = \frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\rho}\hat{x} + \cos\varphi\frac{\partial(\hat{x})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\operatorname{sen}\varphi)}{\partial\rho}\hat{y} + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial(\hat{y})}{\partial\rho}$$

$$= 0$$

NOTA
$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ son siempre constantes. Su derivada respecto a cualquier cosa es cero.

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi\ \hat{x} + 0 + \cos\varphi\ \hat{y} + 0$$

$$= \hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial z} = 0$$

Vector $\hat{\varphi}$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\rho} = 0$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi} = -\hat{\rho}$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z} = 0$$

Vector z

$$\frac{\partial\hat{z}}{\partial\rho} = 0$$

$$\frac{\partial\hat{z}}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial\hat{z}}{\partial z} = 0$$

Integración

· Notación

- mayuscula: A → función genérica (escalar o vectorial)
- minuscula: f → función escalar
- mayúscula con flecha $\vec{A}$ → función vectorial

$(\circ) \rightarrow A \circ B \rightarrow$ cualquier producto

$(\ ) \rightarrow fg, \ f\vec{A} \rightarrow$ producto ordinario

$(\bullet) \rightarrow \vec{A} \bullet \vec{B} \rightarrow$ producto escalar

$(\times) \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} \rightarrow$ producto vectorial

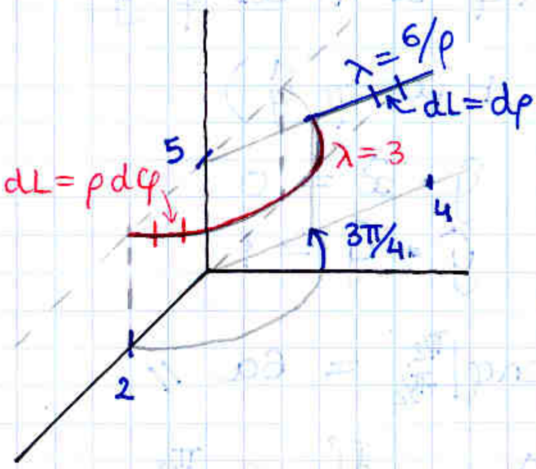
· Integrales de linea

ejercicio 1.2 del libro

Calcular la carga total de una distribución lineal de carga cuya densidad y forma vienen dadas por:

$\lambda = 3 \ C/m$ PARA $\rho = 2, \ \varphi \in [0, 3\pi/4], \ z = 5$

$\lambda = 6/\rho \ C/m$ PARA $\rho \in [2,4], \ \varphi = \frac{3\pi}{4}, \ z = 5$



$$Q = \int \lambda \, dL \qquad ① \ dL = \rho \, d\varphi \quad ② \ dL = d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \lambda \rho \, d\varphi + \int_2^4 \lambda \, d\rho$$

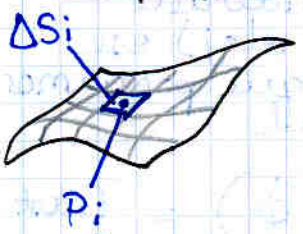
$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} 4 \cdot 2 \, d\varphi + \int_2^4 \frac{6}{\rho} \, d\rho$$

$$= \ldots = \frac{18\pi}{4} + 6 \ln 2$$

Linea

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} A(P_i) \circ \Delta L_i$$

Superficie



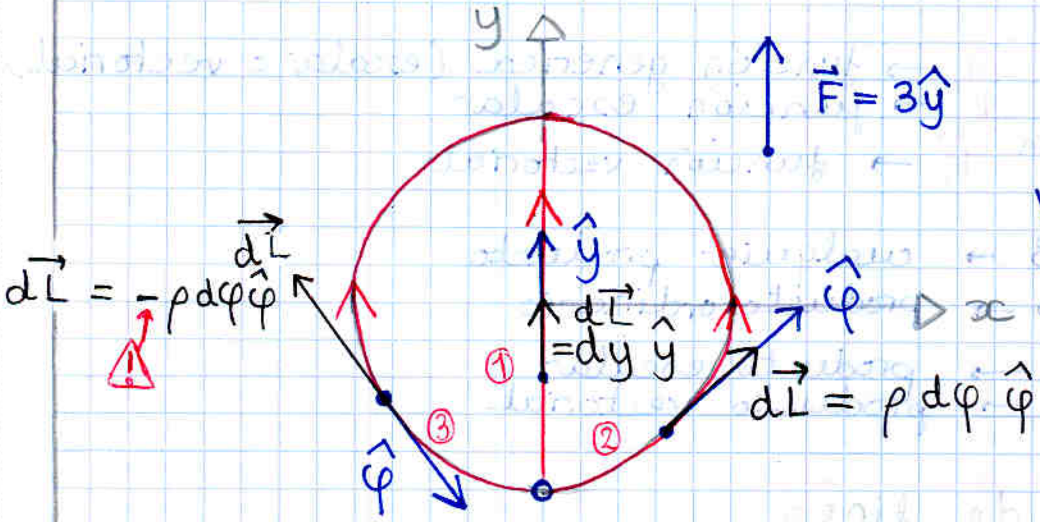
$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} A(P_i) \circ \Delta S_i$$

Volumen

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} A(P_i) \circ \Delta V_i$$

Ejercicio 1.4 del libro

Calcular el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = 3\hat{y}$ al desplazarse desde $A(0,-a,0)$ hasta $B(0,a,0)$ siguiendo tres trayectorias distintas



$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{dL}$$

① $\boxed{\vec{dL} = dy\,\hat{y}}$

$$W = \int_{-a}^{a} 3\hat{y} \cdot dy\,\hat{y} = \int_{-a}^{a} 3\,dy = \dots = 6a \;//$$

② $\boxed{\vec{dL} = \rho\, d\varphi\, \hat{\varphi} = a\, d\varphi\, \hat{\varphi}}$

$$W = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\hat{y} \cdot a\, d\varphi\, \hat{\varphi}$$

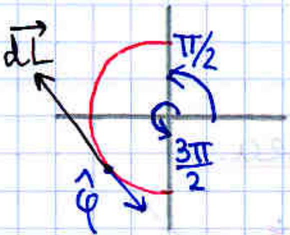
$$\boxed{\hat{\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi\ \hat{x} + \cos\varphi\ \hat{y}}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\hat{y} \cdot a\, d\varphi\, (-\operatorname{sen}\varphi\ \hat{x} + \cos\varphi\ \hat{y})$$

$$\boxed{\begin{matrix} \hat{y} \cdot \hat{x} = 0 \\ \hat{y} \cdot \hat{y} = 1 \end{matrix}}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos\varphi\, d\varphi = 3a \operatorname{sen}\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 6a \;//$$

③ $\boxed{\vec{dL} = -\rho\, d\varphi\, \hat{\varphi} = -a\, d\varphi\, \hat{\varphi}}$



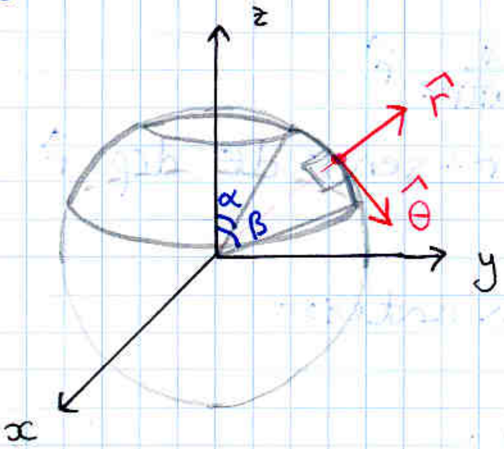
según el $\hat{\varphi}$ que hemos considerado (sentido contrario agujas del reloj) ese debe ser el sentido en el que pongamos los límites de la integral

$$W = \int_{\underline{\pi/2}}^{3\pi/2} 3\hat{y} \cdot (-a\, d\varphi\, \hat{\varphi}) = (\text{sust } \varphi) = \dots = 6a \;//$$

ejemplo 1.7 (pag 20)

Calcular el flujo de: $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$

a través de la superficie $r = a$; $\alpha \le \theta \le \beta$
en sentido $-\hat{r}$



como no dicen nada de φ
$\equiv$ $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Phi = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$d\vec{S} = -r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

↳ porq el sentido es $-\hat{r}$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \cdot (-r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r})$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta - \frac{Q \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi}{4\pi}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

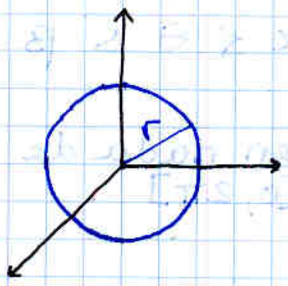
$$= -\frac{Q}{4\pi} 2\pi \int_\alpha^\beta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{Q}{2}\left[-\cos\theta\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{Q}{2}\cos\theta\Big|_\alpha^\beta$$

Ejemplo 1.8 (pag 20)

Calcular el flujo de $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$ a través de una esfera de radio arbitario



Por defecto en superficie cerrada, $\vec{dS}$ hacia fuera

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{dS} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

$$\vdots$$

podemos utilizar la solución anterior

$$\phi_{-\hat{r}} = \frac{Q}{2}\left[\cos\beta - \cos\alpha\right]$$

sup esférica: $\alpha = 0$, $\beta = \pi$

$$= \frac{Q}{2}\left[-1-1\right]$$

$$\phi_{-\hat{r}} = -Q$$

$$\phi_{\hat{r}} = Q$$

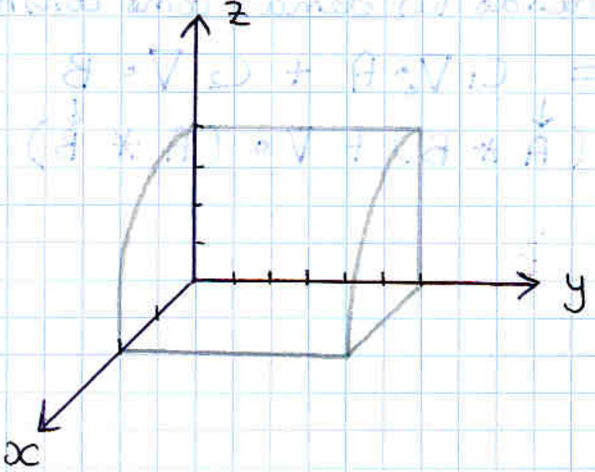
ejemplo 1.7

Calcular carga total de una distribución volumétrica de carga de densidad constante ρ C/m3 que ocupa el siguiente volumen

$x \in [0,2]$

$y \in [0,6]$

$z \in [0, 4-x^2]$



$dV = dx\,dy\,dz$

$$Q = \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \rho \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} \rho \, dz\, dy\, dx = 6\rho \int_0^2 \int_0^{4-x^2} dz\, dx$$

$$= 6\rho \int_0^2 (4-x^2)\, dx = 6\rho \left[4x\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \right]$$

$$= 48\rho - \frac{48}{3}\rho = 32\rho$$

Derivadas

Derivadas temporales: se utilizará derivada ordinaria (total o parcial)

Derivadas espaciales: se utilizará el operador nabla.

Operador Nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$ operador vectorial

NOTACION: $\circ$ y $*$ son producto genérico

$\downarrow$ indica las funciones sobre las que hay que aplicar la derivación, considerando las demas como constantes

$$\nabla \circ (C_1 A + C_2 B) = C_1 \nabla \circ A + C_2 \nabla \circ B$$

$$\nabla \circ (A * B) = \nabla \circ (\overset{\downarrow}{A} * B) + \nabla \circ (A * \overset{\downarrow}{B})$$

Derivadas de Volumen (grad, div, rot)

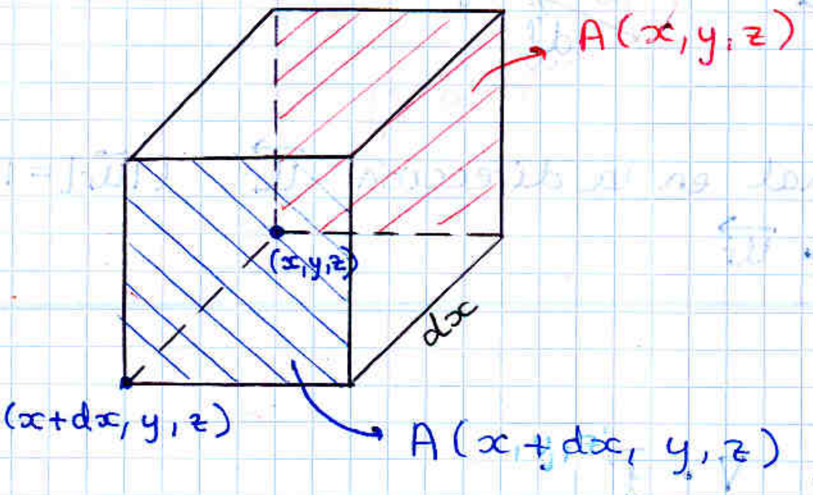
$$\boxed{\lim_{V\to 0} \frac{\oiint d\vec{S} \circ A}{V} = \nabla \circ A}$$

∇f : gradiente

$\nabla \bullet A$: divergencia

$\nabla \times A$: rotacional

Demostración



$$\lim_{V\to 0} \frac{\oiint d\vec{S} \circ A}{V} = \frac{dy\,dz\ \hat{x} \circ (A(x+dx,y,z) - A(x,y,z))}{dx\,dy\,dz}$$

$$+ \frac{dx\,dz\ \hat{y} \circ (A(x,y+dy,z) - A(x,y,z))}{dx\,dy\,dz}$$

$$+ \frac{dx\,dy\ \hat{z} \circ (A(x,y,z+dz) - A(x,y,z))}{dx\,dy\,dz}$$

$$= \hat{x} \circ \frac{\partial A}{\partial x} + \hat{y} \circ \frac{\partial A}{\partial y} + \hat{z} \circ \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$= \left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right] \circ A$$

$$= \nabla \circ A$$

- Gradiente

$$\underset{\text{escalar}}{f} \longrightarrow \underset{\text{vectorial}}{\nabla f}$$

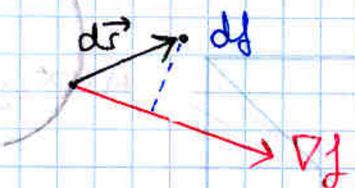
Módulo: rapidez de variación

Dirección: la de máxima variación

∇f perpendicular a las superficies de nivel

$|\nabla f|$ = valor de la máxima derivada direccional

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$



Derivada direccional en la dirección $\vec{u_r}$ $(|\vec{u_r}|=1)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{\vec{u_r}} = \nabla f \cdot \vec{u_r}$$

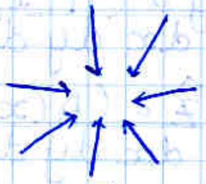
- Divergencia

$$\underset{\text{vectorial}}{\vec{F}} \longrightarrow \underset{\text{escalar}}{\nabla \cdot \vec{F}}$$

Indica la aparición y desaparición de un campo vectorial

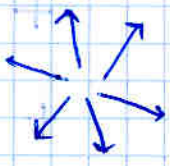
$\nabla \cdot \vec{F} < 0$

entran mas que salen



$\nabla \cdot \vec{F} < 0$

sumidero



$\nabla \cdot \vec{F} > 0$

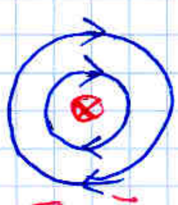
fuente

- Rotacional

$$\underset{\text{vectorial}}{\vec{F}} \longrightarrow \underset{\text{vectorial}}{\nabla \times \vec{F}}$$

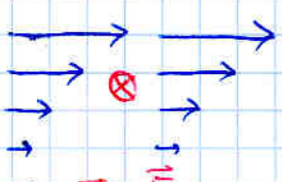
Indica la tendencia de un campo vectorial a girar o enroscarse sobre un punto.

Imaginamos un molinillo



⊗ $\nabla \times \vec{F}$

⊙ $\nabla \times \vec{F}$

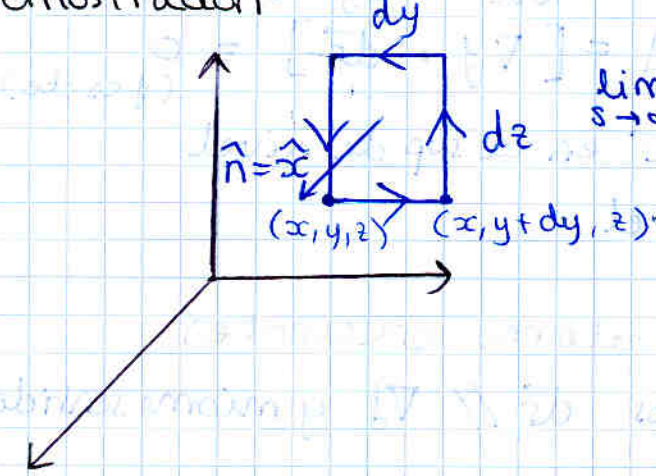


⊗ $\nabla \times \vec{F}$

Derivadas de superficie

$$\lim_{S \to 0} \frac{\oint d\vec{L} \circ A}{S} = (\hat{n} \times \nabla) \circ A$$

Demostración



$$\lim_{S \to 0} \frac{\oint d\vec{L} \circ A}{S}$$

$$= \frac{dz\, \hat{z} \circ [A(x, y + dy, z) - A(x, y, z)]}{dy\, dz}$$

$$- \frac{dy\, \hat{y} \cdot [A(x, y, z + dz) - A(x, y, z)]}{dy\, dz}$$

$$= \hat{z} \circ \frac{\partial A}{\partial z} - \hat{y} \circ \frac{\partial A}{\partial z}$$

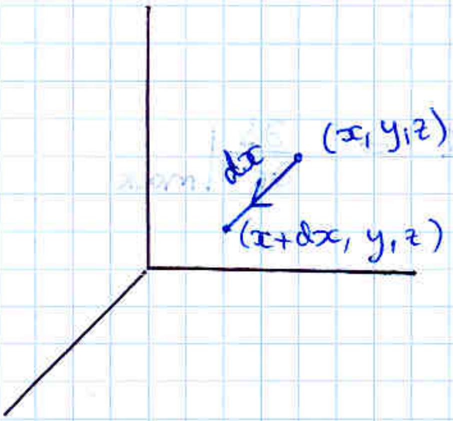
$$= \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{y} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot A$$

$$= (\hat{x} \times \nabla) \circ A$$

Derivadas de línea

$$\lim_{L \to 0} \frac{A(P_{fin}) - A(P_{ini})}{L} = \underbrace{(\hat{u} \cdot \nabla)}_{\text{un operador que se aplica sobre A}} \overset{\text{puede ser vectorial}}{A}$$

Demostración



$$\lim_{L \to 0} \frac{A(P_{fin}) - A(P_{ini})}{L} = \frac{A(x + dx, y, z) - A(x, y, z)}{dx}$$

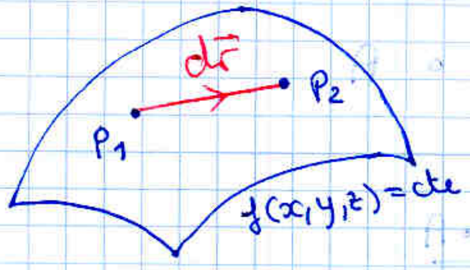
$$= \frac{\partial A}{\partial x}$$

Utilidad:

$$\frac{\partial A}{\partial u} = (\hat{u} \cdot \nabla) A$$

Ejercicio 1.3   Demostrar las propiedades de ∇f

1) ∇f es $\perp$ a sup de nivel



$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$\Delta f = df = f_{P_2} - f_{P_1}$$

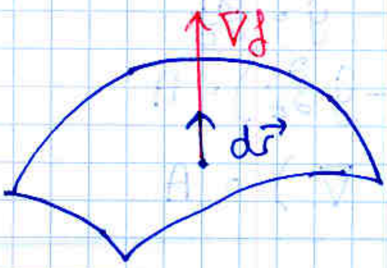
$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$df = [\nabla f \cdot d\vec{r}\,] = 0$$ (f es cte)

$\Rightarrow$ $\nabla f \perp d\vec{r}$ $\forall\, d\vec{r}$ en la sup de nivel

$\Rightarrow$ $\nabla f \perp$ sup. de nivel

2) sentido de ∇f hacia valores crecientes



Cogemos $d\vec{r} \parallel \nabla f$ y mismo sentido

$$\boxed{\Delta f = \nabla f \cdot d\vec{r}} = |\nabla f||d\vec{r}|\,\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\cos\alpha}$$

$$\Delta f = |\nabla f||d\vec{r}| \geq 0$$

$$\Delta f \geq 0$$

3) $|\nabla f|$ es el valor de la derivada direccional máxima

$$\Delta f = \nabla f \cdot d\vec{r} = |\nabla f||d\vec{r}|\cos\alpha$$

Δf_{max} cuando $\cos\alpha = 1$

$$\Delta f_{max} = |\nabla f|\,|dr|$$

despejar $\Rightarrow$ $|\nabla f| = \dfrac{\Delta f_{max}}{|dr|} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial r}\right|_{max}$

ejemplo 1.10

Calcular vector unitario normal a la superficie dada por $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ en punto $P(3,-1,2)$

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2$$

$f(x,y,z) = -10$ sup. de nivel

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$= 4x\,\hat{x} + 4z\,\hat{y} + (4y - 10z)\hat{z}$$

$$\nabla f|_P = 12\,\hat{x} + 8\,\hat{y} - 24\,\hat{z}$$

$$\boxed{\hat{n} = \frac{\nabla f|_P}{|\nabla f|_P|}} = \frac{12\hat{x} + 8\hat{y} - 24\hat{z}}{\sqrt{12^2 + 8^2 + 24^2}} = \frac{1}{7}(3\hat{x} + 2\hat{y} - 6\hat{z})$$

ejemplo 1.11

Calcular la derivada direccional según la dirección $\hat{t} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$ de $\vec{A} = z\hat{x} + y^2\hat{z}$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\hat{t}\cdot\nabla)\vec{A}}$$

∇A (0, 2y,

$$(\hat{t}\cdot\nabla) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$ es un operador

$$(\hat{t}\cdot\nabla)A = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{0}{\frac{\partial A}{\partial x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\searrow\, \underline{\underline{2y\hat{z}}}}{\frac{\partial A}{\partial y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}2y\,\underline{\underline{\hat{z}}}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sqrt{2}\,y\,\hat{z}$$

Derivadas de orden superior

La aplicación reiterada del operador ∇ da lugar a:

1. $\nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f$ (laplaciano)
2. $\nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = 0$ $[\text{sen}(\widehat{\nabla,\nabla}) = 0]$
3. $\nabla(\nabla \cdot \vec{A})$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{A} = 0$
5. $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{\nabla^2} \vec{A}$?? $\nabla \times (\nabla \times A) = (\nabla \times \nabla) \times A = 0$??

Operador Nabla en cilíndricas

$$\nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Operador Nabla en esféricas

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \,\text{sen}\, \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

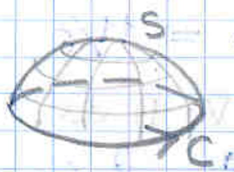
Teoremas del Análisis Vectorial

· Teorema de Gauss

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\, dV$$

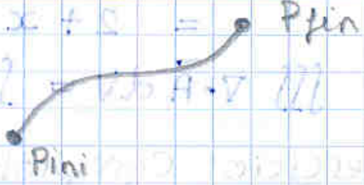
· Teorema de Stokes

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{L} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$



· Teorema

$$f_{P_{fin}} - f_{P_{ini}} = [f]_P = \int_L \nabla f\cdot d\vec{L}$$



- Aplicaciones del Teorema de Gauss

1. Integración por partes

$$\oiint f\vec{A}\cdot d\vec{S} \underset{\text{Gauss}}{\overset{T^a}{=}} \iiint_V \nabla\cdot(f\vec{A})dV = \iiint_V \nabla f\cdot\vec{A}\, dV + \iiint_V f\,\nabla\cdot\vec{A}\, dV$$

2. Primera Identidad de Green

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\cdot(g\nabla f) &= \nabla g\cdot\nabla f + g\ \nabla\cdot(\nabla f) \\ &= \nabla g\cdot\nabla f + g\ \nabla^2 f \\ \iiint_V [\nabla g\cdot\nabla f + g\nabla^2 f]\, dV &= \iiint \nabla\cdot[g\nabla f]\, dV \overset{T^a\ \text{Gauss}}{=} \\ &= \oiint_S g\nabla f\, d\vec{S} = \oiint g\nabla f\cdot\vec{n}\, dS = \oiint g(\hat{n}\cdot\nabla)f\, dS \\ &= \oiint g\frac{\partial f}{\partial n}\, dS \end{aligned}}$$

$$\iiint_V [\nabla g\cdot\nabla f + g\nabla^2 f]\, dV = \oiint_S g\frac{\partial f}{\partial n}\, dS$$

3. Segunda Identidad de Green

Restando la 1ª Identidad de Green a sí misma cambiando el orden de f y g.

$$\iiint_V [g\nabla^2 f - f\nabla^2 g]\, dV = \oiint_S \left[g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right] dS$$

ejercicio: Comprobar Tª Gauss para

$$\vec{A} = (2x-7)\,\hat{x} + x^2y\,\hat{y} - xz^2\,\hat{z}$$

en el volumen V delimitado por $x \in [0,1]$
$y \in [0,1]$
$z \in [0,1]$

- $\oint\!\!\oint \vec{A}\cdot d\vec{S}$ haciendo las 6 caras del cubo, en cada una una variable es 0 ó 1

$$= \int_0^1\int_0^1 (2-z)\,dy\,dz + \int_0^1\int_0^1 (-z)(-dy\,dz) + \int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dz$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 0\,(-dx\,dz) + \int_0^1\int_0^1 (-x)(dx\,dy) + \int_0^1\int_0^1 0\,(-dx\,dy)$$

$$= \ldots = 11/6$$

- $\iiint \nabla\cdot\vec{A}\,dV$

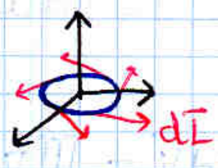
$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(2x-7) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-xz^2)$$
$$= 2 + x^2 - 2xz$$

$$\iiint \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 [2+x^2-2xz]\,dx\,dy\,dz = \ldots = 11/6$$

---

ejercicio: Comprobar el Teorema de Stokes para
$\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y} - z\hat{z}$ y la línea $x^2+y^2=a^2$, $z=0$

- $\oint \vec{A}\cdot d\vec{L}$



$$\boxed{d\vec{L} = a\,d\varphi\,\hat{\varphi}}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-y\hat{x} + x\hat{y} - \underset{0}{z}\hat{z})\cdot a\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

transformación vectores unitarios $\boxed{\hat{\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}}$

$$= \int_0^{2\pi} (-y\hat{x} + x\hat{y})\cdot a\,d\varphi\,(-\operatorname{sen}\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y})$$
$$= \int_0^{2\pi} [y\operatorname{sen}\varphi + x\cos\varphi]\,a\,d\varphi$$

transformación de coordenadas $\boxed{\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi \end{matrix}}$

$$= \int_0^{2\pi} [\rho\operatorname{sen}^2\varphi + \rho\cos^2\varphi]\,a\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \rho\,a\,d\varphi \qquad \rho=a$$
$$= \int_0^{2\pi} a^2\,d\varphi = 2\pi a^2 ///$$

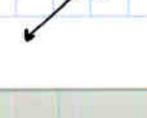
- $\iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & -z \end{vmatrix} = 2\hat{z}$$

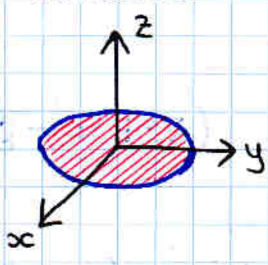
utilizaremos tres superficies distintas para el cálculo

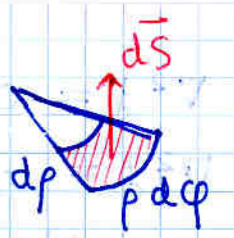

círculo


semiesfera


cilindro con tapa

- Círculo



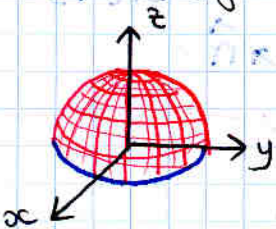


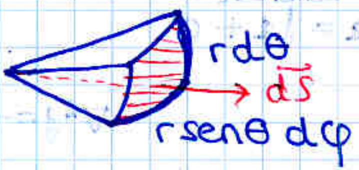
$$\vec{dS} = \rho\, d\varphi\ \hat{z}$$

$$\iint \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} 2\hat{z} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\ \hat{z} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} 2\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} \rho\, d\rho = 4\pi \frac{a^2}{2} = 2\pi a^2 /\!/$$

- Semiesfera



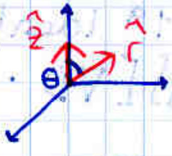


$$\vec{dS} = r^2\, \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi\ \hat{r}$$

$$\iint \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\hat{z} \cdot a^2\, \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi\ \hat{r}$$

transformación de coordenadas $\hat{z} = \cos\theta\ \hat{r} - \text{sen}\,\theta\ \hat{\theta}$ $\boxed{\hat{z} \cdot \hat{r} = \cos\theta}$

se puede ver de forma lógica

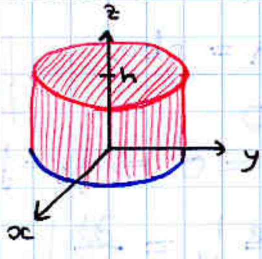


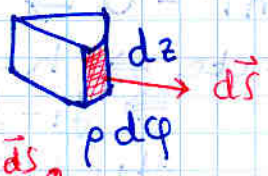
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2a^2\, \text{sen}\,\theta\, \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2\, \text{sen}\,(2\theta)\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot a^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, 2\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2\,\text{sen}(2\theta)\, d\theta = \pi a^2 \left[-\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi a^2 /\!/$$

- Cilindro con tapa





$$\vec{dS}_{lat} = \rho\, d\varphi\, dz\ \hat{\rho}$$

$$\vec{dS}_{tapa} = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

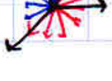
$$\iint \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} 2\hat{z} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\ \hat{z} + \int_0^{h} \int_0^{2\pi} 2\hat{z} \cdot a\, d\varphi\, dz\ \hat{\rho}$$

$\hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} 2\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2\pi a^2 /\!/$$

A veces conviene aplicar el sentido común: ejemplo que aparecerá mucho $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\varphi = 0$



al sumarse todos se cancelan

Obtención de un campo escalar conocido su Laplaciano

Ecuación de Laplace: $\nabla^2 f = 0$

Ecuación de Poisson: $\nabla^2 f = -g$ $\left(\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$

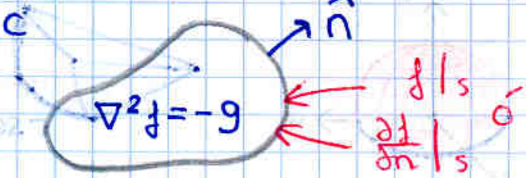
Teorema de existencia y unicidad

La solución de la ec. de Poisson existe Y ES ÚNICA en un volumen V limitado por S si:

↳ Problema de Dirichlet: Conocemos f en S $f|_S$

↳ Problema de Neumann: Conocemos $\frac{\partial f}{\partial n}$ en S $\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_S$

  ↳ tiene solución "única" excepto cte $f_2 = f_1 + C$



Demostración

Por reducción al absurdo. Suponemos 2 soluciones f_1 y f_2 tomamos $h = f_1 - f_2$

1ª Identidad de Green con $f = g = h$

$$\iiint [\nabla h \cdot \nabla h + h \nabla^2 h] = \oint\!\!\oint_S h \frac{\partial h}{\partial n} dS$$

↳ $\nabla^2 h = \nabla^2 (f_1 - f_2) = -g - (-g) = 0$

$$\rightarrow \iiint (\nabla h)^2 dV = \oint\!\!\oint h \frac{\partial h}{\partial n} dS$$

① Dirichlet: conocemos $f|_S \Rightarrow f_1|_S = f_2|_S = f|_S$

$\Rightarrow h|_S = f_1|_S - f_2|_S = 0$

$$\iiint |\nabla h|^2 dV = \oint\!\!\oint \underset{0}{\cancel{h}} \frac{\partial h}{\partial n} dS$$

$$\iiint |\nabla h|^2 dV = 0 \Rightarrow |\nabla h|^2 = 0 \Rightarrow h = cte$$

como $h|_S = 0$ y $h = cte \Rightarrow h = 0$

$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0 \Rightarrow f_1 = f_2$

② Neumann: conocemos $\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_S \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial f_2}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_S$

$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial n}\Big|_S = 0$

$$\iiint |\nabla h|^2 dV = \oint\!\!\oint h \overset{0}{\cancel{\frac{\partial h}{\partial n}}} dS$$

$\Rightarrow h = cte$

$\Rightarrow f_1 - f_2 = cte$

$\Rightarrow f_1 = f_2 + cte$

Notas

ej. $z \geq 0$

① Si volumen → ∞

se ha de asegurar: $f(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$ y $\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^2}$

para que la integral converga y exista sol.

② Solución existe y es única si:

a) Conocemos $f|_S$ - DIRICHLET

b) Conocemos $\frac{\partial f}{\partial n}|_S$ - Neumann

c) Dirichlet y Neumann mezclados
para cada punto conocemos $f|_S$ ó $\frac{\partial f}{\partial n}|_S$

③ Para el problema de Neumann se debe cumplir:

$$\boxed{\oiint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dS = - \iiint_V g \, dV}$$

DEM:

Problema Neumann: $\nabla^2 f = -g$ $\quad \frac{\partial f}{\partial n}|_S$

$\nabla \cdot (\nabla f) = -g$

divergencia del rotacional

Por Tª Gauss $\oiint \nabla f \cdot \vec{dS} = - \iiint g \, dV$

$$\oiint \nabla f \cdot \vec{dS} = \oiint \nabla f \cdot dS \, \hat{n} = \oiint \hat{n} \cdot \nabla f \, dS = \oiint (\hat{n} \cdot \nabla) f \, dS = \oiint \frac{\partial f}{\partial n} \, dS$$

$$\oiint \frac{\partial f}{\partial n} \, dS = - \iiint g \, dV$$

④ $\nabla^2 f = -g \longrightarrow$ EC. POISSON

$\nabla^2 f = 0 \longrightarrow$ EC. LAPLACE

$$f_{POISSON} = f_{LAPLACE} + f_{PARTICULAR}$$

$$f_{PARTICULAR} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{g(\vec{r}')}{r'|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV'$$

TEMA 2. ELECTROSTÁTICA EN EL VACIO

2.1. Carga Eléctrica

- Propiedad de la materia

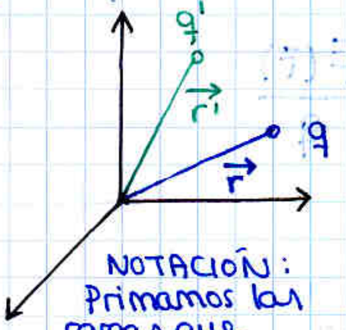
TEMA 2. ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

2.1. Carga Eléctrica

- Propiedad de la materia
- Principio de conservación de la carga:
  "sistema aislado → carga total constante"
- Tipos de carga
  - ↳ Atracción: (+−)
  - ↳ Repulsión: (++), (−−)
- Cuantización de la carga
  - ↳ Múltiplo de la carga del electrón $q_e = 1'602 \cdot 10^{-19}$ C
  - ↳ En campos → Estudio macroscópico
    - ↳ Distribuciones continuas de carga

2.2. Fuerzas entre cargas eléctricas

En 1785 Coulomb propuso 'La Ley de Coulomb'



NOTACIÓN: Primamos las cargas que generan fuerza, campo, ...

$\vec{F}_{q'q} \equiv$ Fuerza que q' ejerce sobre q

$\vec{F}_{qq'} \equiv$ Fuerza que q ejerce sobre q'

$$\vec{F}_{q'q} = k \frac{q'q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

$$\hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$k = 8'988 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C}$

$\simeq 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C}$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{F}_{q'q} = \frac{\overbrace{q'q}^{\text{repulsión o atracción}} (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

LEY DE COULOMB

$$\vec{F}_{qq'} = -\vec{F}_{q'q}$$

$\varepsilon_0 \equiv$ Permitividad eléctrica del vacío

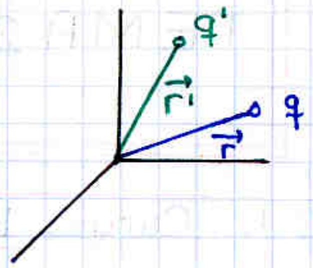
2.3. Campo Eléctrico

- Magnitud vectorial asociada a cada punto del espacio (haya o no una carga)
- Lo originan las distribuciones de carga
- Determina la fuerza por unidad de carga positiva

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

2.3.1. Campo eléctrico creado por una carga puntual

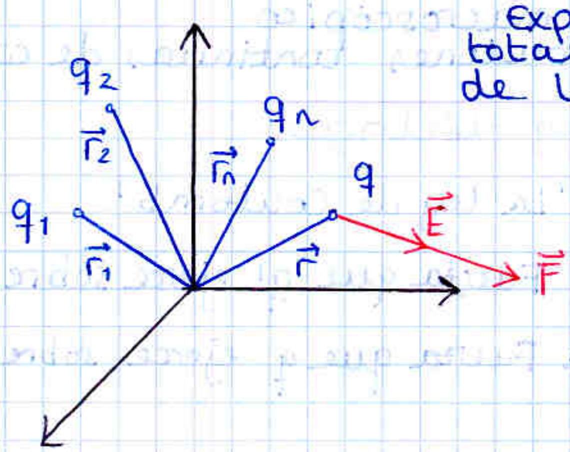
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q'q}}{q} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{q'\,(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$



Detalle:
Formalmente, para definir $\vec{E}$, se evita cualquier efecto que q pueda tener sobre q' haciendo $q \to 0$

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}_{q'q}}{q}$$

2.3.2 Principio de Superposición



experimentalmente; la fuerza total es la suma vectorial de las fuerzas

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

2.3.3 Distribuciones continuas

a) Densidad volumétrica de carga

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ'}{dV'} \qquad \vec{E} = \iiint_V dE = \iiint_V \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\boxed{dQ' = \rho(\vec{r})\,dV'} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}')\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV}$$

b) Densidad superficial de carga

$$\boxed{dQ' = \sigma(\vec{r})\,dS'} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \sigma(\vec{r}')\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dS$$

$$\vec{E} = \iint_S d\vec{E}$$

c) Densidad lineal de carga

$$\boxed{dQ' = \lambda(\vec{r})\,dL'} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \lambda(\vec{r})\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dl$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Definición formal

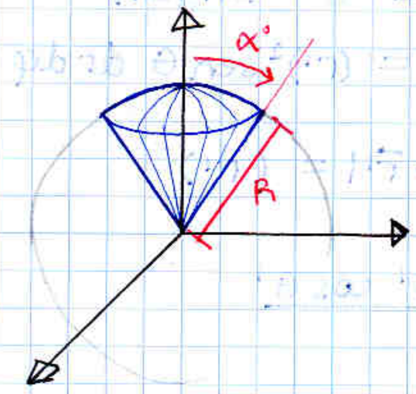
$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V'\to 0}\frac{\Delta Q'}{\Delta V'} \qquad \sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q'}{\Delta S'} \qquad \lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\Delta Q'}{\Delta L'}$$

Problema 1.

Obtener $\vec{E}$ en el origen de coordenadas

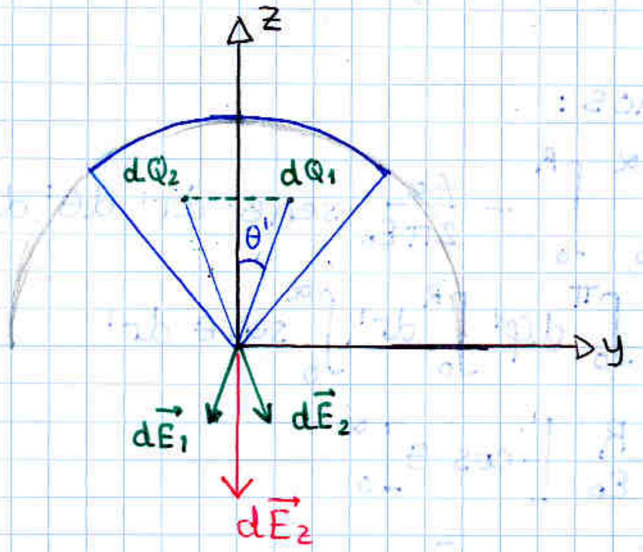
Distribución volumétrica de carga

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\cos\theta'} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$



Consideraciones previas:

- coordenadas: esféricas
- Simetría: se anulan todas las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ de $\vec{E}$.



$$d\vec{E}_z = - dE_z \, \hat{z}$$

$$dE_z = 2 \, dE \cos\theta'$$

$$d\vec{E} = \frac{dq' \, (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$dE = |d\vec{E}| = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2}$$

$$\boxed{d\vec{E}_z = - \frac{2 \, dq' \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \, \hat{z}}$$

Ahora se hace $\vec{E}_z = \iiint_V d\vec{E}_z$

Integramos entre $r \in [0,R]$
$\theta \in [0,\alpha]$
$\varphi \in [0,\pi]$ ⚠

$$dE_z = -2\,\frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\cos\theta = \left\{\begin{array}{l} dq' = \rho(\vec{r}')\,dV \\ \qquad \rho(\vec{r}') = \rho_0/\cos\theta' \\ \vec{r} = 0 \quad \text{(origen)} \\ dV = \underbrace{(r')^2 \operatorname{sen}\theta \; dr\, d\varphi\, d\theta}_{\text{esféricas}} \\ |\vec{r}-\vec{r}'| = (r') \end{array}\right\}$$

$$= -\frac{\frac{\rho_0}{\cancel{\cos\theta'}}\cancel{(r')^2}\operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'\, \cancel{\cos\theta'}}{2\pi\varepsilon_0\,\cancel{(r')^2}}$$

$$dE_z = -\frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

Ahora integramos:

$$E_z = \iiint_V dE_z = \int_0^{\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{R} -\frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= -\frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\theta\, dr'$$

$$= \cancel{-}\,\frac{\rho_0\,\cancel{\pi}\,R}{2\,\cancel{\pi}\,\varepsilon_0}\Big[\cancel{-}\cos\theta\Big]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}\left[\cos\alpha - 1\right]$$

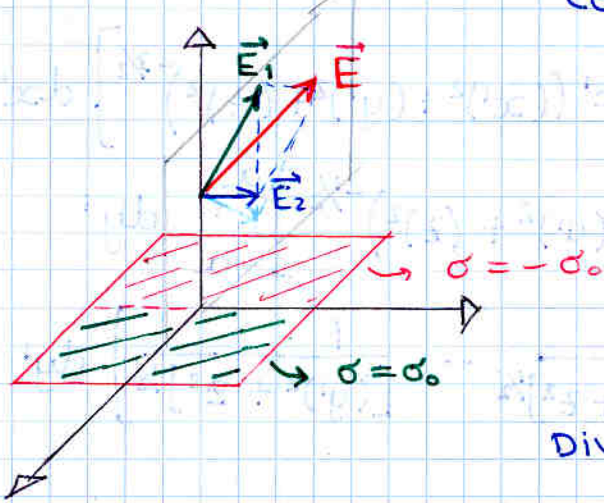
$$.\ \vec{E}_z = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}\left[\cos\alpha - 1\right]\hat{z} \quad \text{en } (0,0,0)$$

Problema 2

Dada la distribución superficial de carga
$$\sigma = \sigma_0 \frac{|x|}{x}$$

definida en la superficie $\left\{ \begin{array}{l} -a \leq x \leq a \\ -a \leq y \leq a \\ z = 0 \end{array} \right\}$

Obtener $\vec{E}$ en el eje z



Consideraciones Previas:

- Sistema: cartesiano
- $\vec{r} = z\hat{z}$
  $\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$
- simetría:
  $\vec{E}$ tiene dirección $(-\hat{x})$

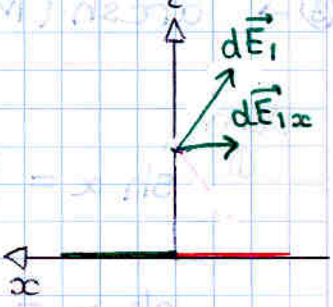
Dividimos el problema en dos:

Para $x > 0 \rightarrow \sigma = \sigma_0$

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\sigma\, dS\, (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} \\ dS' = dx'\, dy' \end{array} \right\} |\vec{r}-\vec{r}'| = [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}$$

$$d\vec{E}_1 = \frac{\sigma_0\, dx'\, dy'\, (z\hat{z} - x'\hat{x} - y'\hat{y})}{4\pi\varepsilon_0 [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$



Ahora hacemos algo nuevo para tomar dE_{1x}

en lugar de hacer $d\vec{E}_{1x} = -|dE_1| \cos\theta\ \hat{x}$

lo obtenemos directamente tomando sólo la componente en $\hat{x}$ de $d\vec{E}_1$, ya que sabemos que las otras se cancelarán

$$d\vec{E}_{1x} = \frac{\sigma_0\, dx'\, dy'\, (-x'\hat{x})}{4\pi\varepsilon_0 [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{1x} = \iint_S d\vec{E}_{1x}$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a} \frac{\sigma_0\, dx'\, dy'\, (-x'\hat{x})}{4\pi\varepsilon_0\, [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

Resolver integral

$$= \frac{\sigma_0\, \hat{x}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a} -x'((x')^2 + (y')^2 + (z)^2)^{-3/2}\, dx'\, dy'$$

$$= \frac{\sigma_0\, \hat{x}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a} -\frac{1}{2}\left(2x'((x')^2 + (y')^2 + (z)^2\right)^{-3/2}\, dx'\, dy'$$

$$= \frac{\sigma_0\, \hat{x}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \left[((x')^2 + (y')^2 + (z)^2)^{-1/2}\right]_0^a\, dy'$$

$$= \frac{\sigma_0\, \hat{x}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \left[\frac{1}{[a^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(y')^2 + z^2]^{1/2}}\right] dy'$$

Para resolver esta integral, vamos a ver primero la integral tipo

$$\boxed{\text{cálculo de } \int_{-a}^{a} \frac{dy'}{[(y')^2 + k^2]^{1/2}}}$$

Antes de resolverla; veamos propiedades de sh x y ch x

① → $\boxed{ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1}$

② → $\boxed{-\operatorname{arcsh}(M) = \operatorname{arcsh}(-M)}$ $\quad sh(-\alpha) = -sh(\alpha)$

③ → $\boxed{\operatorname{arcsh}(M) = \ln\left[M + \sqrt{M^2 + 1}\right]}$

Dem:

① $sh\,\alpha = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\qquad sh^2\alpha = \frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - \overbrace{2e^{\alpha}e^{-\alpha}}^{2}}{4}$

$ch\,\alpha = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ $\qquad ch^2\alpha = \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + \overbrace{2e^{\alpha}e^{-\alpha}}^{2}}{4}$

$ch^2\alpha - sh\alpha = 1$

$\frac{d}{d\alpha} sh\,\alpha = ch\,\alpha$

$\frac{d}{d\alpha} ch\,\alpha = sh\,\alpha$

② sea $M = \operatorname{sh}\alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$

$$\operatorname{sh}(-\alpha) = \frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2} = -\left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\right) = -\operatorname{sh}(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sh}(-\alpha) = -M \\ \operatorname{sh}(\alpha) = M \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha = \operatorname{arcsh}(-M) \\ \alpha = \operatorname{arcsh}(M) \end{array}\right\}$$

$$\operatorname{arcsh}(-M) = -\operatorname{arcsh}(M)$$

③ Existen relaciones:

sen, cos → exponenciales complejas
sh, ch → exponenciales reales

arcsh, arcch → logaritmos reales

sea $M = \operatorname{sh}(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \longrightarrow \alpha = \operatorname{arcsh}(M)$

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2M$$

$$(e^{\alpha} - e^{-\alpha})e^{\alpha} = 2Me^{\alpha}$$

$$e^{2\alpha} - 2Me^{\alpha} - 1 = 0$$

ec. cuadrática segundo grado

$x = e^{\alpha} \rightarrow x^2 - 2Mx - 1 = 0$

cogemos el + para que x sea positiva y el ln esté definido

e^{α} siempre es > 0

$$x = \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 + 4}}{2} = M + \sqrt{M^2 + 1} = e^{\alpha}$$

$$\alpha = \ln\left[M + \sqrt{M^2 + 1}\right]$$

veamos, además, cual sería el cambio de variable

$y' = k \operatorname{sh}\alpha$

$dy' = k \operatorname{ch}\alpha \, d\alpha$

$$[(y^2) + k^2]^{1/2} = [k^2 \operatorname{sh}^2\alpha + k^2]^{1/2} = [k^2(1 + \operatorname{sh}^2\alpha)]^{1/2}$$

$$= [k^2 \operatorname{ch}^2\alpha]^{1/2} = k \operatorname{ch}\alpha$$

límites de integración:

$y' = k \operatorname{sh}\alpha = a \longrightarrow \alpha = \operatorname{arcsh}(a/k)$

$y' = k \operatorname{sh}\alpha = -a \longrightarrow \alpha = \operatorname{arcsh}(-a/k)$

Resolver

$$\int_{-a}^{a} \frac{dy'}{[(y')^2+K^2]^{1/2}}$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{dy'}{[(y')^2+K^2]^{1/2}} = \left\{ \begin{array}{l} y' = k\,\mathrm{sh}\,\alpha \\ [(y')^2+k^2]^{1/2} = k\,\mathrm{ch}\,\alpha \\ \quad a = \mathrm{arcsh}(a/k) \\ -a = -\mathrm{arcsh}(-a/k) \\ dy' = k\,\mathrm{ch}\alpha\, d\alpha \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\mathrm{arcsh}(-a/k)}^{\mathrm{arcsh}(a/k)} \frac{k\,\mathrm{ch}\,\alpha\, d\alpha}{k\,\mathrm{ch}\,\alpha} = \int_{\mathrm{arcsh}(-a/k)}^{\mathrm{arcsh}(a/k)} d\alpha$$

$$= \mathrm{arcsh}\left(\frac{a}{k}\right) - \mathrm{arcsh}(-a/k)$$

$$\{\mathrm{arcsh}(-M) = -\mathrm{arcsh}(M)\} = 2\,\mathrm{arcsh}\left(\frac{a}{k}\right)$$

$$\{\mathrm{arcsh}(M) = \ln(M+\sqrt{M^2+1})\} = 2\ln\left[\frac{a}{k} + \sqrt{\frac{a^2}{k^2}+1}\right]$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a} \frac{dy'}{[(y')^2+K^2]^{1/2}} = 2\,\mathrm{arcsh}\left(\frac{a}{k}\right) = 2\ln\left[\frac{a}{k} + \sqrt{\frac{a^2}{k^2}+1}\right]}$$

Ahora podemos resolver la integral del ejercicio

$$\vec{E}_{1x} = \frac{\sigma_0\,\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-a}^{a} \frac{dy'}{[a^2+(y)^2+z^2]^{1/2}} - \int_{-a}^{a} \frac{dy'}{[(y')^2+z^2]^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{\sigma_0\,\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\ln\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} + \sqrt{\frac{a^2}{a^2+z^2}+1}\right] - 2\ln\left[\frac{a}{\sqrt{z^2}} + \sqrt{\frac{a^2}{z^2}+1}\right]\right)$$

$$\vec{E}_{1x} = \frac{\sigma_0\,\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{(a+\sqrt{2a^2+z^2})\,|z|}{(a+\sqrt{a^2+z^2})\sqrt{a^2+z^2}}$$

$\vec{E}_2$ para $x<0$ (semicuadrado con $\sigma = -\sigma_0$

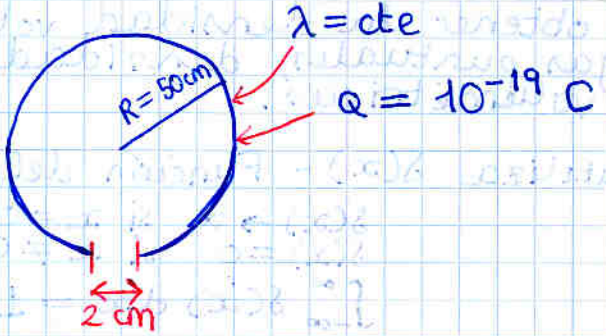
↳ un signo 'menos', debido a $-\sigma_0$

↳ un signo 'menos' debido a $\int_{-a}^{0} = -\int_{0}^{-a} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aparece } a^2}}{=} -\int_{0}^{a}$

Es decir, es la integral anterior con dos signos '-' que se cancelan $\quad \vec{E}_{2x} = \vec{E}_{1x}$

$$\vec{E}_{\text{total}} = \frac{\sigma_0\,\hat{x}}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{(a+\sqrt{2a^2+z^2})\,|z|}{(a+\sqrt{a^2+z^2})\sqrt{a^2+z^2}}$$

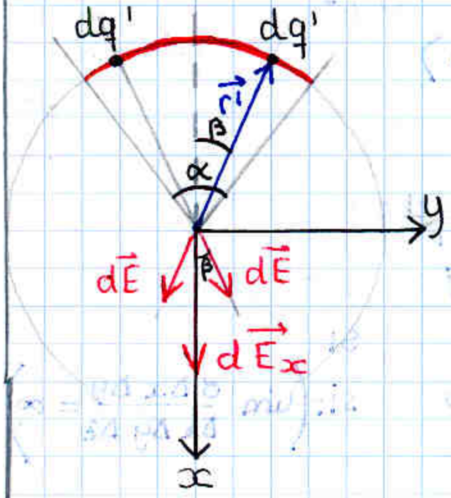
Problema 3.



consideraciones previas:

↳ sistema cilíndrico

↳ simetría: se cancelan todos los campos de dq's correspondientes, quedando únicamente los correspondientes al hueco



método general:

$$dE_x = 2\,|d\vec{E}|\cos\beta$$

$$E_x = \int dE_x$$

$$\vec{E} = E_x\,\hat{x}$$

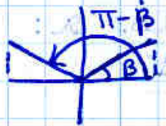
Empecemos:

$$dq' = \lambda\, dl = \lambda R\, d\varphi$$

$$|d\vec{E}| = \frac{dq'\,\cancel{|\vec{r}-\vec{r'}|}}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{|\vec{r}-\vec{r'}|}_{R}^{\cancel{3}\,2}} = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \overset{\downarrow}{=} \frac{\lambda\, d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_x = 2\,|d\vec{E}|\cos\beta = \frac{\lambda\, d\varphi' \cos\beta}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_x = \int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi} \frac{\lambda\cos\beta\, d\varphi'}{2\pi\varepsilon_0 R} = \left\{ \begin{array}{c} \beta = \pi - \varphi' \\ \cos\beta = -\cos\varphi' \end{array} \right\}$$



$$E_x = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi} \cos\varphi'\, d\varphi' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\text{sen}\,\varphi'\Big|_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi} = \frac{\lambda\,\text{sen}(\pi-\frac{\alpha}{2})}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

valores numéricos:

$R = 50\,cm = 0'5\,m$

$l = 2\pi R - d = 2\pi 0'5 - 0'02 = 3'12\,m$

$\lambda = \frac{Q}{l} = 3'2\cdot 10^{-10}\ C/m$

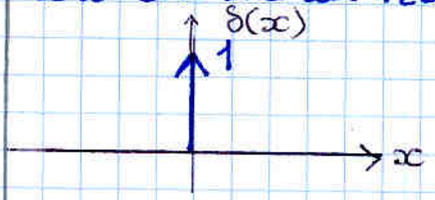
$d = \alpha R \rightarrow \alpha = \frac{d}{R} = \frac{0'02\,m}{0'5\,m} = 0'04\ rad$

$\vec{E} = 0'23\,\hat{x}\ V/m$

2.4. Distribuciones generalizadas de carga

El objetivo es obtener la densidad volumétrica de carga de cargas puntuales, densidades lineales y densidades volumétricas.

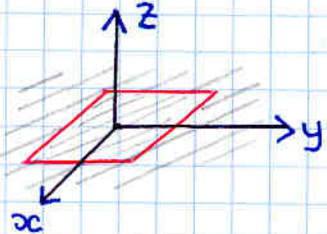
Para ello se utiliza $\delta(x)$ - Función delta de Dirac



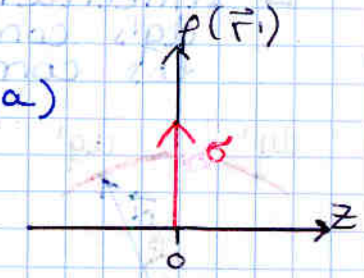
$$\delta(x)\to\infty \quad \text{si } x=0$$
$$\delta(x)=0 \quad \text{si } x\neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

ejemplo/comprobación

Plano ∞ con σ (densidad sup. de carga)



$$\rho(\vec{r'}) = \sigma\cdot\delta(z')$$



1. ¿Cumple lo esperado?

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q'}{\Delta V}$$

$\rho(z'\neq 0)=0$ si

$\rho(z=0)\xrightarrow[\Delta V\to 0]{}\infty$ si $\left(\lim \frac{\sigma\,\cancel{\Delta x}\,\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta x}\,\cancel{\Delta y}\,\Delta z}=\infty\right)$

2. ¿La carga es la misma?

1. Cuadrado de lado a: $Q=\iint \sigma\,dS$

$$Q=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sigma\,dx'dy' = \sigma a^2$$

2. Cubo de lados a: $Q=\iiint \rho\,dV$

$$Q=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sigma\,\delta(z')\,dz'dx'dy'$$
$$=\sigma a^2\underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\delta(z)\,dz}_{1} = \sigma a^2$$

3. Obtención práctica de $\rho(\vec{r'})$

Sabiendo que la carga debe ser la misma

$$Q = \iint_S \sigma\,dS = \iiint_V \rho\,dV$$

toda la sup ← → todo el espacio $\mathbb{R}^3$

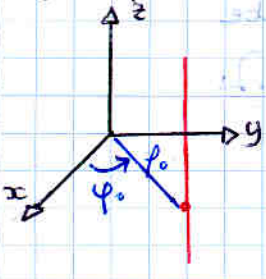
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\,dx'dy' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\,dx'dy'dz'$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\,dz=1\right)\downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\,\delta(z)\,dx'dy'dz' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\,dx'dy'dz'$$

Por simple comparación de ambos lados: $\rho(z) = \sigma\,\delta(z) = \rho(\vec{r'})$

ejemplo 1



- $\rho(\vec{r}')$ en cilindricas:

$$Q=\iiint_V \rho(\vec{r}')\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho(\vec{r}')\,\underbrace{\rho'\,d\rho'\,d\varphi'\,dz'}_{dV\ \text{cilindricas}}$$

$$Q=\int\lambda(\vec{r}')\,dl=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,\overset{dl}{\overbrace{dz}}$$

para que la δ esté centrada en el hilo

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\lambda\,\delta(\varphi'-\varphi_0)\,d\varphi'\,dz'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\lambda\,\delta(\varphi'-\varphi_0)\,\delta(\rho'-\rho_0)\,d\rho'\,d\varphi'\,dz'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\cdot\delta(\varphi'-\varphi_0)\,\delta(\rho'-\rho_0)}{\rho'}\,\underbrace{\rho'\,d\rho'\,d\varphi'\,dz'}_{dV\ \text{cilindricas}}$$

igualandolas: $\rho(\vec{r}')=\dfrac{\lambda\,\delta(\varphi'-\varphi_0)\,\delta(\rho'-\rho_0)}{\rho_0}$ → tomamos ρ_0 por estar $\delta(\rho-\rho_0)$

- $\rho(\vec{r}')$ en cartesianas:

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\vec{r}')\,dx'\,dy'\,dz'$$

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,\delta(x'-x_0)\,\delta(y-y_0)\,dx'\,dy'\,dz'$$

igualando: $\rho(\vec{r}')=\lambda\,\delta(x'-x_0)\,\delta(y-y_0)$

ejemplo 2. Sup. esf. cargada radio R

- $\rho(\vec{r}')$ en esféricas:

$$Q=\iiint\rho(\vec{r}')\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\rho(\vec{r}')\,\underbrace{(r')^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'}_{dV\ \text{esféricas}}$$

$$Q=\iint_S\sigma\,ds=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma\,\underbrace{(r')^2\,\text{sen}\,\theta'\quad d\theta'\,d\varphi'}_{\text{componente }\hat{\rho}\text{ de }d\vec{S}\text{ en esféricas}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\sigma\,\delta(r'-R)\,\underbrace{(r')^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'}_{dV}$$

igualando: $\rho(\vec{r}')=\sigma\,\delta(r'-R)$

ejemplo 3.

- $\rho(\vec{r}')$ en esféricas:

$$Q=\iiint\rho(\vec{r}')\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\rho(\vec{r}')\,\overbrace{(r')^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'}^{dV}$$

$$Q=\int_0^{2\pi}\lambda\,\overbrace{r'\,d\varphi'}^{dl}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\lambda\,\delta(\theta'-\tfrac{\pi}{2})\,\delta(r'-b)\,r'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,\delta(\theta'-\frac{\pi}{2})\,\delta(r'-b)}{\underset{=b}{r'}\ \underset{=\text{sen}\frac{\pi}{2}=1}{\text{sen}\,\theta}}\,\underbrace{(r')^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'}_{dV}$$

igualando: $\rho(\vec{r}')=\dfrac{\lambda}{r'}\,\delta(\theta'-\tfrac{\pi}{2})\,\delta(r'-b)$

- $\rho(\vec{r}')$ en cilindricas

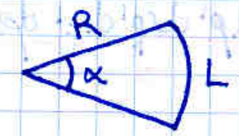
$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\rho(\vec{r}')\,\rho'\,d\rho'\,dz'\,d\varphi'$$

$$Q=\int_0^{2\pi}\lambda\,\rho\,d\varphi'=\iiint\frac{\lambda\cdot\delta(z'-0)\,\delta(r'-b)}{}\,\underbrace{\cancel{\rho'}\,d\rho'\,dz'\,d\varphi'}_{dV}$$

igualando: $\rho(\vec{r}')=\lambda\,\delta(z)\,\delta(r'-b)$

Ángulo sólido

· ángulo plano



para R cte

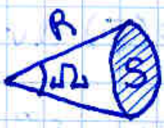
$$\boxed{L = R\alpha}$$

línea cerrada

R cte

$L = 2\pi R$

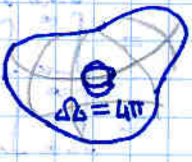
· ángulo sólido



para R cte

$$\boxed{S = R^2 \Omega}$$

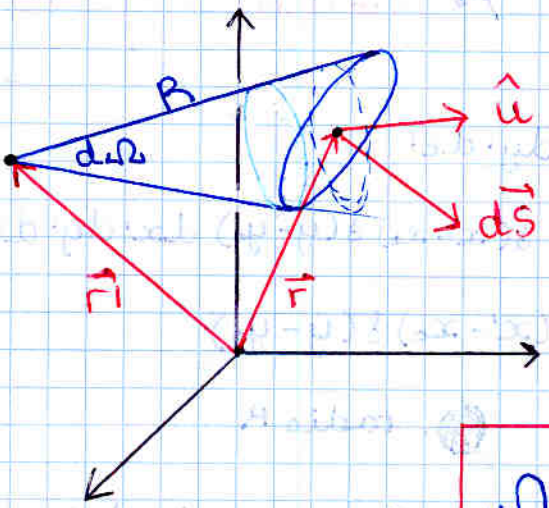
superficie cerrada



R cte

$S = 4\pi R^2$

· cálculo de ángulo sólido



sup con R cte

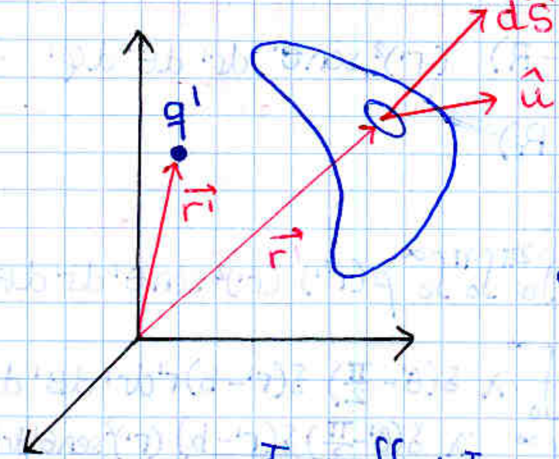
$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\hat{u}}{R^2} = \frac{dS_u}{R^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} R = |\vec{r} - \vec{r}'| \\ \hat{u} = \dfrac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{array}\right\}$$

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\boxed{\Omega = \iint_{S'} \frac{d\vec{S}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

Flujo a traves de superficie creado por carga puntual



$$\Phi = \iint_S d\Phi$$

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot d\vec{S}$$

$$d\Phi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$$\boxed{\Phi = \frac{q'\Omega}{4\pi\varepsilon_0}}$$

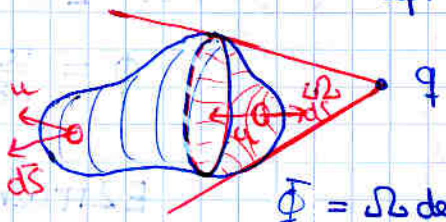
Ley de Gauss

Carga puntual interior sup. cerrada

$\Omega = 4\pi$

$$\boxed{\Phi = \frac{q'\Omega}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q'}{\varepsilon_0}}$$

Carga puntual exterior sup. cerrada



$\Phi = \Omega$ delante $+ \Omega$ detras

$= -\frac{q'\Omega}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{q'\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$

Ω es el mismo para ambos $\boxed{\Phi = 0}$

Expresión general de la Ley de Gauss

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \, dV'}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV \qquad \Phi = \frac{\iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \, dV'}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho(\vec{r}) dV}{\varepsilon_0}$$

igualando

Forma diferencial para la Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}$$

Utilización de la ley de Gauss para cálculo de E

Condición: Encontrar una superficie cerrada que pueda descomponerse en:

- $Sup_{//}$: superficie paralela a $\vec{E}$
- $Sup_\perp$: superficie perpendicular a $\vec{E}$, siendo E cte en toda la superficie

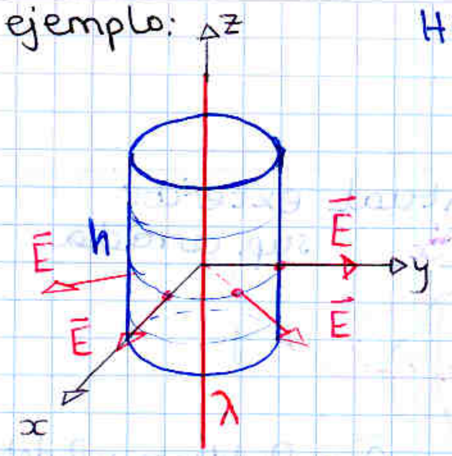
$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{//}} \underset{E // dS}{\vec{E} \cdot d\vec{S}} + \iint_{S_\perp} \vec{E} \cdot d\vec{S} \overset{E \perp S}{=} 0 + \iint_{S_\perp} E dS \overset{E cte}{=} E \iint_{S_\perp} dS$$

$$\Phi = E S_\perp = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0 S_\perp}}$$

ejemplo: Hilo ∞ cargado en eje z : $\vec{E} = E\hat{\rho}$



$$\phi \underset{\uparrow}{=} E\iint_{S_{lat}} dS = E2\pi a h$$

E ⊥ Slat
E cte en Slat

h arbitrario
luego se cancela

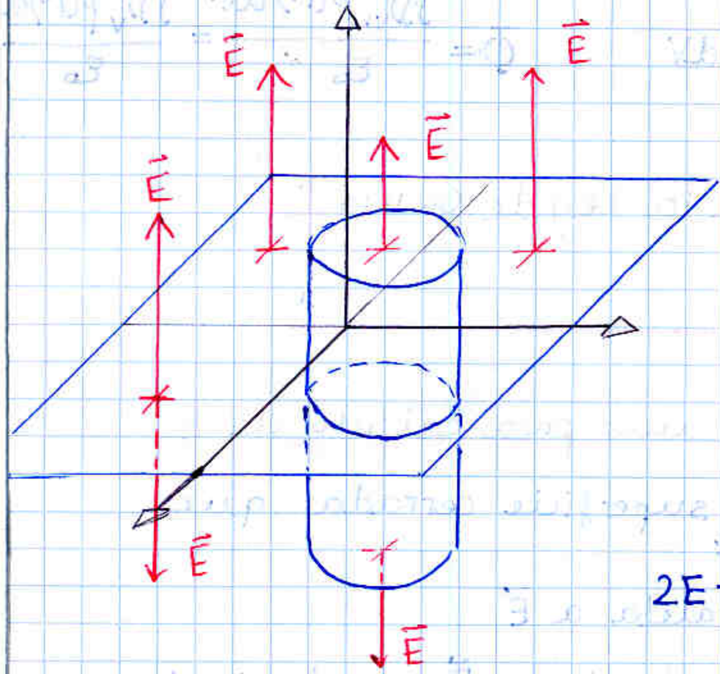
$$\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E2\pi a h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi a \varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi a \varepsilon_0}\hat{\rho}}$$

ejemplo:
Superficie ∞ plano z = 0 con σ



E ⊥ Stapa
E cte en Stapa

$$\phi = 2E\iint_{S_{tapa}} dS$$

se cuentan las dos tapas

$$= 2E\pi a^2$$

$$\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi a^2}{\varepsilon_0}$$

$$2E\pi a^2 = \frac{\sigma \pi a^2}{\varepsilon_0}$$

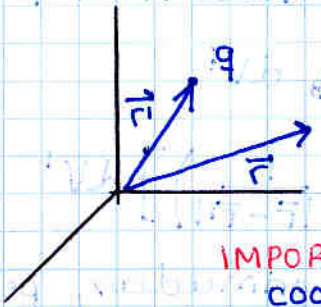
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$$

2.6. Potencial Electrostático

$$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r})$$

Veamos la demostración



definimos $\psi = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

calculamos $\nabla\psi = \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$

IMPORTANTE: Es el gradiente respecto a las coordenadas no primadas

Utilizando coordenadas cartesianas;

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$
$$\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$$

$$\psi = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$$ respecto a coordenadas no primadas

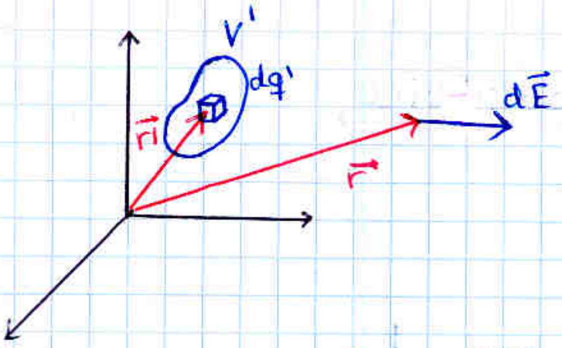
$$= -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-3/2} \cdot \left[2(x-x')\hat{x} + 2(y-y')\hat{y} + 2(z-z')\hat{z}\right]$$

$$\nabla\psi = -\frac{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

conclusión

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



$$\vec{E} = \iiint_{V'} d\vec{E}$$

$$= \iiint_{V'} \frac{dq' \, (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$= \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}) \, dV' \, (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \, dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}) \left[-\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] dV'$$

como la integral es de las variables primadas, pero el gradiente es sobre las no primadas, se puede sacar el gradiente fuera

$$\vec{E} = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V} \rho(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, dV' \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi(\bar{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\iiint_{V'} \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \, dV' \\ E(\bar{r}) = -\nabla \phi(\bar{r}) \end{array}}$$

En algunos casos, es mas facil resolver la integral del potencial (escalar) que la del campo.

Luego por derivación se calcula $\vec{E}$

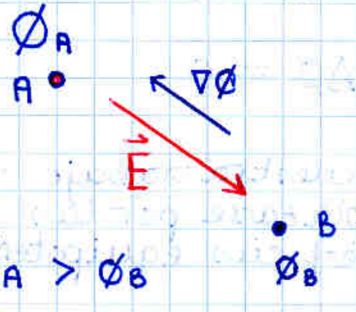
$\boxed{\phi(\bar{r}) \text{ no es único}}$, tiene asociado una cte arbitraria

$$\phi_c(\bar{r}) = \phi(\bar{r}) + c \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi(\bar{r}) = -\nabla \phi_c(\bar{r})$$

Referencia habitual: $\boxed{r \to \infty \Rightarrow \phi(\bar{r}) \to 0}$

y con esa referencia $c = 0$

2.6.2 Interpretación física del potencial



$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

El campo $\vec{E}$ va de mayor a menor potencial.

$$\phi_A > \phi_B$$

$W^{INT}_{A\to B}$ ≡ Trabajo interno realizado por $\vec{E}$ para llevar carga q desde A hasta B

$W^{EXT}_{A\to B}$ ≡ Trabajo hecho por "nosotros" "contra" el campo $= -W^{INT}_{A\to B}$

$$W^{INT}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_A^B q\vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_A^B q(-\nabla\phi)\cdot\vec{dl} = -q\int_A^B \nabla\phi\cdot\vec{dl}$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$
$$= \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right]\cdot\left[dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right]$$
$$= \nabla\phi \cdot \vec{dl}$$

Recuerda $\boxed{df = \nabla f\cdot\vec{dl}}$

$$W^{INT}_{A-B} = -q\int_A^B d\phi = -q[\phi_B - \phi_A]$$

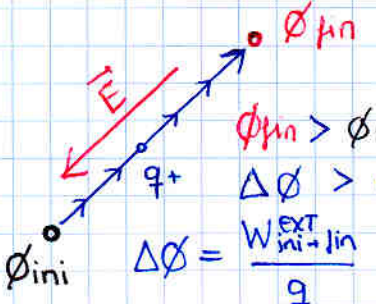
Diferencia de potencial: $\boxed{\Delta\phi = \phi_B - \phi_A}$ (final - inicial)

$$\boxed{W^{INT}_{A\to B} = -q(\phi_B - \phi_A) = -q\Delta\phi}$$

$$W^{EXT}_{A-B} = -W^{INT}_{A-B} = q\Delta\phi$$

Viendo esto, podemos interpretar el potencial eléctrico como:

$$\boxed{\underbrace{\Delta\phi}_{\phi_{final}-\phi_{inicial}} = \frac{W^{EXT}_{ini\to fin}}{q} = \frac{-W^{INT}_{ini\to fin}}{q}}$$

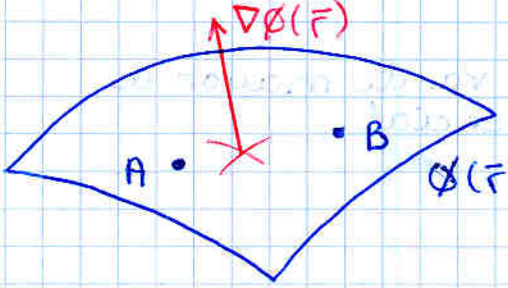


$$\phi_{fin} > \phi_{ini}$$
$$\Delta\phi > 0$$
$$\Delta\phi = \frac{W^{EXT}_{ini\to fin}}{q} > 0$$

Superficies equipotenciales

Superficies de potencial constante $(\phi(\vec{r}) = cte)$

$\nabla\phi(\vec{r})$ es $\perp$ a la sup equipotencial



$$W^{INT}_{A\cdot B} = -q\Delta\phi = 0$$

$\phi(\vec{r}) = cte$

No cuesta trabajo desplazarse por las superficies equipotenciales

ejemplo. calcular sup. equipot a carga puntual

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}_0')}{|\vec{r}-\vec{r}_0'|}\,dV'$$

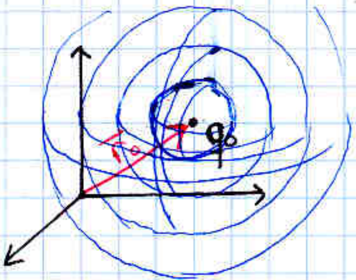
$$\rho(\vec{r}) = q_0(\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0))$$

$$\rho(\vec{r}) = q_0\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

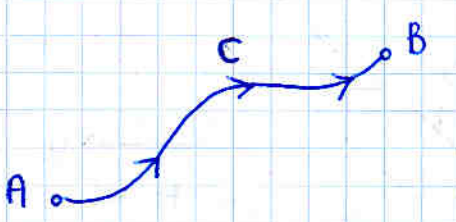
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{q_0\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\,dV' = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}\underbrace{\iiint_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV'}_{1}$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|} = k}$$

esferas de radio k alrededor de $\vec{r}_0$



2.6.4 Circulación de $\vec{E}$



$$\int_C \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_C (-\nabla\phi)\cdot\vec{dl} = -\int_C \nabla\phi\cdot\vec{dl}$$

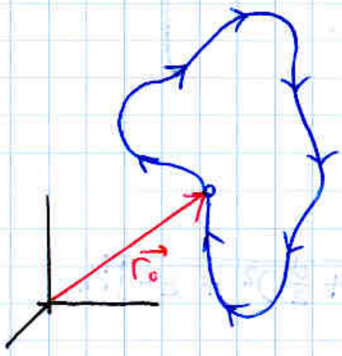
RECUERDA
$d f = \nabla f\cdot\vec{dl}$

$$= -\int_A^B d\phi = -(\phi_B-\phi_A) = -\Delta\phi$$

$$\boxed{\int_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_A^B d\phi = -(\phi_B-\phi_A) = -\Delta\phi}$$

$$= \phi_A - \phi_B$$

A lo largo de un camino cerrado:



$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_{r_0}^{r_0} d\phi = 0$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} \underset{(\text{stokes})}{=} \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{dl} = 0 \quad \forall S$$

$$\Rightarrow (\nabla\times\vec{E}) = 0$$

otro método:

$$\nabla\times\vec{E} = \nabla\times(-\nabla\phi) = -\nabla\times(\nabla\phi) = 0$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$$

... por el momento ...

además

$\nabla\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi$

2.6.5. Ecuaciones diferenciales del potencial

$$\underbrace{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot(-\nabla\phi) = -\nabla^2\phi}$$

Ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

Ecuación de Laplace

y en un espacio sin carga $(\rho(\vec{r}) = 0)$

$$\nabla^2\phi = 0$$

Problema 5.

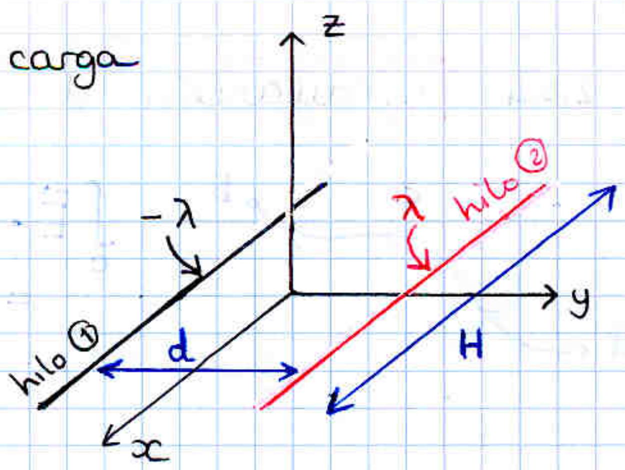
Dada la distribución de carga

Obtener

a) $\emptyset(\bar{r})$

b) $\emptyset(\bar{r})$ si $H \to \infty$

c) sup. equipot. si $H \to \infty$



elegimos coordenadas cartesianas

para hilo ①

$$d\emptyset_1(\bar{r}) = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|} = \frac{-\lambda\, dl'}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|}$$

$$\left\{\begin{array}{l} dl' = dx' \\ \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{r}' = x'\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \underset{(z=0)}{\overset{(y=-\frac{d}{2})}{=}} = x'\hat{x} - \frac{d}{2}\hat{y} \\ \vec{r}-\vec{r}' = (x-x')\hat{x} + (y+\frac{d}{2})\hat{y} + z\hat{z} \\ |\vec{r}-\vec{r}'| = [(x-x')^2 + (y+\frac{d}{2})^2 + z^2]^{1/2} \end{array}\right\}$$

$$d\emptyset_1 = \frac{-\lambda\, dx'}{4\pi\varepsilon_0 [(x-x')^2 + (y+\frac{d}{2})^2 + z^2]^{1/2}}$$

$$\emptyset_1 = \int_{-H}^{H} d\emptyset_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-H}^{H} \frac{-dx'}{[(x-x')^2 + (y+\frac{d}{2})^2 + z^2]^{1/2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{C.V.} \quad a = (x-x') \\ \qquad\quad da = -dx' \\ \qquad\quad x' = H \to a = x - H \\ \qquad\quad x' = -H \to a = x + H \end{array}\right\}$$

$$= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x-H}^{x+H} \frac{da}{[a^2 + (y+\frac{d}{2})^2 + z^2]^{1/2}}$$

Recuerda:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy'}{[(y')^2 + k^2]^{1/2}} \xrightarrow{\text{c.v. } y' = k\,\text{sh}\,h} = \ln\left[\frac{y_2}{k} + \sqrt{\frac{y_2^2}{k} + 1}\right] - \ln\left[\frac{y_1}{k} + \sqrt{\frac{y_1^2}{k} + 1}\right]$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[\frac{x+H}{\sqrt{(y+\frac{d}{2})^2+z^2)}} + \sqrt{\frac{(x+H)^2}{\sqrt{(y+\frac{d}{2})^2+z^2}}+1}\right] - \ln\left[\frac{x-H}{\sqrt{(y+\frac{d}{2})^2+z^2}} + \sqrt{\frac{(x-H)^2}{\sqrt{(y+\frac{d}{2})^2+z^2}}+1}\right]\right\}$$

$$\emptyset_1(\bar{r}) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{x-H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y+\frac{d}{2})^2}}{x+H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y+\frac{d}{2})^2}}\right]$$

para hilo ②

$$-\lambda \rightarrow \lambda$$
$$y+\frac{d}{2} \rightarrow y-\frac{d}{2}$$

$$\varnothing_2(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{x-H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y-\frac{d}{2})^2}}{x+H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y-\frac{d}{2})^2}}\right]$$

$$\varnothing(\vec{r}) = \varnothing_1(\vec{r}) + \varnothing_2(\vec{r})$$
$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dots(y+\tfrac{d}{2})\dots\right] + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dots(y-\tfrac{d}{2})\dots\right]$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln(\dots(y-\tfrac{d}{2})\dots) - \ln(\dots(y+\tfrac{d}{2})\dots)\right]$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln(\dots(y-\tfrac{d}{2})\dots) + \ln\left(\frac{1}{\dots(y+\frac{d}{2})\dots}\right)\right]$$

$$\varnothing(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{x+H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y+d/2)^2}}{x-H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y+d/2)^2}}\cdot\frac{x-H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y-\frac{d}{2})^2}}{x+H+\sqrt{(x-H)^2+z^2+(y-\frac{d}{2})^2}}\right] //$$

b) $\varnothing(\vec{r})$ si $H \rightarrow \infty$

notación : $r_a^2 = z^2+(y+\frac{d}{2})^2$
$r_b^2 = z^2+(y-\frac{d}{2})^2$

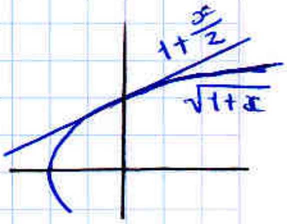
$$\varnothing(\vec{r}) = \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{x+H+\sqrt{(x-H)^2+r_a^2}}{x-H+\sqrt{(x-H)^2+r_a^2}}\cdot\frac{x-H+\sqrt{(x-H)^2+r_b^2}}{x+H+\sqrt{(x-H)^2+r_b^2}}\right]$$

TRUCO: al ser ∞, no importa x, tomamos $x=0$
puesto que será igual $\forall x$, cogemos la mas sencilla

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{H+\sqrt{(\quad H)^2+r_a^2}}{-H+\sqrt{(\quad H)^2+r_a^2}}\cdot\frac{-H+\sqrt{H^2+r_b^2}}{H+\sqrt{H^2+r_b^2}}\right]$$

dividir por H

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+(\frac{r_a}{H})^2}}{-1+\sqrt{1+(\frac{r_a}{H})^2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{1+(\frac{r_b}{H})^2}}{1+\sqrt{1+(\frac{r_b}{H})^2}}\right]$$



aproximación $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}$ si $x \ll 1$

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\overset{2}{\boxed{1+1}}+\frac{1}{2}(\frac{r_a}{H})^2}{-1+1+\frac{1}{2}(\frac{r_a}{H})^2}\cdot\frac{\overset{0}{\boxed{-1+1}}+\frac{1}{2}(\frac{r_b}{H})^2}{1+1+\frac{1}{2}(\frac{r_b}{H})^2}\right]$$
$$= \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{2+\frac{1}{2}(\frac{r_a}{H})^2}{\frac{1}{2}(\frac{r_a}{H})^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\frac{r_b}{H})^2}{2+\frac{1}{2}(\frac{r_b}{H})^2}\right] = \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\frac{r_b}{H})^2+(\frac{r_a}{H})^2(\frac{r_b}{H})^2}{(\frac{r_a}{H})^2+(\frac{r_a}{H})^2(\frac{r_b}{H})^2}\right]$$
$$= \lim_{H\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{r_b^2+\frac{r_a^2r_b^2}{H}}{r_a^2+\frac{r_a^2r_b^2}{H}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{r_b^2}{r_a^2}\right]$$

$$\varnothing(\vec{r})_{H\to\infty} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{z^2+(y-\frac{d}{2})^2}{z^2+(y+\frac{d}{2})^2}\right] //$$

c) superficies equipotenciales

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{z^2+(y-\frac{d}{2})^2}{z^2+(y+\frac{d}{2})^2}\right] = k$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z^2+(y-\frac{d}{2})^2}{z^2+(y+\frac{d}{2})^2} = k$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2+(y-\tfrac{d}{2})^2 = kz^2 + k(y+\tfrac{d}{2})^2$$

$$z^2+y^2-yd+(\tfrac{d}{2})^2 = kz^2+ky^2+kyd+k(\tfrac{d}{2})^2$$

$$z^2(1-k)+y^2(1-k)+y(-d-kd)+(\tfrac{d}{2})^2(1-k)=0$$

$$z^2+y^2+y\frac{-d(1+k)}{1-k}+(\tfrac{d}{2})^2$$

NOTA: circunferencia en plano XY con centro (a, b) radio r

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

Comparando con la ec. de sup equipotencial

$$-2a=\frac{-d(1+k)}{(1-k)} \longrightarrow a=\frac{d}{2}\frac{(1+k)}{(1-k)}$$

$$b=0$$

$$a^2+b^2-r^2=\frac{d^2}{2^2}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{(1+k)^2}{(1-k)^2}-r^2=\frac{d^2}{2^2}$$

$$r^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\left(\frac{1+k}{1-k}\right)-1\right)^2$$

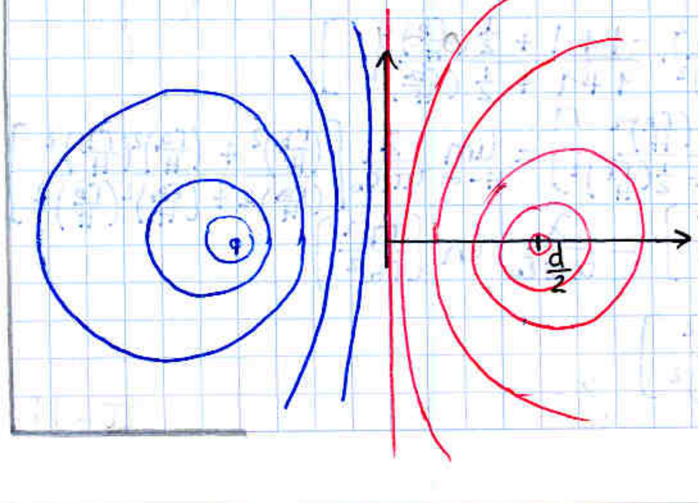
$$r=\frac{d}{2}\left[\frac{1+k}{1-k}-1\right] = a-\frac{d}{2}$$

Circunf: centro: $y=\frac{d}{2}\frac{(1+k)}{(1-k)}$

$z=0$

radio: $r=y-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}\left[\frac{1+k}{1-k}-1\right]$

eso era para $x=0$. Al ser igual $\forall x$, se convierten en cilindros



ej $k=0 \rightarrow y=\frac{d}{2}$
$r=0$

$k=1 \rightarrow y=\infty$
$r=\infty$

$k=0'5 \rightarrow y=3\frac{d}{2}$
$r=2\frac{d}{2}$

Problema 6. Distribución volumétrica de carga.

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 [1-(r/a)^2] & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

Calcular:

a) carga total

b) $\vec{E}(\vec{r})$ y $\phi(\vec{r})$ en exterior $(r>a)$

c) $\vec{E}(\vec{r})$ y $\phi(\vec{r})$ en interior $(r\leq a)$

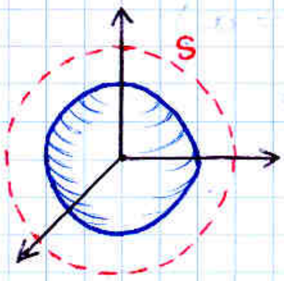
a) $$Q = \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \, dV' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho_0 \left[1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2\right](r')^2 \operatorname{sen}\theta' dr' \, d\theta' \, d\varphi'$$

$$= 2\pi\rho_0 \int_0^{\pi}\left(\left[\frac{(r')^3}{3}\Big|_0^a - \frac{(r')^5}{5a^2}\Big|_0^a\right]\operatorname{sen}\theta'\right)d\theta'$$

$$= 2\pi\rho_0 \left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{5}\right]\cos\theta'\Big|_{\pi}^{0} = 2\pi\rho_0\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{5}\right]2$$

$$Q = \frac{8}{15}\pi a^3 \rho_0$$

b)



simetría → Ley de Gauss

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_S E \, dS = E \oiint_S dS = E4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{8\pi a^3 \rho_0}{15\varepsilon_0}$$ ley de Gauss

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2a^3\rho_0}{15 r^2 \varepsilon_0}\hat{r}}$$

obtener ϕ a partir de $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right) = \frac{2a^3\rho_0}{15r^2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2a^3\rho_0}{15r^2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = -\int\frac{2a^3\rho_0}{15r^2\varepsilon_0}dr = \frac{2a^3\rho_0}{15r\varepsilon_0} + c$$

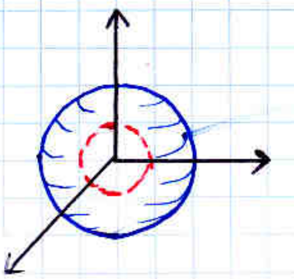
referencia arbitararia habitual

$\phi(\infty) = 0$

$\phi(\infty) = c = 0$

$$\boxed{\phi = \frac{2a^3\rho_0}{15r\varepsilon_0}}$$

c)



Ley de gauss

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = \iiint_V \rho(\vec{r}') \, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r}\rho_0\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)(\vec{r}')\operatorname{sen}\theta \, dr' d\theta' d\varphi$$

$$= 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5a^2}\right)$$

$$\Phi = \iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad E4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5a^2}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5a^2}\right)\hat{r}}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varnothing = -\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varnothing}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\varnothing}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)$$

$$-\frac{\partial\varnothing}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5a^2}\right)$$

$$\varnothing = -\int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5a^2}\right)dr$$

$$= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6}-\frac{r^4}{20a^2}\right)+C$$

Cálculo de C

$$\varnothing(r=a) = \varnothing_{int}(r=a) = \varnothing_{ext}(r=a)$$

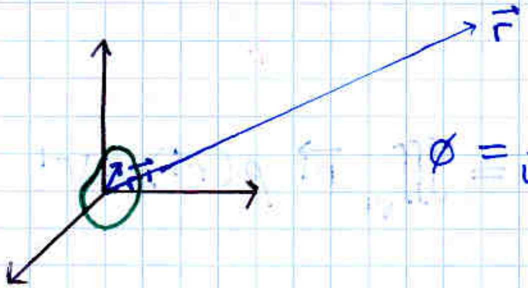
$$C - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{20}\right) = \frac{2a^2\rho_0}{15\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{4}$$

$$\boxed{\varnothing_{int} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6}-\frac{r^4}{2a^2}\right)+\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{4}}$$

2.7. Desarrollo del Potencial en Multipolos

- Cálculo aproximado del potencial
- Válido si $|\vec r - \vec r\,'| \uparrow\uparrow$ (puntos alejados de la distribución de carga)



$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec r\,')\,dv'}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

1ª aproximación: $\boxed{|\vec r - \vec r\,'| = |\vec r| = r}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec r\,')\,dv}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{\text{Aproximación de orden cero:} \quad \phi \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

PEGAS: cuando $Q=0$ (habiendo cargas + y −) el potencial será pequeño, pero la aprox. será cero.

2ª aproximación:

Sea $f(\vec r\,') = f(x',y',z') = \dfrac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}$

Hacemos desarrollo de Taylor de $f(\vec r\,')$

$$f(\vec r\,') = f(\vec r\,'=0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{\vec r\,'=0} x' + \frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{\vec r\,'=0} y' + \frac{\partial f}{\partial z'}\bigg|_{\vec r\,'=0} z'\right) + \dots$$

despreciamos los demás terminos; y calculando

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x-x'}{|\vec r - \vec r\,'|^3} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{\vec r\,'=0} = \frac{x}{|\vec r|^3} = \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{\vec r\,'=0} = \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{\vec r\,'=0} = \frac{z}{r^3}$$

sustituyendo

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\vec r \cdot \vec r\,'}{r^3}}$$

el potencial queda;

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\vec{r}')\left[\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}\right]dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\iiint_V \rho(\vec{r}')\,dV + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{cte}\underbrace{\vec{r}}_{cte}\cdot\underbrace{\iiint_{V'}\vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dV'}_{\vec{p}}$$

Momento dipolar de la distribución de cargas : $\vec{p} = \iiint_{V'} \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dV'$

Luego:

$$\boxed{\phi \simeq \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\text{orden 0}} + \underbrace{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{\text{orden 1}}}$$

$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$

calculando

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\cdot\vec{r}-\vec{p}\right]}$$

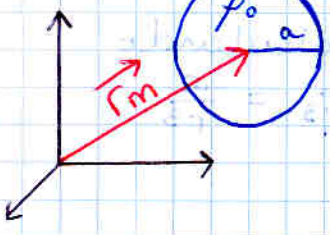
método alternativo para calcular el momento dipolar

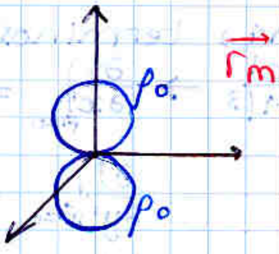
Centro de cargas $\vec{r}_m = \dfrac{\iiint_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dV'}{Q} = \dfrac{\vec{p}}{Q}$

"posición media" de las cargas

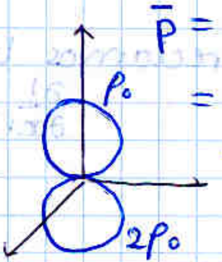
$$\boxed{\vec{p} = \vec{r}_m Q}$$

ejemplos





$\vec{r}_m = \vec{0}$

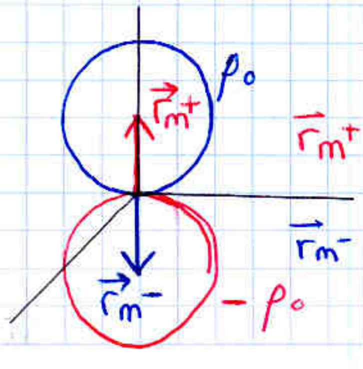


$\vec{P} = \vec{P}_{\rho_0} + \vec{P}_{2\rho_0}$
$= \vec{r}_{m\rho_0} Q_{\rho_0} + \vec{r}_{m2\rho_0} Q_{2\rho_0}$

Cuando hay cargas Q+ y Q- conviene calcular r_m^+ y r_m^-

a $\vec{r}_m$, el signo de las cargas "no le afecta" (el simplemente va al centro)

El signo se tiene luego en cuenta al hacer $\vec{p} = \vec{r}_m Q$



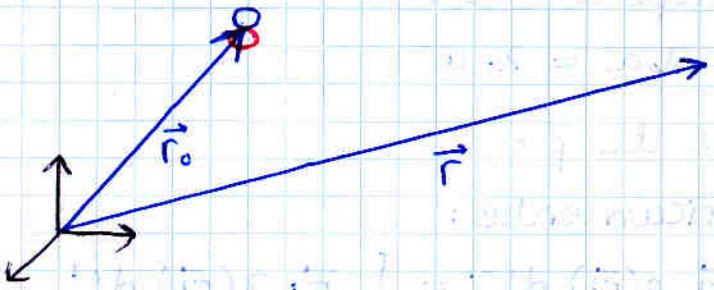
$\vec{r}_m^+ = a\hat{z}$

$\vec{r}_m^- = -a\hat{z}$

$$\vec{p} = \vec{p}_+ + \vec{p}_-$$
$$= \vec{r}_m^+ Q^+ + \vec{r}_m^- Q^-$$
$$= (aQ^+\hat{z}) - (aQ^-\hat{z}) = 0$$
$$= 2aQ^+\hat{z}$$

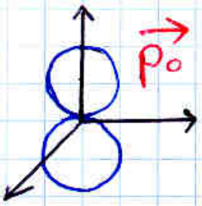
Distribución de cargas no centradas en origen:

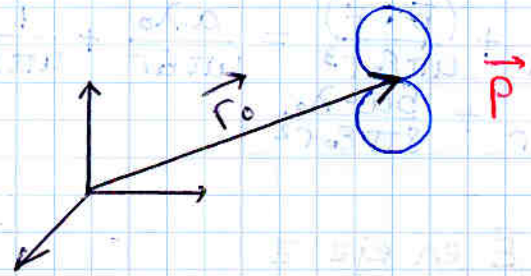
(distribución de carga centrada alrededor de $\vec{r_0}$)
(sería el equivalente al origen)



$$\boxed{\varnothing(\vec r) \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r_0|} + \frac{\vec p(\vec r-\vec r_0)}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r_0|^3}}$$

$$\boxed{\bar E(\bar r) = \frac{Q(\bar r-\bar r_0)}{4\pi\varepsilon_0|\bar r-\bar r_0|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\bar r-\bar r_0|^3}\left[\frac{3\vec p\cdot(\vec r-\vec r_0)}{|\vec r-\vec r_0|^2}\cdot(\vec r-\vec r_0)-\vec p\right]}$$

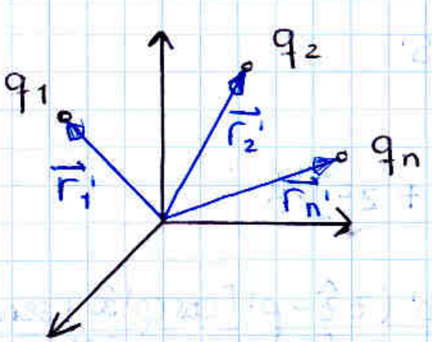




$$\boxed{\vec p = \vec p_0 + \vec r_0 Q}$$

si $Q=0$ $\vec p = \vec p_0$

Sistema de cargas puntuales



$$\vec p = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r_i}'$$

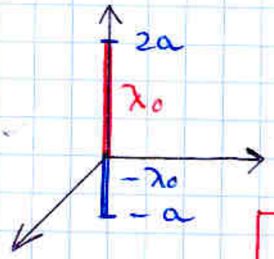
$$Q = \sum_{1}^{n} q_i$$

Problema 7

Una distribución lineal de carga situada en el eje z viene definida según:

$$\lambda(\bar{r}') = \begin{cases} \lambda_0 & 0 \leq z \leq 2a \\ -\lambda_0 & -a \leq z \leq 0 \end{cases}$$

Calcular $\varnothing(\bar{r})$ en puntos alejados despreciando términos de orden superior a r^{-2}



$$Q = \lambda_0 2a - \lambda_0 a = \lambda_0 a$$

Cálculo de $\vec{p}$:

- Numéricamente:

$$\boxed{\vec{p} = \iiint_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dV'} = \boxed{\int_L \vec{r}'\lambda(\vec{r}')\,dl'}$$

$$= \ldots = \frac{5a^2\lambda_0}{2}\hat{z}$$

- Gráficamente:

$$\vec{p} = \vec{p_+} + \vec{p_-} = \vec{r_m}^+ Q^+ + \vec{r_m}^- Q^-$$

$$= a\hat{z}\,2a\lambda_0 + \left(-\frac{a}{2}\hat{z}\right)(-\lambda_0 a) = \ldots = \frac{5a^2\lambda_0}{2}\hat{z}$$

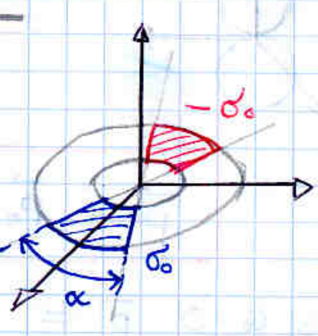
Cálculo de $\varnothing$

$$\varnothing(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{a\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^{\cancel{3}2}}\left(\frac{5a^2\lambda_0}{2}\hat{z}\cdot\cancel{r}\hat{r}\right)$$

$$\boxed{\varnothing(\bar{r}) = \frac{a\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{5a^2\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Problema 8.

Calcular $\bar{E}$ en eje z
a) exacto
b) aproximado para $z >> b, a$



NOTA:

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx = \ln\left[x + \sqrt{a^2+x^2}\right] - \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

a) $\bar{E}$ exacto: consideraciones: → sist. cilíndrico
→ dirección $-\hat{x}$

$$d\bar{E} = \frac{dq'(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|^3} \qquad dq' = \sigma(\bar{r})\,dS'$$

<u>a1)</u> $\sigma +$

sólo eje z

viene incluido φ y además $z = 0$

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = |z\hat{z} - \rho'\hat{\rho}| = [(\rho')^2 + z^2]^{1/2}$$

$$dq' = \sigma\rho'\,d\rho'\,d\varphi'$$

$$d\vec{E}_1 = \frac{\sigma\rho'd\rho'd\varphi'(z\hat{z}-\rho'\hat{\rho})}{4\pi\varepsilon_0[(\rho')^2+z^2]^{3/2}} = \frac{\sigma\rho'd\rho'd\varphi'(z\hat{z}-\rho'[\cos\varphi'\hat{x}+\operatorname{sen}\varphi\,\hat{y}])}{4\pi\varepsilon_0[(\rho')^2+z^2]^{3/2}}$$

considerando sólo la componente $\hat{x}$ e integrando:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left[\ln\frac{b+\sqrt{z^2+b^2}}{a+\sqrt{z^2+a^2}} + \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{b}{\sqrt{z^2+b^2}}\right]$$

a2) $\sigma-$ Diferencias $\sigma \rightarrow -\sigma$ signo $-$

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi' \rightarrow \int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\frac{\alpha}{2}} d\varphi$$ signo $-$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1$$

a3) Total $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma \hat{x}}{\pi \varepsilon_0} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left[\ln\frac{b+\sqrt{z^2+b^2}}{a+\sqrt{z^2+a^2}} + \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{b}{\sqrt{z^2+b^2}}\right]$$

b) Cálculo aproximado

$$\vec{E} \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}\right]$$

$$Q = 0$$

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}\right]$$

- Cálculo de $\vec{p}$

$$\vec{p} = \iint_{S'} \vec{r}\,'\sigma(\vec{r}\,')\,dS'$$

$$\vec{p}_+ = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\int_a^b [\rho'\cos\varphi\,\hat{x} + \rho'\operatorname{sen}\varphi\,\hat{y}]\,\sigma\rho'\,d\rho'\,d\varphi'$$

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \rho'\hat{\rho} = \rho'[\cos\varphi\,\hat{x} + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{y}] \\ dS' = \rho'\,d\rho'\,d\varphi' \end{cases}$$

$\vec{p}_-$ $\begin{cases}\text{signo} - \\ \text{signo} -\end{cases}$ $\quad -\sigma \quad \int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\frac{\alpha}{2}} \quad \vec{p}_- = \vec{p}_+$

$$\vec{p}_{tot} = \frac{4\sigma}{3}(b^3-a^3)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}$$ (*) Siguiente página

- sustituyendo en $\vec{E}$

$$\vec{p}\cdot\vec{r} = (\ldots)\hat{x}\cdot z\hat{z} = 0$$

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\left[-\vec{p}\right]$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma\hat{x}}{3\pi\varepsilon_0 z^3}(b^3-a^3)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

(*) Cálculo de $\vec{p}$ para el problema anterior

$$\vec{p} = \iint_{S'} \vec{r}\,' \sigma(\vec{r}\,') dS'$$

$$\vec{p} = \underbrace{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_a^b \overbrace{\rho'\hat{\rho}}^{\vec{r}\,'} \overbrace{\sigma}^{\sigma(\vec{r}\,')} \overbrace{\rho' d\rho' d\varphi'}^{dS'}}_{\vec{p}_1} + \underbrace{\int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\frac{\alpha}{2}} \int_a^b \rho'\hat{\rho}\,[-\sigma]\,\rho' d\rho' d\varphi'}_{\vec{p}_2}$$

Fallo común:
Sacar $\hat{\rho}$ como constante $\vec{p}_1 \neq \hat{\rho} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_a^b \rho'\sigma\rho' d\rho' d\varphi'$
MAL!

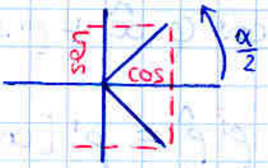
$\hat{\rho}$ no es cte
$\hat{\rho}$ varía con φ

$$\vec{p}_1 = \sigma \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_a^b (\rho')^2 \hat{\rho} \, d\rho' d\varphi'$$

$$\boxed{\hat{\rho} = \cos\varphi \, \hat{x} + \text{sen}\,\varphi \, \hat{y}}$$

$$= \sigma \hat{x} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_a^b (\rho')^2 \cos\varphi' d\rho' d\varphi' + \sigma \hat{y} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_a^b (\rho')^2 \text{sen}\,\varphi' d\rho' d\varphi'$$

$$= \sigma \hat{x} \left.\frac{(\rho')^3}{3}\right|_a^b \underbrace{\left.\text{sen}\,\varphi'\right|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}}_{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}} + \sigma \hat{y} \left.\frac{(\rho')^3}{3}\right|_a^b \underbrace{\left[-\cos\varphi'\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}}_{0}$$



otra forma de verlo.
coseno es par
seno es impar

$$\vec{p}_1 = \sigma \hat{x} \frac{b^3 - a^3}{3} \, 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$\vec{p}_2$ { cambia $\sigma \rightarrow$ signo −
cambia $\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\frac{\alpha}{2}} \rightarrow$ signo −

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1$$

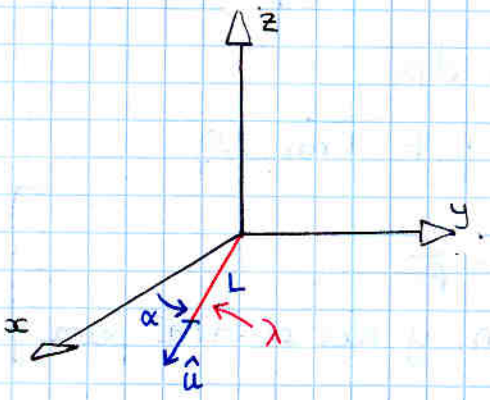
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{4\sigma}{3}(b^3 - a^3)\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}}$$

Problema 9.

Dada la siguiente distribución de carga y sabiendo que para grandes distancias $\phi(\bar r) = \frac{k}{r} + \frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}$

Determinar k y $f(\theta,\varphi)$



$$\phi(\bar r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\bar p \cdot \bar r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \rightarrow \frac{r\hat r}{r^3} = \frac{\hat r}{r^2}$$

$$Q = \lambda L$$

$$\bar p = \int_L \bar r' \lambda(\bar r')\, dl$$

ó $\bar p = \vec r_m Q$

$$\vec r_m = \frac{L}{2}\hat u$$
$$= \frac{L}{2}(\cos\alpha\,\hat x + \operatorname{sen}\alpha\,\hat y)$$

$\rightarrow \quad \vec p = \vec r_m Q = \frac{\lambda L^2}{2}(\cos\alpha\,\hat x + \operatorname{sen}\alpha\,\hat y)$

como buscamos $f(\theta,\varphi)$, lo queremos $\vec r$ en esféricas:

$\rightarrow \vec r = r\hat r = r\left[\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\hat x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat y + \cos\theta\,\hat z\right]$

$\rightarrow \quad \vec p \cdot \vec r = \frac{\lambda r L^2}{2}(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha + 0)$

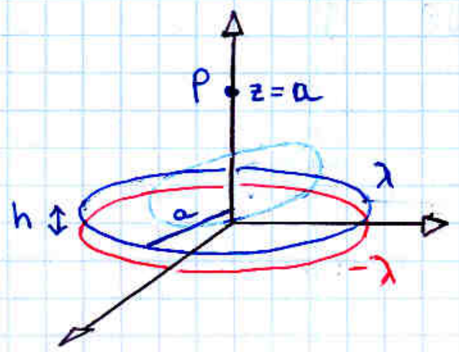
$$= \frac{\lambda r L^2}{2}\operatorname{sen}\theta\cdot\cos(\varphi-\alpha)$$

$\rightarrow \quad \phi(\bar r) \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\lambda L^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\operatorname{sen}\theta\cdot\cos(\varphi-\alpha)$

$$\boxed{k = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0} \qquad f(\theta,\varphi) = \frac{\lambda L^2}{4\pi}\operatorname{sen}\theta\cdot\cos(\varphi-\alpha)}$$

Problema 10.

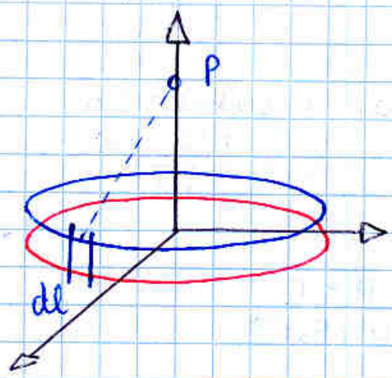
Calcule el potencial creado por los anillos en P(0,0,a) sabiendo que a >> h



Truco del problema:
P no está lejano de la distrib. de carga como para hacer el problema.

Si consideramos dl con sus dq, dichos dq SI estan lejanos de P → podemos emplear la aproximación.

calcular potencial en P por aproximación de multipolos



$$dl' = \rho' \, d\varphi' = a \, d\varphi'$$

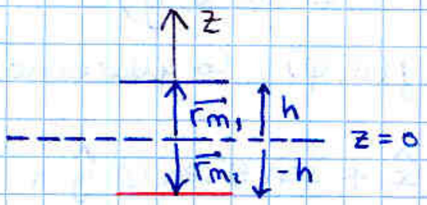
$$dq' = \lambda \cdot dl' - \lambda \, dl'$$
$$dq' = \lambda a d\varphi' - \lambda a d\varphi' = 0$$

$$d\emptyset(\bar{r}) = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|} + \frac{d\vec{p}\cdot(\vec{r}-r')}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-r'|^3}$$

$$d\vec{p} = \vec{dp_1} + \vec{dp_2} = \vec{r_{m_1}}\, dq + \vec{r_{m_2}}\, dq$$

Truco 2: Como $Q=0$
$\vec{p} = \vec{p_0} + \vec{r_0} Q \Big\} \Rightarrow \bar{p} = \bar{p_0}$
podemos calcular $\bar{p_0}$ en el origen, y nos servirá para todos los dl

$$d\vec{p} = \frac{h}{2}\hat{z} \cdot \lambda a \, d\varphi' + \left(-\frac{h}{2}\hat{z}\right)\cdot\left(-\lambda a \, d\varphi'\right)$$



$$\vec{dp} = h\lambda a \, d\varphi' \, \hat{z}$$

$$\bar{r} = a\hat{z} \qquad \vec{r'} = a\hat{\rho}$$

$$\vec{r} - \vec{r'} = a(\hat{z}-\hat{\rho}) \qquad d\bar{p}\cdot(\bar{r}-\bar{r}') = h\lambda a^2 d\varphi$$
$$|\bar{r}-\bar{r}'| = \sqrt{2}\, a$$

$$d\emptyset(\bar{r}) \simeq \underset{\overset{\parallel}{0}}{\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|}} + \frac{\vec{dp}\cdot(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

$$d\emptyset(\bar{r}) \simeq \frac{h\lambda a^2 \, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}\,a)^3} = \frac{h\lambda \quad d\varphi}{8\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{2}}$$

$$\emptyset(\bar{r}) \simeq \int_0^{\varphi=2\pi} d\emptyset(\bar{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{h\lambda}{8\pi\varepsilon_0 a^2\sqrt{2}}\, d\varphi$$

$$\boxed{\emptyset(\bar{r}) \simeq \frac{\sqrt{2}\, h\lambda}{8\varepsilon_0 a}}$$

---

intentar problema 11

2.8 Energía Electrostática : Ue

En cualquier sistema físico:

Trabajo externo realizado sobre el sistema = Incremento de Energía Potencial

$$W_{ext} = \Delta U$$

Energía electrostática = Energía Potencial

$$U_e = U$$

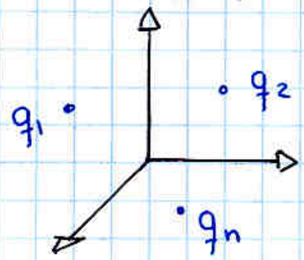
Cálculo de Energía Electrostática en sist. cargas puntuales

$$U_e = 0 + \Delta U_{e_1} + \Delta U_{e_2} + \dots$$

energía inicial sin cargas

trabajo para traer la 1ª carga desde el ∞ a $\vec{r}_1$

trabajo para traer la 2ª carga desde el ∞ a $\vec{r}_2$



Se van trayendo las cargas desde el ∞. Cada nueva carga que se trae debe tener en cuenta las cargas anteriores (sólo las anteriores) que ya han sido traidas

$$\Delta U_{e_i} = q_i \left[\phi^*(\vec{r}_i) - 0\right]$$

pot. en el ∞

indica que es el pot de las cargas anteriores

$$\phi^*(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

$$U_e = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_{e_i}$$

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

Reordenando términos y considerando simetrias (matemáticamente se saca)

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{|r_i - r_i|} \qquad i \neq j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}}_{\phi(\vec{r}_i)} \qquad j \neq i$$

$\phi(\vec{r}_i) \equiv$ potencial en $\vec{r}_i$ creado una vez ya están todas las cargas

es decir;

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i' \, \phi(\vec{r}_i')}$$

* generalizando a distribución de cargas:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho(\vec{r}\,') \, \phi(\vec{r}\,') \, dV'}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{V\infty} \rho(\vec{r}\,')\phi(\vec{r}\,')\,dV \underset{(\text{Ley de Gauss})}{=} \frac{1}{2}\iiint_{V\infty} \varepsilon_0 (\nabla\cdot\vec{E})\phi \, dV'$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}$$

sabiendo:

$$\nabla\cdot(\phi\vec{E}) = \nabla\phi\cdot\vec{E} + \phi \; \nabla\cdot\vec{E} \qquad (\text{despejando } (\nabla\cdot\vec{E})\phi)$$

$$= \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V\infty} \nabla\cdot(\phi\vec{E})\,dV}_{T^a \text{ divergencia}} - \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V\infty} \nabla\phi\cdot\vec{E}\,dV \;=\; -\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \nabla\phi\cdot\vec{E}\,dV$$

$$\underbrace{= \iint_{S\infty} \phi\vec{E}\cdot d\vec{S}}_{=0} \quad \phi(\infty) = 0$$

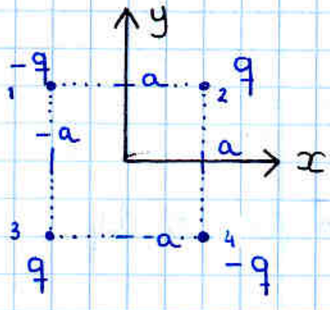
$$\underset{\vec{E}=-\nabla\phi}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V\infty} -\vec{E}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V\infty} |E^2|\,dV$$

$$\boxed{U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V\infty} |E|^2 \, dV}$$

utilizaremos siempre una de las 3 fórmulas recuadradas.

Problema 12.

Calcular la energía electrostática del sistema de cargas de la figura.



$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i' \, \phi(\vec{r}_i')$$

Calculamos potencial en $(-a,a)$

$$\phi(\bar{r}_1') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2'}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|}+\frac{q_3'}{|\bar{r}_3'-\bar{r}_1'|}+\frac{q_4'}{|\bar{r}_4'-\bar{r}_1'|}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2a}+\frac{q}{2a}+\frac{-q}{2\sqrt{2}a}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$$

por simetria $\phi(\bar{r}_4') = \phi(\bar{r}_1')$

$$\phi(\bar{r}_3') = \phi(\bar{r}_2') = -\phi(\bar{r}_1')$$

$$U_e = \frac{1}{2}\sum q_i'\phi(r_i') = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right]$$

Problema 13

→ Volumen esférico radio a

↳ relleno densidad carga ρ

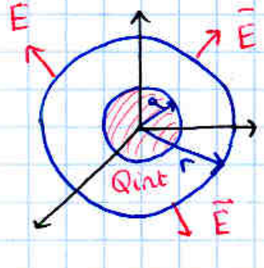
Calcular energía potencial U (ir trayendo capas de espesor dr desde el ∞)

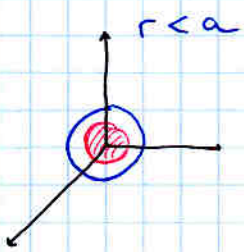
$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{V_\infty} |E|^2 \, dV$$ necesitamos $\bar{E}$

$$E(r>a) \underset{\substack{(T^{a}\text{ de Gauss})\\ Q_{int}=Q}}{=} \dots = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

$$E(r<a) = \left(\substack{T^{a}\text{ de Gauss}\\ Q_{int}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho}\right)\dots = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\hat{r}$$

r > a





$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} |E|^2 \, dV$$

→ CUIDADO : TODO EL ESPACIO

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_{int}} |E_{int}|^2 \, dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_{ext}} |E_{ext}|^2 \, dV$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

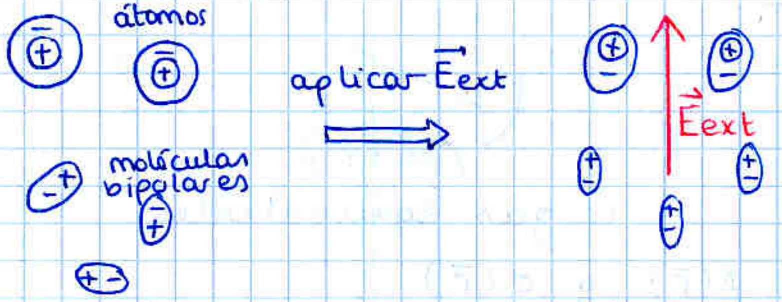
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^{+\infty} \left(\frac{a^3 \rho}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \rho^2}{18 \varepsilon_0^2} 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{a} + \frac{\varepsilon_0}{18 \varepsilon_0^2} a^6 \rho^2 \, 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_a^{+\infty}$$

$$\boxed{U_e = \frac{4\pi a^5 \rho^2}{15 \varepsilon_0} \underset{Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{=} \frac{3Q^2}{20\pi \varepsilon_0 a}}$$

TEMA 3. ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

3.1. Dieléctricos. Polarización



$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = 0 \qquad\qquad \vec{p} \neq 0$$

Polarización

$$\boxed{\overline{P} \equiv \text{vector polarización} \qquad \overline{P} = \frac{d\bar{p}}{dV} \quad \text{densidad volumétrica de momento dipolar}}$$

- Para 1 carga puntual no centrada en origen

$$\phi \simeq \cancel{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}_0|}} + \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}_0|^3}$$

$$\vec{E}_{ind} \simeq \cancel{\frac{Q(\bar{r}-\bar{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}_0|^3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}_0|^3}\left[\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}(\bar{r}-\bar{r}_0) - \bar{p}\right]$$

en dieléctrico
$Q = 0$

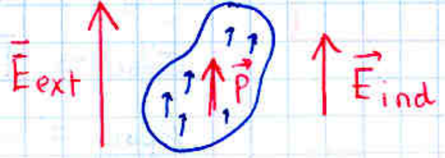
- Para un dV

$$d\phi \simeq \frac{d\vec{p}\cdot(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|^3} \overset{(d\vec{p} = \bar{P}\,dV)}{=} \qquad d\phi \simeq \frac{\bar{P}(\bar{r}')\cdot(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|^3}\, dV'$$

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\bar{P}(\bar{r}).(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\, dV'}$$

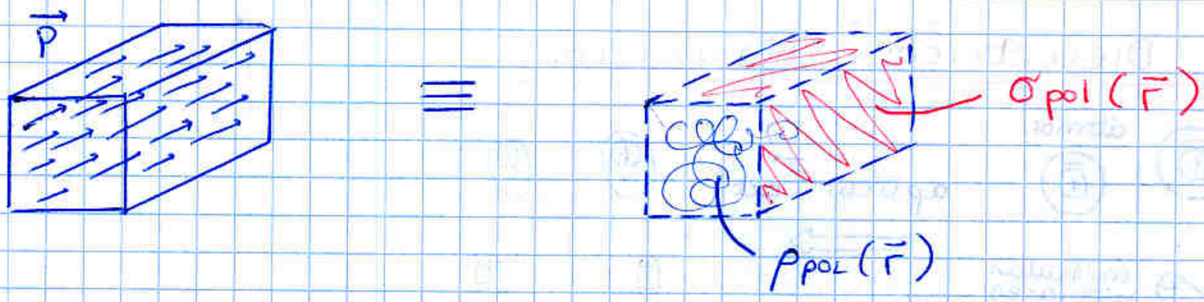
además los momentos dipolares inducen un campo eléctrico

$$\boxed{\vec{E}_{ind} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \left[\frac{3\,\bar{P}(\bar{r}').(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^5}(\bar{r}-\bar{r}') - \frac{\bar{P}(\bar{r})}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right] dV}$$



Cargas equivalentes

Material Polarizado equivalente a Vacio con cargas (modelo ficticio)



cargas equivalentes

Veamos cuanto valen $\rho(\bar r)$ y $\sigma(\bar r)$

Recordatorios previos:

(1) $$\underset{\text{coordenadas primadas}}{\nabla'}\left(\frac{1}{|\bar r-\bar r'|}\right)=\frac{\bar r-\bar r'}{|\bar r-\bar r'|^3}$$

(2) $$\nabla' f\cdot\vec A=\nabla'\cdot(f\vec A)-f\nabla'\cdot\vec A$$

(3) pot de una $\sigma(\bar r)$ y una $\rho(\bar r)$

$$\phi(\bar r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}dV'$$

$$\phi(\bar r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}ds'$$

$$\phi(\bar r)\simeq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\bar P(\bar r)\cdot(\bar r-\bar r')}{|\bar r-\bar r'|^3}dV'\overset{(1)}{=}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\vec P(\bar r')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\bar r-\bar r'|}\right)dV'$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\iiint_{V'}\nabla'\cdot\left(\frac{\bar P(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}\right)dV'}_{\substack{\text{T}^{a}\text{ divergencia}\\ \iint_s\frac{P(\bar r)}{|\bar r-r|}\cdot d\bar S}}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\nabla'\cdot P(\vec r)}{|\bar r-\bar r'|}dV'$$

$$\phi(\bar r)\simeq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_s\frac{\bar P(\bar r)\cdot\hat n}{|\bar r-\bar r'|}ds'-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{-\nabla'\cdot\bar P(\bar r)}{|\bar r-\bar r'|}dV'$$

comparando con (3)

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{pol}(\vec r')&=\vec P(\vec r')\cdot\hat n\\ \rho_{pol}(\vec r')&=-\nabla'\cdot\vec P(\bar r)\end{aligned}}$$

$\hat n$ hacia fuera de S'

notación más facil de ver y recordar:

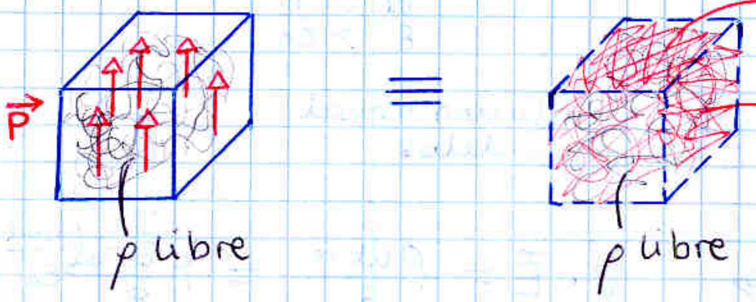
$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{pol}&=\vec P\cdot\hat n\\ \rho_{pol}&=-\underbrace{\nabla\cdot\vec P}_{\text{div }\vec P}\end{aligned}}$$

3.2 Desplazamiento Eléctrico

campos electrostáticos en el vacío $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla \varnothing \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \varnothing = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

campos electrostáticos en medios materiales

$\left. \begin{array}{l} \rho_{libre} \rightarrow \text{carga libre} \\ \rho_{pol} \rightarrow \text{carga ficticia representando el dieléctrico} \end{array} \right\} \rho = \rho_{libre} + \rho_{pol}$



σ_{pol} (superficie)
$\sigma_{pol}(\bar{r}) = \vec{P}(\bar{r}) \cdot \hat{n}$

ρ_{pol} (interior)
$\rho_{pol}(\bar{r}) = -\nabla' \cdot \vec{P}(\bar{r})$

$\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla \varnothing$ eso no cambia

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$ tampoco cambia, pero se puede 'desglosar' $= \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{pol}}{\varepsilon_0}$

$= \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$

$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_{libre}$

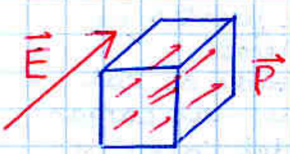
$\nabla \cdot (\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}) = \rho_{libre}$

NOTA: $\vec{E}$ es el campo TOTAL
$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind}$

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ desplazamiento eléctrico

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}}$$

- Materiales (χ_e, ε, ε_r ...)



$\vec{P} = f(\vec{E})$

Nosotros sólo trabajamos con materiales LIH

lineales → $\vec{P} = \chi_e \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$

isótropos → χ_e es escalar

homogeneos → χ_e es cte. en el material

χ_e = susceptibilidad eléctrica del medio.

Sabiendo

$$\left.\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\ \vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}\end{array}\right\} \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E} = \underbrace{\varepsilon_0(1+\chi_e)}_{\varepsilon}\vec{E}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)\\ \varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (1+\chi_e)\end{array}}$$

ε = permitividad dieléctrica

ε_r = permitividad relativa

vacío: $\chi_e = 0$, $\varepsilon_r = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

dieléctrico: $\chi_e > 0$, $\varepsilon_r > 1$, $\varepsilon > \varepsilon_0$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$$

→ relación lineal
↳ paralelos

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{libre} \Longrightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon}} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Sabiendo

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho_{libre}}{\varepsilon}\end{array}\right\} \quad \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon} = \nabla\cdot\vec{E}$$

$$\frac{\rho_{libre}+\rho_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}$$

despejando ρ_{pol}

$$\boxed{\rho_{pol} = \rho_{libre}\left[\frac{1-(1+\chi_e)}{(1+\chi_e)}\right]}$$

si $\rho_{libre} = 0 \Rightarrow \rho_{pol} = 0$

$$\begin{array}{ccc}\rho_{libre} = 0 & \Rightarrow & \rho_{pol} = 0\\ \equiv & & \equiv\\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 & & -\nabla\cdot\vec{P} = 0\\ \equiv & & \end{array}$$

no hay cargas libres, no hay fuentes ni sumideros ⇒

el dieléctrico no tiene ρ_{pol}. La polarización no tiene fuentes ni sumideros. Esta polarizado de tal forma que las cargas ligadas del interior se cancelan

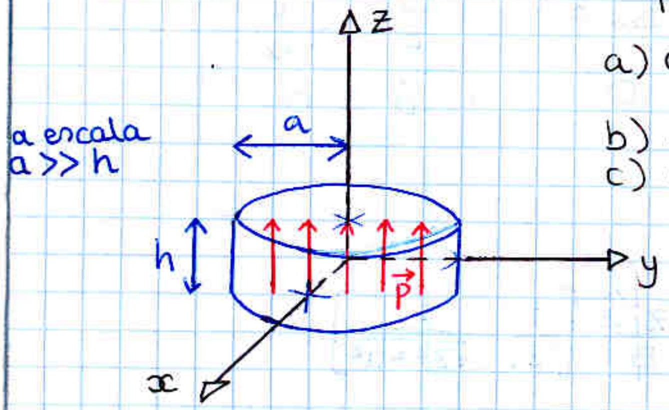
Mini-Resumen $\vec{E}$ y $\vec{D}$

$$\begin{tikzcd}
 & \nabla\cdot\vec{D} = \rho_{libre} \arrow[d] & \\
\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & = & \dfrac{\rho_{libre}}{\varepsilon} \\
\left.\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\ \vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}\end{array}\right\} \arrow[r] & \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Problema 3: Sea el siguiente queso dieléctrico de radio a y espesor h

$a >> h$

polarizado $\vec{P} = P\hat{z}$



a) ¿$\vec{E}$ y $\vec{D}$ en el interior para puntos alejados de los bordes?

b) ¿$\vec{E}$ exacto en eje z?

c) ¿$\vec{E}$ aprox. en eje z con $z >> a$?

(i) Primero calculamos las cargas de polarización:

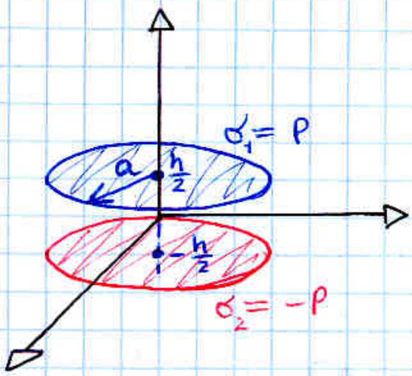
$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P} \underset{(P cte)}{=} 0$$

$$\sigma_{sup\ superior} = \sigma_{pol_1} = \vec{P} \cdot \hat{n} = P\hat{z} \cdot \hat{z} = P$$

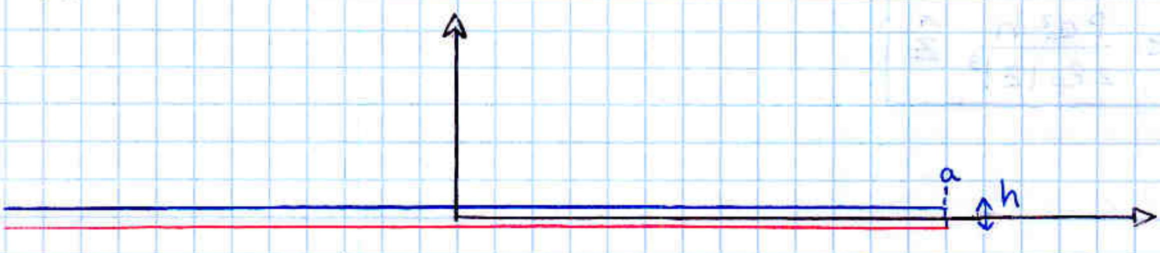
$$\sigma_{sup\ inferior} = \sigma_{pol_2} = \vec{P} \cdot \hat{n} = P\hat{z} \cdot (-\hat{z}) = -P$$

$$\sigma_{sup\ lateral} = \sigma_{pol_3} = \vec{P} \cdot \hat{n} = 0$$

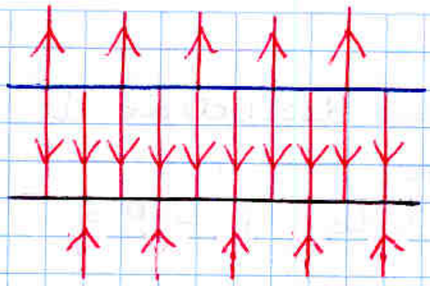
cargas equivalentes



a) $\vec{E}$ y $\vec{D}$ dentro del disco para puntos alejados de los bordes. Sabemos $a >> h$.



para puntos alejados de los bordes podemos considerar planos infinitos



$$\vec{E}_1 = \frac{P}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

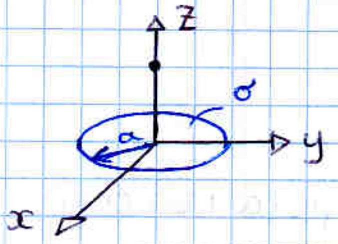
$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_{1i} &= -\frac{P}{2\varepsilon_0}\hat{z}\\ \vec{E}_{2i} &= -\frac{P}{2\varepsilon_0}\hat{z}\end{aligned}\right\} \quad \vec{E}_{int} = -\frac{P}{\varepsilon_0}\hat{z} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{P}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\\ \vec{D} &= 0\end{aligned}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\left(-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) + \vec{P} = 0$$

b) $\vec{E}$ exacto en eje z



$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

(Resultado previo)

$$\vec{E} = \frac{P(z-\frac{h}{2})\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z-\frac{h}{2}|} - \frac{1}{\sqrt{(z-\frac{h}{2})^2+a^2}}\right] + \frac{-P(z+\frac{h}{2})}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z+\frac{h}{2}|} - \frac{1}{\sqrt{(z+\frac{h}{2})^2+a^2}}\right]$$

c) $\vec{E}$ aproximado en eje z para $z >> a$

$$Q = \sigma_{pol_1}\cdot S_1 + \sigma_{pol_2}\cdot S_2 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{r_{m_1}}\,Q_1 + \overrightarrow{r_{m_2}}\,Q_2\\ &= \left(\frac{h}{2}\right)\hat{z}(P\pi a^2) + \left(-\frac{h}{2}\right)\hat{z}(-P\pi a^2)\end{aligned}$$

$$\vec{p} = hP\pi a^2\hat{z}$$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{E} \simeq \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\cdot\vec{r} - \vec{p}\right]$$

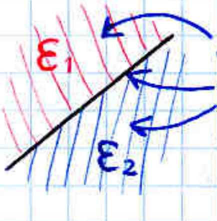
$$\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\left[\frac{3P\pi a^2 h\,\hat{z}\cdot z\hat{z}}{z^2} - P\pi a^2 h\,\hat{z}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} \simeq \frac{Pa^2h}{2\varepsilon_0|z|^3}\hat{z}}$$

3.3. Condiciones de contorno en la superficie de separación de dieléctricos

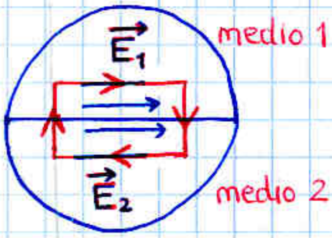
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon}$$

$\vec{E} = -\nabla \emptyset$ $\qquad$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$



$$\boxed{\nabla^2 \emptyset = -\frac{\rho_{libre}}{\varepsilon} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \qquad \nabla \times \vec{E} = 0}$$

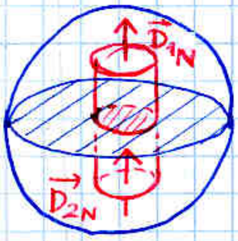
- Componente tangencial de $\vec{E}$ (cond. de contorno)



$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

$$\boxed{E_{1T} = E_{2T} \qquad T = \text{tangencial}}$$

- Componente normal de $\vec{D}$ (condición de contorno)



$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q_{libre}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{libre}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_{libre} \qquad n = \text{normal}}$$

3.4. Energía electrostática en presencia de dieléctricos

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho_{libre}(\vec{r}\,') \, \emptyset(\vec{r}) \, dV}$$ sigue valiendo

en vacío:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} \Rightarrow U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V\infty} |E|^2 dV$$

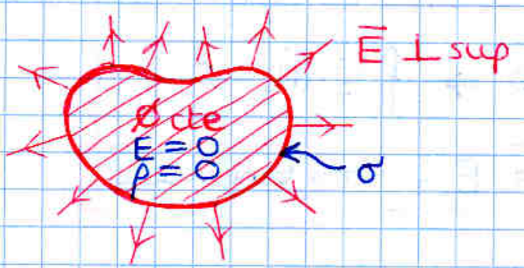
en dieléctrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{U_e = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{V\infty} |E|^2 dV}$$

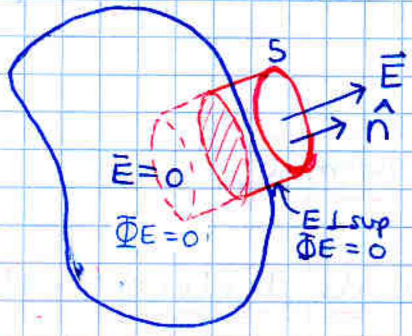
3.5. Conductor Perfecto

aplicar $\vec{E}$ → total movilidad de los e^- se mueven a la superficie hasta que se cumple: $\boxed{\vec{E}_{int} = 0}$ situación permanente $\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 & \boxed{\rho = 0} \\ \vec{E} = -\nabla \phi = 0 & \boxed{\phi = cte} \end{cases}$

$$\vec{E}_{int} = 0 \begin{cases} \rho = 0 \longrightarrow \text{todas las cargas en sup. } \boxed{\sigma} \\ \phi = cte \longrightarrow \boxed{\text{sup equipot} \rightarrow \vec{E} \perp \text{sup conductor}} \end{cases}$$



3.5.1. Relación entre $\vec{E}$ exterior y σ

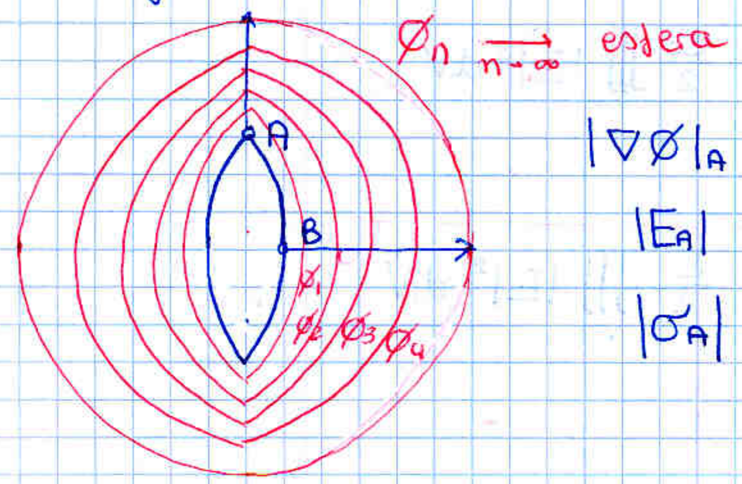


$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}}$$

3.5.2. Efecto de puntas

La carga tiende a concentrarse en las puntas.

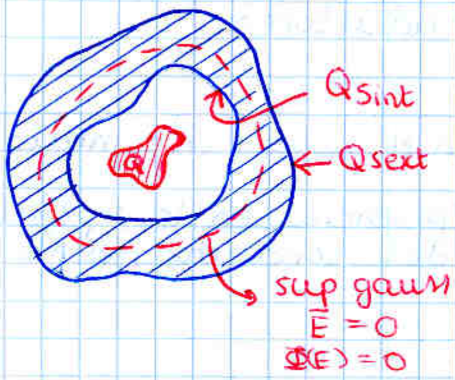


$$|\nabla \phi|_A > |\nabla \phi|_B$$

$$|E_A| > |E_B|$$

$$|\sigma_A| > |\sigma_B|$$

3.5.3. Cargas inducidas en un conductor hueco



$$\boxed{Q_{Sint} = -Q}$$

Ley Gauss

$$\oiint \vec{E}\cdot dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$q_{int} = 0$$

la carga total del conductor permanece constante (conductor aislado)

$$\boxed{Q_{sint} + Q_{sext} = Q_{inicial}}$$

en un conductor a pot. constante (ej a tierra) lo que se mantiene sería el potencial

normalmente $Q_{inicial} = 0$

$$Q_{sext} = -Q_{sint} = Q$$

3.5.4. Conductor aislado vs. conductor a potencial cte.

Aislado

→ no intercambia carga con el exterior

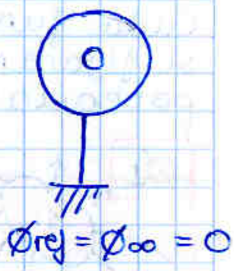
→ Q = cte

Ø = cte

→ conectado a 'dispositivo' que suministra carga necesaria para mantener Ø cte

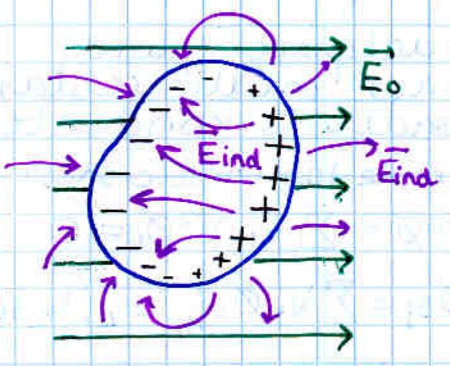
Caso general

Caso típico



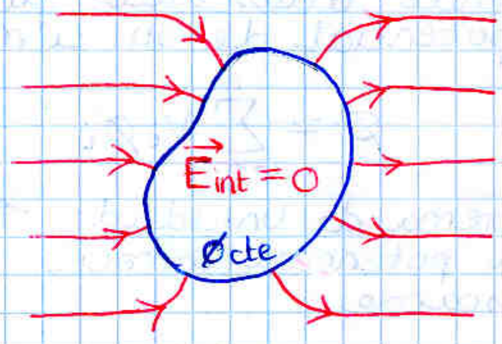
3.5.5 Conductor aislado en presencia de $\vec{E}$

$\vec{E}_0$: campo eléctrico inicial



≡

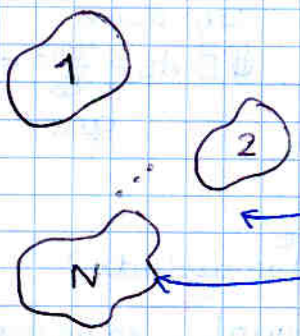
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$$



$\vec{E}_{int} = 0$

$\vec{E}_{ext} \perp S$ (Øcte)

3.6. Sistemas de Conductores
Coeficientes de capacidad e inducción electrostática



sistema de N conductores

se cumple:

$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$ en el espacio intermedio

$\boxed{\phi|_{S_i} = V_i}$ potencial en la superficie del conductor i-ésimo

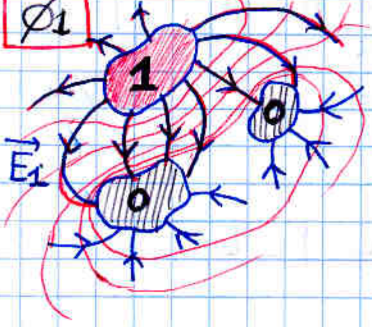
Definimos un conjunto de n-funciones: ϕ_i que cumplen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2\phi_i = 0 \\ \phi_i|_{S_j} = \left\{\begin{matrix} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{matrix}\right\} = \delta_{ij} \end{array}}$$

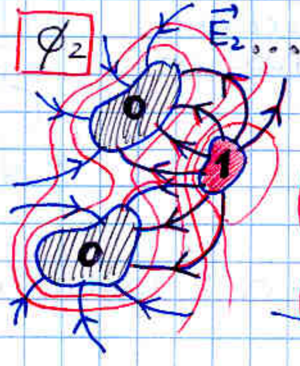
función delta de KRONEKER

Cada función ϕ_i representa el potencial en cada punto si fijáramos $V_i = 1$ y todos los demás conductores a potencial cero.

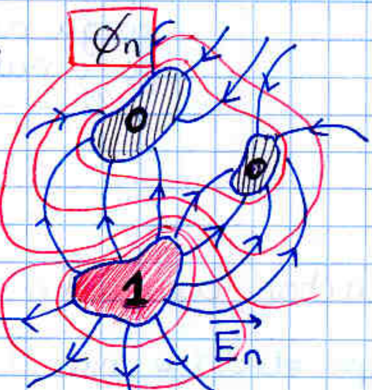
$\boxed{\phi_1}$



$\boxed{\phi_2}$



$\boxed{\phi_n}$



Podemos obtener el potencial en cualquier punto 'superponiendo' todas estas funciones multiplicadas por el potencial de su correspondiente conductor

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} V_i \phi_i$$

cumple las condiciones:

$$\nabla^2\phi = \sum V_i \nabla^2 \phi_i = 0$$

$$\phi_{S_j} = \sum V_i \phi_i|_{S_j} = \sum V_i \delta_{ij} = V_j$$

Por el teorema de Unicidad, este es el potencial correcto que buscamos

Calculemos ahora la carga para el conductor i-ésimo

$$Q_i = \oint\!\!\oint_{S_i} \sigma dS_i \overset{\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}}{=} \oint\!\!\oint (\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}) dS_i \overset{\vec{E}=-\nabla\phi}{=} -\varepsilon_0 \oint\!\!\oint_{S_i} \nabla\phi \, dS_i = -\varepsilon_0 \oint\!\!\oint \nabla\left[\sum_j V_j \phi_j\right] dS_i$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} V_j \underbrace{\left(-\varepsilon_0 \oint\!\!\oint_{S_i} \nabla\phi_j \cdot \vec{dS_i}\right)}_{C_{ij}}$$

$$\boxed{Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j \qquad C_{ij} = -\varepsilon_0 \oiint_{S_i} \nabla \text{Ø}_j \, dS_i}$$

$C_{ii} \equiv$ coeficiente de capacidad
$C_{ij} \equiv$ coeficiente de inducción electrostática $(i \neq j)$

Vemos que C_{ij} representa el flujo entrante al conductor i de $-\nabla \text{Ø}_j$ multiplicado por ε_0 y cambiado de signo. (es decir, el flujo saliente)
Recuerda que Ø_j es el potencial en cualquier punto cuando el potencial en el conductor j es 1, y en el resto es 0. $-\nabla \text{Ø}_j$ sería el campo eléctrico creado en esa misma situación. (lo llamo $\vec{E}_j$)

(*) La expresión $Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j$ es como ir sumando el flujo de $\varepsilon_0 \vec{E}_j$ (conforme, para cada conductor j, vamos anulando el resto a potencial cero y el propio a potencial V_j) saliente del conductor i-ésimo.

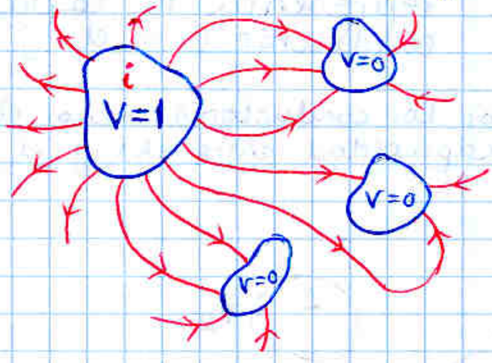
Podemos por tanto deducir lógicamente las siguientes propied.:

① $C_{ii} > 0$ (el campo $\vec{E}_i$ siempre es saliente del conductor iésimo (pues está a potencial 1 y el resto del mundo está a potencial 0))

$C_{ij} < 0$ (el campo $\vec{E}_i$ siempre es entrante a todos los demás conductores (por la misma razón))

② $C_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} C_{ij}$ (el flujo saliente del i-ésimo es mayor o igual a la suma del flujo entrante a los demás)

① y ② se pueden ver gráficamente ⇒ $\vec{E_i}$



el nº de líneas de $\vec{E}$ salientes/entrantes es una buena forma de hacerse una idea del flujo entrante/saliente.

③ $C_{ij} = C_{ji}$ Teorema de reciprocidad de Green (tiene una larga demostración)

(*) Tiene lógica que $Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j$, el flujo de cada conductor de $\varepsilon_0 \vec{E}$ entrante al conductor i-ésimo.
concuerda con $\iint_S \vec{E} \cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow Q = \iint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot dS$

escribiendo $Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} V_j$ como un sistema

$$\begin{cases} Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \dots + c_{1n}V_n \\ Q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \dots + c_{2n}V_n \\ \vdots \\ Q_N = c_{N1}V_1 + c_{N2}V_2 + \dots + c_{NN}V_N \end{cases}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

En ocasiones interesa saber la carga segun la diferencia de potencial entre los conductores.
Reescribiendo el sistema:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + \dots + C_{1n}(V_1 - V_n) \\ Q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}(V_2 - V_n) \\ \vdots \\ Q_n = C_{n1}(V_n - V_1) + C_{n2}(V_n - V_2) + \dots + C_{nn} \cdot V_n \end{cases}$$

siendo:

$$\boxed{C_{ij} \equiv \text{coeficientes de capacidad mutua}}$$

comparando los sistemas, se cumple $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}$ $\quad C_{ii} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$

$$C_{ij} = -c_{ij} \quad (i \neq j)$$

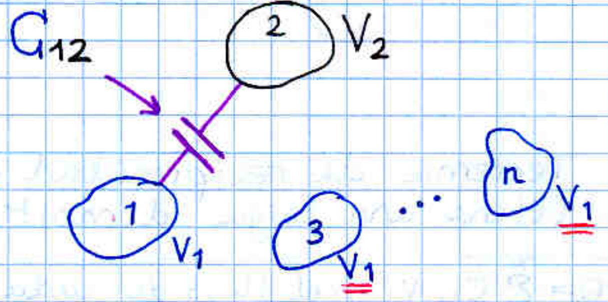
Pero lo más interesante es la otra definición de

$$C_{ij} = \frac{Q_i}{V_i - V_j}$$

siendo el potencial V_k de todos los conductores menos el j-ésimo igual a V_i (el potencial del conductor i-ésimo) representa la capacidad entre el conductor i y el j

$C_{ij} \Rightarrow$ pones todos los conductores menos el j al potencial del i
mides la capacidad entre el i y el j.

Representa ejemplo:

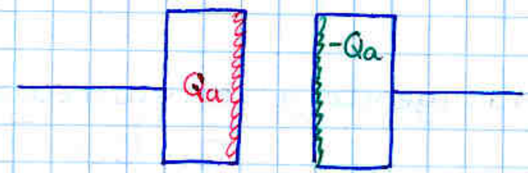


Definición Circuital de capacidad

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1}$$

$$\frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1}$$

$$Q_1 = - Q_2$$

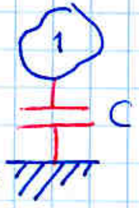


por tanto:
en un condensador las placas siempre tienen cargas opuestas

Ejemplos:

- Conductor aislado

Lo referimos a tierra pues no hay otra cosa



representa el infinito (potencial de referencia)

$$Q_1 = C_{11} V_1$$

la capacidad será:

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_{ref}} = \frac{Q_1}{V_1} = C_{11}$$

$$C = C_{11}$$

- Sistema de dos conductores

sistema de ecuaciones:

Primer conductor: $Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12}(V_1 - V_2)$

2° " : $Q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22} V_2$

aplicando definición de capacidad

$$\boxed{C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}\Big|_{Q_1 = -Q_2}}$$

$$C = \frac{C_{11} V_1 + C_{12}(V_1 - V_2)}{V_1 - V_2} = C_{11} \frac{V_1}{V_1 - V_2} + C_{12}$$

Ahora aprovechamos que $Q_1 = -Q_2$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) = Q$$
$$Q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22}V_2 = -Q$$

$$C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22}V_2 = 0$$

sabiendo $C_{12} = C_{21}$

$(V_1 - V_2) = -(V_2 - V_1)$

$$C_{11}V_1 + C_{22}V_2 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{C_{11}}{C_{22}}V_1$$

la relación que permite que se cumpla $Q_1 = -Q_2$

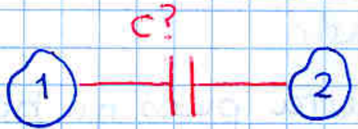
Tenemos:

$$\left.\begin{aligned} C &= C_{11}\frac{V_1}{V_1 - V_2} + C_{12} \\ V_2 &= \frac{C_{11}}{C_{22}}V_1 \end{aligned}\right\}$$

sustituyendo y reorganizando

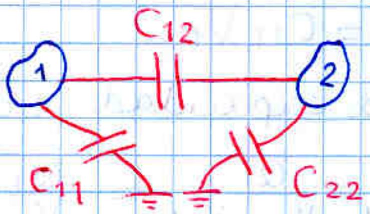
$$\boxed{C = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}}$$

Es "lógico"

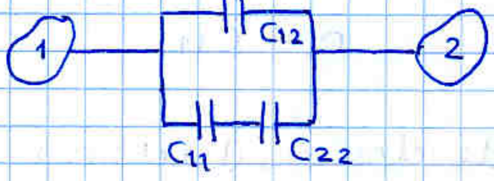


es otra forma de trabajar:

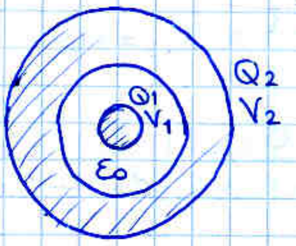
$\propto$



$\propto$



- Conductor envolviendo a otro



Primero: Establecemos sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) \\ Q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22} V_2 \end{cases}$$

$$C = \left.\frac{Q_1}{V_1 - V_2}\right|_{Q_2 = -Q_1}$$

$$C_{11} = \left.\frac{Q_1}{V_1}\right|_{V_2 = V_1}$$ (definición de C_{11})

si $V_2 = V_1$ $\Rightarrow$ $Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12}(\overbrace{V_1 - V_1}^{0})$

suposición momentánea para el cálculo de C_{ij}

$$C_{11} = \left.\frac{Q_1}{V_1}\right|_{V_2 = V_1}$$

No hay diferencia de potencial → no hay $\vec{E}$

$$Q_1 = \oint\!\!\oint_{S_1} \sigma_1 \, dS = \oint\!\!\oint_{S_2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS \overset{\vec{E}=0}{=} 0$$

$$\sigma_1 = 0$$

por lo tanto $C_{11} = 0$ es la consecuencia de que esté uno dentro de otro! No tiene conexión con el ∞

$$Q_1 = C_{12}(V_1 - V_2) = Q$$

$$Q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22} V_2 = -Q$$

por tanto $C_{22} V_2 = 0$

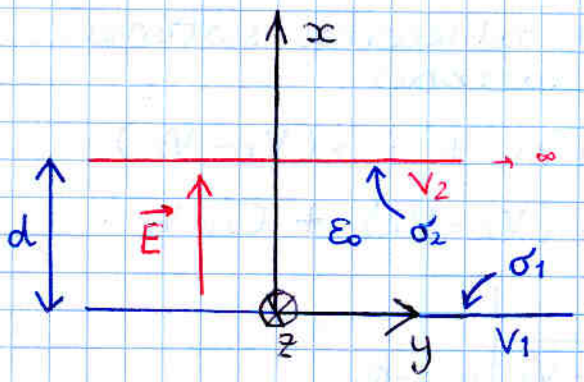
$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{C_{12}(V_1 - V_2)}{V_1 - V_2} = C_{12}$$

$$C = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} = \frac{C_{21}(V_2 - V_1)}{V_2 - V_1} = C_{21}$$

dos formas de calcular la capacidad

- Condensador plano de placas infinitas $(V_1 > V_2)$

↳ Calcular la capacidad por unidad de superficie



$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}\bigg|_{Q_2 = -Q_1}$$

$$C_S = \frac{\sigma_1}{V_1 - V_2}\bigg|_{\sigma_2 = -\sigma_1}$$

↑ capacidad por unidad de superficie

Hay dos formas:

partiendo de $V_1 - V_2$ calcula Q_1 (calculando $\bar{E} = -\nabla\varnothing \rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \bar{E}\cdot\hat{n}$)

partiendo de $Q_2 = -Q_1$ calcular $V_1 - V_2$ ($\bar{E}$ por gauss → $\varnothing = \int \bar{E}\,dr$)

Espacio entre conductores → $\nabla^2\varnothing = 0$

en sistema cartesiano : $\frac{\partial^2\varnothing}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varnothing}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varnothing}{\partial z^2} = 0$

El potencial (por ser placas infinitas) sólamente depende de x

$$\frac{\partial^2\varnothing}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varnothing}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \quad \frac{\partial^2\varnothing}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varnothing = Ax + B$$

$$\varnothing(x=0) = V_1 \rightarrow \quad B = V_1$$
$$\varnothing(x=d) = V_2 \rightarrow \quad A = \frac{V_2 - V_1}{d}$$

$$\varnothing(x) = \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1$$

$$\vec{E} = -\nabla\varnothing = -\frac{\partial\varnothing}{\partial x}\hat{x} = \frac{V_1 - V_2}{d}\hat{x}$$

Ahora podemos obtener las σ

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{x} = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{d}$$

Ya podemos calcular C_s

$$C_s = \frac{\sigma_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0}{d} \qquad C_s = \frac{\varepsilon_0}{d} \ F/m^2$$

3.7 Energia almacenada en un sistema de conductores

- En general

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i' \phi_i$$

- Para distribución volumétrica de carga ρ

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \, \phi(\vec{r}') \, dV'$$

- Sistema de conductores

Cada conductor tiene cargas en la superficie

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \oiint_{S_i'} \sigma(\vec{r}') \, \phi(\vec{r}') \, dS_i'$$

$$= \frac{1}{2} \sum \oiint_{S_i'} \sigma(\vec{r}') \, V_i \, dS_i'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1}^{N} V_i \oiint_{S_i} \sigma(\vec{r}') \, dS_i'$$

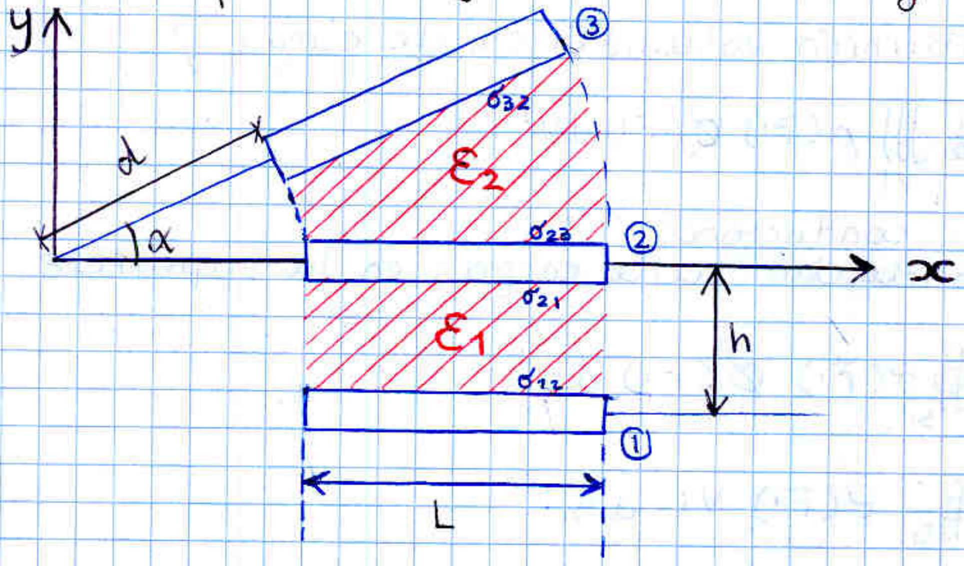
$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} V_i Q_i}$$

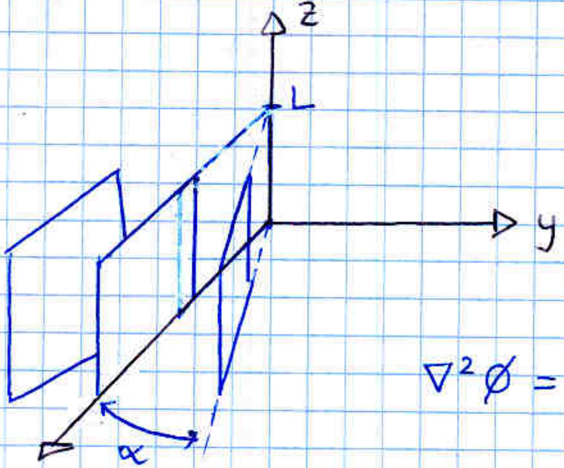
Problema 4

En la figura, sección conjunto de 3 placas cuadradas de lado L. Calcular:

a) Capacidad condensador formado por placas 2 y 3. Potencial sólo depende de φ.

b) Si la placa 2 está aislada y descargada y tenemos una diferencia de potencial V_0 entre placas 1 y 3 calcular Q_3 y V_2.





a) $C = \dfrac{Q_2}{V_2 - V_3} = \dfrac{Q_3}{V_3 - V_2}$

utilizamos cilíndricas

método:

$\nabla^2 \emptyset = 0 \rightarrow \emptyset \rightarrow \vec{E} = \nabla\emptyset \rightarrow \sigma = \varepsilon \vec{E} \cdot \hat{n}$
$\downarrow$
Q

$$\nabla^2 \emptyset = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\frac{\partial \emptyset}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial z^2}$$

como $\emptyset = \emptyset(\varphi) \rightarrow \frac{\partial \emptyset}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \emptyset}{\partial z} = 0$

$\nabla^2 \emptyset = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \varphi^2} = 0$ ← no hay cargas libres

$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \varphi^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow \emptyset = A\varphi + B$

$\emptyset(\varphi) = A\varphi + B$

$\emptyset(\varphi = 0) = V_2 = B$

$\emptyset(\varphi = \alpha) = V_3 = A\alpha + V_2 \longrightarrow A = \dfrac{V_3 - V_2}{\alpha}$

queda $\emptyset(\varphi) = \frac{V_3 - V_2}{\alpha}\varphi + V_2$

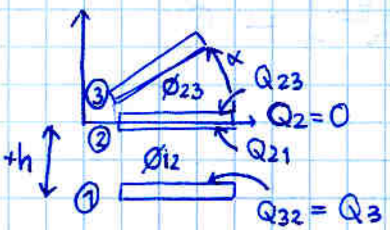
$$\vec{E} = -\nabla\emptyset = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\emptyset}{\partial\varphi}\hat{\varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{V_3 - V_2}{\alpha}\hat{\varphi}$$

$$\sigma_3 = \varepsilon_2 \vec{E}\cdot\hat{n} = \varepsilon_2\left(-\frac{1}{\rho}\frac{V_3-V_2}{\alpha}\hat{\varphi}\right)\cdot\left(-\hat{\varphi}\right) = \frac{\varepsilon_2}{\rho}\frac{V_3-V_2}{\alpha}$$

$$Q_3 = \iint_{S'} \sigma_3\, dS' = \int_0^L\int_d^{d+L} \frac{\varepsilon_2}{\rho'}\frac{V_3-V_2}{\alpha}\, d\rho'\, dz' = \frac{L\varepsilon_2(V_3-V_2)}{\alpha}\ln\left[\frac{L+d}{d}\right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q_3}{V_3-V_2} = \frac{L\varepsilon_2}{\alpha}\ln\left[\frac{L+d}{d}\right]}$$

b) si $Q_2 = 0$ y $V_3 - V_1 = V_0$, calcular Q_3 y V_2



$\emptyset_{23} = \emptyset_{23}(\varphi)$
$\emptyset_{12} = \emptyset_{12}(y)$

cálculo de V_2:

$$V_2 = \emptyset_{12}(y=0) = \emptyset_{23}(\varphi=0)$$

$\nabla^2\emptyset_{12} = 0$ (en cartesianas) $\nabla^2\emptyset_{23} = 0$ (en cilíndricas)

el hecho de que $\emptyset_{12}$ sólo dependa de 'y' y que $\emptyset_{23}$ sólo dependa de φ simplificará mucho las expresiones de $\nabla^2\emptyset$

$$\nabla^2\emptyset_{12} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\emptyset_{12}}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \emptyset_{12} = Ay + B$$

$$\nabla^2\emptyset_{23} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\emptyset_{23}}{\partial\varphi^2} = 0 \Rightarrow \emptyset_{23} = C\varphi + D$$

Para hallar A, B, C y D, utilizamos las condiciones de 'contorno' en cada conductor.

$$\emptyset_{12}(y=-h) = V_1 = -Ah + B \Rightarrow A = \frac{B-V_1}{h}$$

$$\emptyset_{23}(\varphi=\alpha) = V_3 = V_1 + V_0 = C\alpha + D \Rightarrow C = \frac{V_1+V_0-D}{\alpha}$$

$\emptyset_{12}(y=0) = \emptyset_{23}(\varphi=0) \Rightarrow B = D = V_2$ (lo que buscamos)

nos queda: $\emptyset_{12}(y) = \frac{B-V_1}{h}y + B$

$B = V_2$

$$\emptyset_{23}(\varphi) = \frac{V_1+V_0-B}{\alpha}\varphi + B$$

Hay que hallar B: método es el siguiente:

$\emptyset_{12} \rightarrow \vec{E}_{12} \rightarrow \sigma_{21} \rightarrow Q_{21}$
$\emptyset_{23} \rightarrow \vec{E}_{23} \rightarrow \sigma_{23} \rightarrow Q_{23}$

$Q_{21} + Q_{23} = Q_2 = 0 \Rightarrow$ despejamos $B = V_2$

$$\vec{E}_{12} = -\nabla \varnothing_{12} = \frac{V_1 - B}{h}\,\hat{y}$$

$$\sigma_{21} = \varepsilon_1 \vec{E}_{12}\cdot\hat{n} = \varepsilon_1 \frac{V_1 - B}{h}\hat{y}\cdot(-\hat{y}) = \varepsilon_1 \frac{B - V_1}{h}$$

$$Q_{21} = \iint_{S_{21}} \sigma_{21}\, dS_{21} = \int_0^L \int_d^{d+L} \varepsilon_1 \frac{B - V_1}{h}\, dx\, dz = \varepsilon_1 \frac{B - V_1}{h} L^2$$

$$\vec{E}_{23} = -\nabla \varnothing_{23} = -\frac{1}{\rho}\frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha}\,\hat{\varphi}$$

$$\sigma_{23} = \varepsilon_2 \vec{E}_{23}\cdot\hat{n} = \varepsilon_2 \hat{\varphi}\cdot -\frac{1}{\rho}\frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha}\hat{\varphi} = -\frac{\varepsilon_2}{\rho}\frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha}$$

$$Q_{23} = \iint_{S_{23}} \sigma_{23}\, dS_{23} = \int_0^L \int_d^{d+L} -\frac{\varepsilon_2}{\rho}\frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha}\, d\rho\, dz = -\varepsilon_2 L \frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha} \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]$$

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{23} = \varepsilon_1 \frac{B - V_1}{h} L^2 - \varepsilon_2 L \frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha} \ln\left[\frac{d+L}{d}\right] = 0$$

de ahí despejamos $B = V_2$

$$\boxed{V_2 = V_0 \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha \varepsilon_1 L}{h \varepsilon_2 \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]}} + V_1}$$

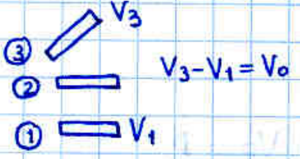
carga Q_3

Suponiendo que Q_3 está concentrada en Q_{32}, se deduce

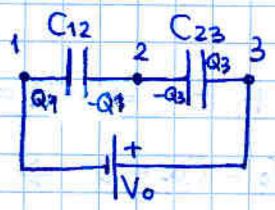
$Q_3 = -Q_{23}$ (ya conocida)

$$Q_3 = \varepsilon_2 L \frac{V_1 + V_0 - B}{\alpha} \ln\left[\frac{d+L}{d}\right] \overset{\binom{\text{sust}}{B}}{=} V_0 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 L^2 \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]}{\alpha \varepsilon_1 L + h \varepsilon_2 \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]}$$

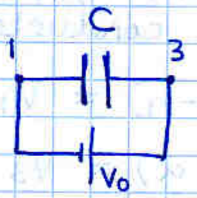
Resolución alternativa de b)



≍



≍



C_{23}: lo teníamos del apartado a) $\quad C_{23} = \frac{\varepsilon_2 L}{\alpha} \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]$

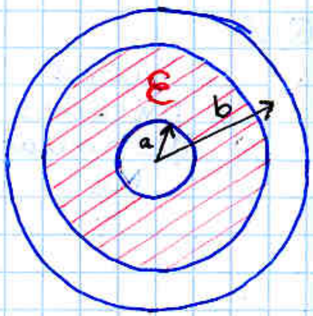
C_{12}: como dan el dato $\varnothing_{12}(y)$, podemos considerarlo un condensador de placas infinitas $\quad C_{12} = \frac{\varepsilon_1 L^2}{\alpha}$

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_3} = \frac{Q_3}{V_3 - V_1} \Rightarrow \begin{matrix} Q_3 = C V_0 \\ Q_2 = -Q_3 \end{matrix}$$

$$C = \frac{C_{12} C_{23}}{C_{12} + C_{23}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 L^2 \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]}{\alpha \varepsilon_1 L + \varepsilon_2 h \ln\left[\frac{d+L}{d}\right]}$$

$$C_{12} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} \rightarrow V_2 = V_1 - \frac{Q_1}{C_{12}} = V_1 + \frac{Q_3}{C_{12}} = V_1 + \frac{C V_0}{C_{12}}$$

Problema 5. Hallar la capacidad de un condensador esférico de radios a y b $(a<b)$ cuyo interior está ocupado por un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{b}{r}\right)^2$



$$C = \frac{Q_a}{V_a - V_b} = \frac{Q_b}{V_b - V_a}$$

Ahora vamos a hacerlo de una forma distinta a como lo hacemos siempre.

$$\boxed{\begin{tikzcd}\text{calculamos } \vec{E} \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & \sigma \arrow[r] & Q \arrow[r] & C \\ & V \arrow[urr, bend right] & & \end{tikzcd}}$$

Sup gauss esférica $a<r<b$

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{Q_a}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q_a}{\varepsilon 4\pi r^2} = \frac{Q_a}{\varepsilon_0 \left(\frac{b}{r}\right)^2 4\pi r^2} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,\hat{r}}$$

$$\boxed{df = \nabla f \cdot \vec{dl}}$$

Cálculo de $V_a - V_b$

$$\boxed{V_b - V_a = \int_a^b d\phi = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}}$$

$$V_b - V_a = \Delta\phi \Big|_a^b = \int_a^b d\phi = \int_a^b \nabla\phi\cdot\vec{dl} = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

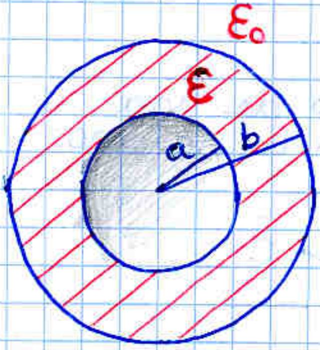
$$\Rightarrow V_b - V_a = -\int_a^b \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\,\hat{r}\cdot dr\,\hat{r} = -\frac{Q_a(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

$$\Rightarrow V_a - V_b = \frac{Q_a(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

$$C = \frac{Q_a}{V_a - V_b} = \frac{Q_a}{\frac{Q_a(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 b^2}}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 b^2}{b-a}}$$

Problema 6. Una esfera conductora de radio a que tiene una carga total Q está rodeada de una capa de material dieléctrico de radio interior 'a' y radio exterior 'b' y de permitividad dieléctrica ε uniforme.
Hallar la energía electrostática almacenada en la estructura.



$$\boxed{\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} V_i Q_i = \frac{1}{2} Q V \\ U_e &= \frac{1}{2}\iiint_{V\infty} \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV \\ U_e &= \frac{\varepsilon}{2}\iiint_{V\infty} |\vec{E}|^2\, dV \end{aligned}}$$

Varios métodos de hallar U_e

- $\underline{r<a}$

$\vec{D}=0$, $\vec{E}=0$ (interior de un conductor)

- $\underline{a<r<b}$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

- $\underline{r>b}$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\iiint_{V\infty} \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}\; r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$+ \frac{1}{2}\int_b^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\; r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2}\left[\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2\varepsilon}\, d\theta\, d\varphi\, dr + \int_b^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2\varepsilon_0}\, d\theta\, d\varphi\, dr\right]$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_a^b \frac{1}{r^2}dr\right]\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right]\left[\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right] + \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\int_b^{\infty}\frac{1}{r^2}dr\right]\left[\int_0^{2\pi}d\varphi\right]\left[\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right]\right]$$

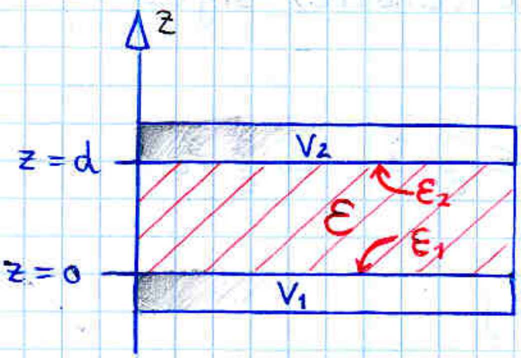
$$= \frac{Q^2}{32\pi^2}(2\pi)\underbrace{\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)}_{-(-1)--(1)=2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)_a^b + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_b^{\infty}\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\boxed{U_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}\right)}$$

Problema 7. La permitividad del material dieléctrico entre las placas de un condensador plano varía linealmente entre ε_1 en una placa y ε_2 en la otra. Sea A el area de las armaduras y d la distancia entre ellas.

Nota: Despréciese el efecto de bordes



$\varepsilon(z=0) = \varepsilon_1$

$\varepsilon(z=d) = \varepsilon_2$

varía linealmente: $\varepsilon = Az+B$

calculando A y B

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}\, z + \varepsilon_1$$

a) Obtenga la expresión de la capacidad

método: calcular $\vec{E}$ por Gauss $\rightarrow \sigma$, $\rightarrow V_1 - V_2$ $\rightarrow \boxed{C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}}$

Sup gauss:

$$\Phi = E\cdot A = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\,\hat{z}}$$

$$\overline{E} = \frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1}\,\hat{z}$$

$$V_1 - V_2 = \int_d^0 d\phi = \int_d^0 \nabla\phi \cdot \vec{dl} = -\int_d^0 \overline{E}\cdot\overline{dl}$$

$$= -\int_d^0 \frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1}\,\hat{z}\cdot dz\,\hat{z} = -\int_d^0 \frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1}$$

$$= \sigma\,\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\int_0^d \frac{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1}\,dz$$

arriba está la derivada de lo de abajo ⇒ ln

$$= \frac{\sigma d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\left[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1\right]\Big|_0^d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln[\varepsilon(z)]\Big|_0^d$$

$$= \frac{\sigma d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$C = \frac{Q_1}{V_1-V_2} = \frac{\sigma\cdot A}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$\boxed{C = \frac{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$$

b) ¿Cual es la densidad volumétrica de carga ligada en el dieléctrico?

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_{pol} &= -\nabla\cdot\vec{P}\\ \vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\end{aligned}} \rightarrow \vec{P} = \vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$$

aunque el medio no es homogeneo (ε no cte) sigue siendo lineal $\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$

$$\vec{P} = \vec{D}-\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\vec{E}-\varepsilon_0\vec{E} \underset{\substack{\uparrow\\ \vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{z}}}{=} \varepsilon\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{z} - \varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{z}$$

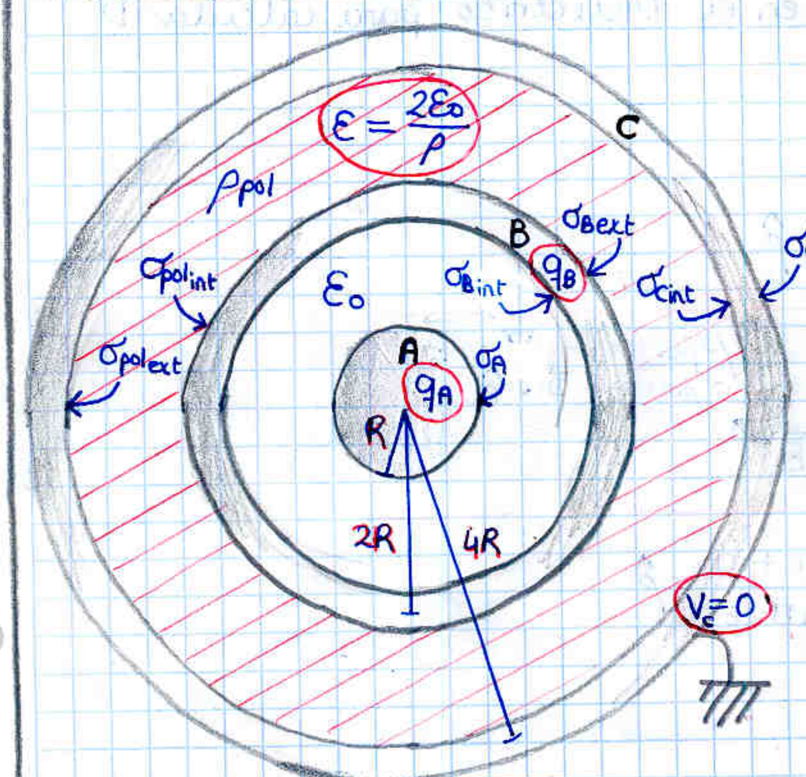
$$\vec{P} = \sigma\hat{z} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma\hat{z} = \sigma\hat{z}\left[1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]$$

$$\vec{P} = \sigma\hat{z}\left[1-\frac{\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1}\right]$$

$$\begin{aligned}\rho_{pol} &= -\nabla\cdot\vec{P}\\ &= -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varepsilon_0\sigma}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1}+\sigma\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho_{pol} = \frac{\varepsilon_0\sigma d(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{[(\varepsilon_2-\varepsilon_1)z+\varepsilon_1 d]^2}}$$

Problema 8. Estructura cilíndrica infinita



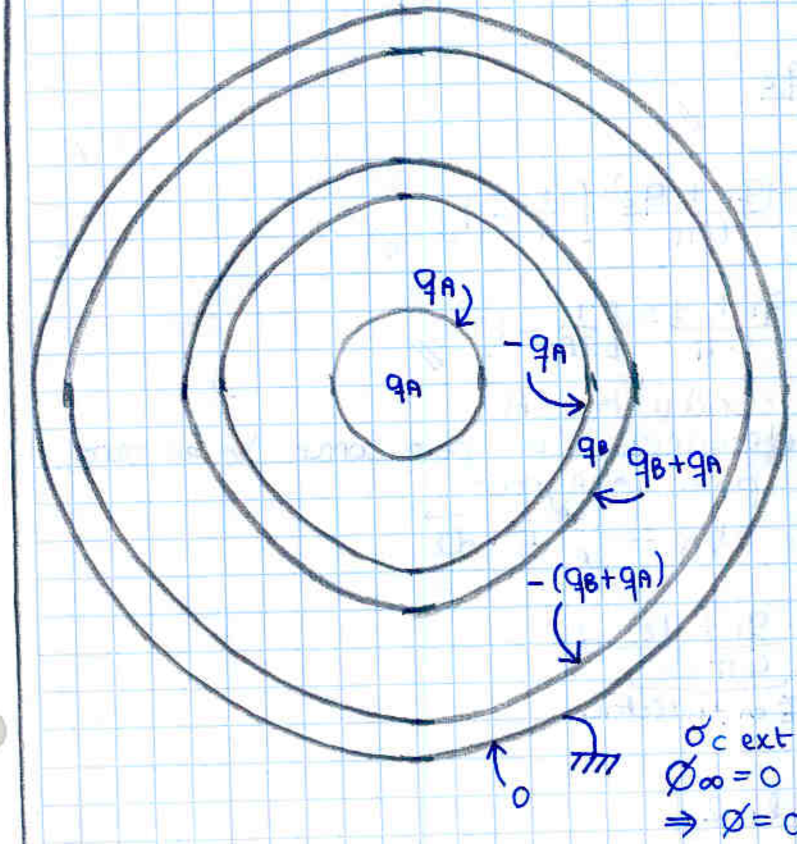
datos conocidos
(los rodeados en rojo: ε, q_A, q_B
$V_c=0$)

se consideran los conductores de grosor despreciable

q_A y q_B son cargas por unidad de Longitud (C/m)

a) Densidades de carga libre $\sigma_{Bint}, \sigma_{Bext}, \sigma_{cint}, \sigma_{cext}$

Aplicando Tª de Gauss en superficies de Gauss cilíndricas de longitud unidad en el interior de conductores B y C es inmediato obtener (el flujo es nulo, igual a la suma de cargas interiores):



y una vez hecho esto;
Sabiendo

$$q_{Bint} = -q_A$$

$$q_{Bext} = q_B + q_A$$

$$q_{cint} = -(q_B + q_A)$$

no hay mas que dividir por la superficie de cada cara $(2\pi r \cdot \underset{1}{\text{altura}})$

$$\sigma_{B\,int} = \frac{-q_A}{4\pi R} \;//$$

$$\sigma_{B\,ext} = \frac{q_A + q_B}{4\pi R} \;//$$

$$\sigma_{c\,int} = -\frac{q_A + q_B}{4\pi R} \;//$$

$\sigma_{c\,ext} = 0$ es fácil de demostrar
$\phi_\infty = 0$ y $\phi_c = 0$ y $\nabla^2\phi = 0$
$\Rightarrow \phi = 0$ (cte) $\Rightarrow \vec{E}_{ext} = 0 \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}$
$\sigma_{c_{ext}} = 0$ //

b) Calcular densidades de carga ligada en el dieléctrico ($\sigma_{pol\,int}$, ρ_{pol}, $\sigma_{pol\,ext}$)

Aplicando sup de Gauss en el Dieléctrico para calcular $\vec{D}$

$$\Phi = \oint \vec{D} \cdot \vec{dS} = q_{int}$$

$$D \cdot 2\pi\rho \underset{1}{h} = q_A + q_B$$

$$\vec{D} = \frac{q_A + q_B}{2\pi\rho}\hat{\rho}$$

Una vez se tiene $\vec{D}$, $\begin{cases} \rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P} \\ \sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n} \end{cases}$

$$\vec{D} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow P = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} \nearrow$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\frac{q_1+q_2}{2\pi\rho}}{\frac{2\varepsilon_0}{\rho}}\hat{\rho} = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$$

$$= \frac{q_1+q_2}{2\pi\rho}\hat{\rho} - \varepsilon_0\frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0 4\pi}\hat{\rho} = \frac{q_1+q_2}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}\right]\hat{\rho}$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\, P_\rho\right]$$ (mirar divergencia en cilíndricas)

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{q_1+q_2}{2\pi} \mp \rho\left(\frac{q_1+q_2}{4\pi}\right)\right]$$

$$= -\frac{q_1+q_2}{4\pi\rho}$$

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P} = +\frac{q_1+q_2}{4\pi\rho} \quad //$$

$$\sigma_{pol\ int} = \vec{P}(\rho=2R) \cdot (-\hat{\rho}) = \frac{-(q_1+q_2)}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - 1\right] \quad //$$

$$\sigma_{pol\ ext} = \vec{P}(\rho=4R) \cdot (\hat{\rho}) = \frac{q_1+q_2}{4\pi}\left[\frac{1}{2R} - 1\right] \quad //$$

c) Calcular potencial del conductor A.

Normalmente se toma como referencia el ∞, pero como V_C es cero, lo tomamos como referencia para integrar

$$V_C - V_A = -\int_R^{4R} \vec{E} \cdot \vec{dl} \rightarrow V_A = \int_R^{4R} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_A = \underbrace{\int_R^{2R} \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0\rho}}_{\vec{E} \text{ en el vacío}} d\rho + \int_{2R}^{4R} \underbrace{\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}}_{\vec{E} \text{ en dieléctrico}} d\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[(q_1+q_2)R + q_1 \ln 2\right]$$

TEMA 4. MÉTODOS ESPECIALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE POTENCIAL

Cuando sólo conocemos $\rho(\bar{r})$ en una región limitada por una superficie S pero conocemos Ø en todos los puntos de S.

Queremos hallar Ø en el volumen ?

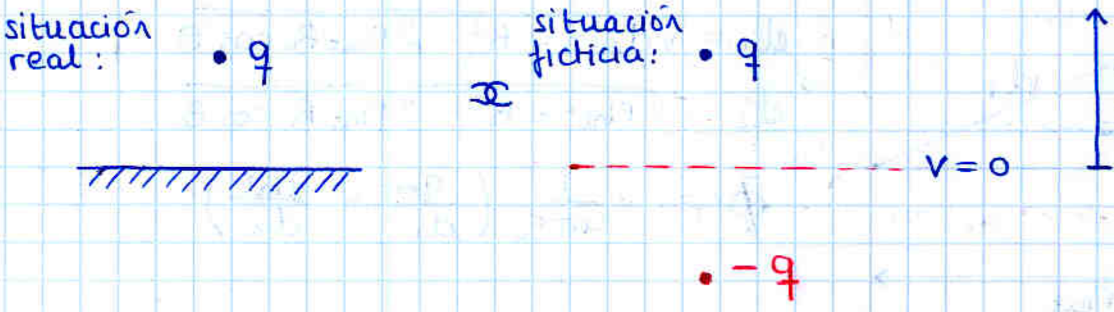
Tª de existencia y unicidad: La solución para Ø existe y es única.

Método de las imagenes

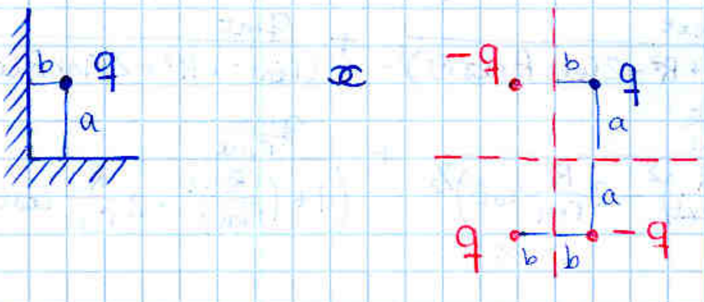
Introducir cargas ficticias (imagenes) en la región que no conocemos (IMPORTANTE: las imagenes NO PUEDEN estar en la región que nos interesa calcular) para emular las condiciones de contorno.

NOTA CHAPUCILLA: aunque el concepto no tiene nada que ver, la idea es similar a como si hicieramos un "equivalente thevenin" de la región que no conocemos.

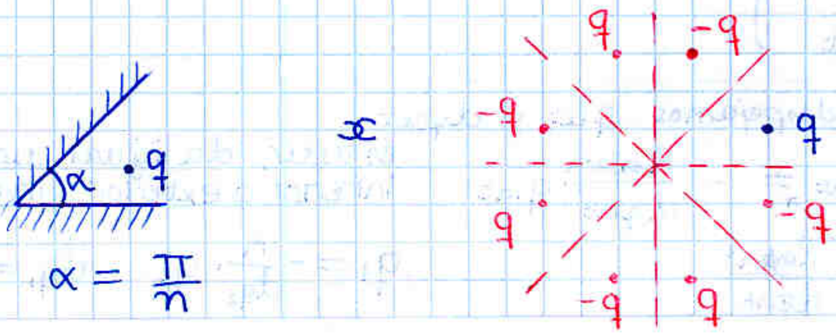
- Casos tipicos:
  - Planos infinitos a potencial cero.



el potencial en esta zona coincide para ambas situaciones



Nota util: cada plano infinito a potencial cero multiplica x 2 el nº de cargas en la situación ficticia.

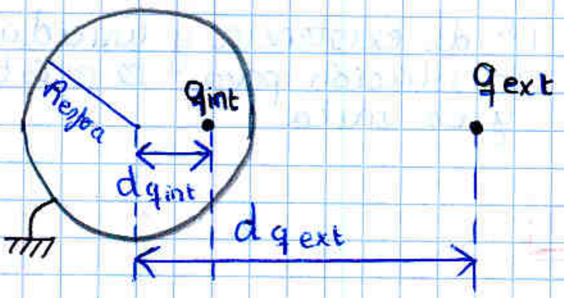


$\alpha = \frac{\pi}{n}$

si $\alpha \neq \frac{\pi}{n}$ la situación no converge

- Esfera a potencial cero

(no importa si la carga real es la de dentro y ponemos la de fuera ficticia o al reves)



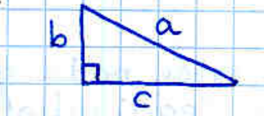
las fórmulas son :

$$q_{int} = -\frac{R_{esfera}}{d_{q_{ext}}} \cdot q_{ext}$$

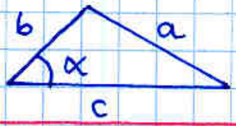
$$d_{q_{int}} = \frac{R_{esfera}{}^2}{d_{q_{ext}}}$$

Demostración:

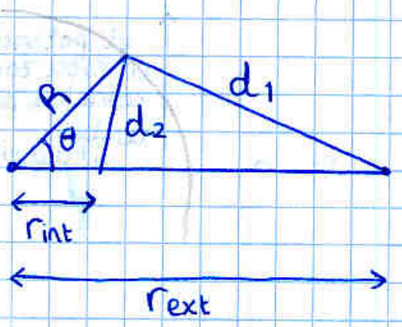
Se utiliza:



$$\xrightarrow{\text{Teorema Pitagoras}} \quad a^2 = b^2 + c^2$$



$$\xrightarrow{\text{Teorema coseno}} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



$$d_1 = \sqrt{r_{ext}{}^2 + R^2 - 2 r_{ext} R \cos\theta}$$

$$d_2 = \sqrt{r_{int}{}^2 + R^2 - 2 r_{int} R \cos\theta}$$

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_{ext}}{d_1} + \frac{q_{int}}{d_2}\right)$$

queremos $\phi(r=R) = 0$

$$\phi(r=R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_{ext}}{(r_{ext}{}^2 + R^2 - 2r_{ext}R\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q_{int}}{(r_{int}{}^2 + R^2 + 2r_{int}R\cos\theta)^{1/2}}\right] = 0$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{q_{ext}}{R}}{\left(1 + \left(\frac{r_{ext}}{R}\right)^2 - 2\frac{r_{ext}}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{\frac{q_{int}}{r_{int}}}{\left(1 + \left(\frac{R}{r_{int}}\right)^2 - 2\frac{R}{r_{int}}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{q_{ext}}{R} = \frac{q_{int}}{r_{int}} \\ \frac{r_{ext}}{R} = \frac{R}{r_{int}} \end{array}\right\}$$

nota: es curioso que si despejamos q_{ext} y $d_{q_{ext}}$

$$q_{ext} = -\frac{d_{q_{ext}}}{R_{esfera}} q_{int} = -\frac{R_{esfera}}{d_{q_{int}}} q_{int}$$

$$d_{q_{ext}} = \frac{R_{esfera}{}^2}{d_{q_{int}}}$$

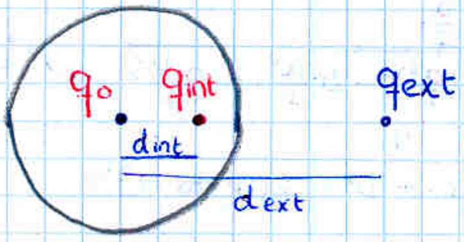
es decir, da igual cual sea interior o exterior, sirve igual:

$$q_1 = -\frac{R}{d_{q_2}} \cdot q_2 \qquad d_{q_1} = \frac{R^2}{d_{q_2}}$$

- Esfera a potencial constante V_0

Se hace lo mismo que para esfera a $V=0$ y luego se añade una q_0 en el centro de la esfera que haga que el potencial en la sup de la esfera sea V_0 (esto es sólo en caso de que la parte conocida sea el exterior de la esfera y queramos poner imagenes en el interior)

$$\phi(\bar{r}=a) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} = V_0$$



$$\boxed{V_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

- Esfera cargada a una carga Q_0

se hace lo mismo que para $V=0$

se añade una q_0 en el centro para que la carga total de la esfera sea la que se pide.

Tª Gauss:

$$\Phi_{real} = \frac{Q_{real}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{ficticio} = \frac{q_{int} + q_0}{\varepsilon_0}$$

igualando los flujos

$$\boxed{Q_0 = q_{int} + q_0}$$

- Generalizaciones

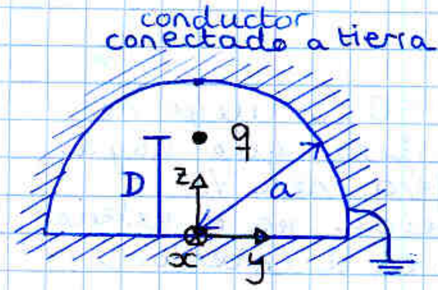
En general aparecerán tanto esferas como planos
↳ aplicar lo que corresponde en cada caso

En general las cargas reales suelen ser un $\rho(\bar{r})$
↳ En ese caso considerar elementos dq y hallar su elemento dq' imagen. Al hacerlo con todos los dq se obtiene un $\rho'(\bar{r})$ imagen.

Cuidado con no poner cargas imagen en el espacio donde queremos calcular el potencial

ej:

Problema 1.

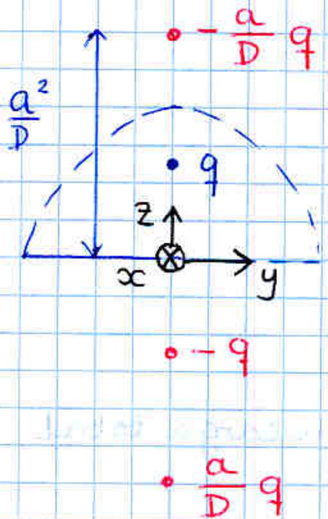


a) Calcular $\vec{E}$ en el interior y el exterior del volumen.

De manera inmediata, por ser un conductor:

$$\vec{E}_{ext} = 0$$

Para el interior, método de las imágenes:



$$\underset{(r,\theta)}{\phi_{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q\frac{a}{D}}{\left[r^2+(\frac{a^2}{D})^2-2r\frac{a^2}{D}\cos\theta\right]^{1/2}} \right.$$ ← Tª del coseno

$$+\frac{q}{\left[r^2+D^2-2rD\cos\theta\right]^{1/2}}$$

$$+\frac{-q}{\left[r^2+D^2+2rD\cos\theta\right]^{1/2}}$$

$$\left.+\frac{q\frac{a}{D}}{\left[r^2+\left(\frac{a^2}{D}\right)^2+2r\frac{a^2}{D}\cos\theta\right]^{1/2}}\right]$$

por tanto

$$\vec{E}_{int} = -\nabla\phi_{int}$$

$$= -\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{\text{sen}\theta}\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}}\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}\right]$$

(coordenadas esféricas)

$$= -\left[\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{-E_r}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}}_{-E_\theta}\hat{\theta}\right]$$

$$\vec{E}_{int} = E_r\,\hat{r} + E_\theta\,\hat{\theta}$$

calcular E_r y E_θ implica calcular $\frac{\partial\phi}{\partial r}$ y $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$

lo cual ademas de cansino da como resultado un chorizo de ocho grandes fracciones (ver boletin de problemas)

Derivar esto es facil pero pesado.

b) Calcular la densidad superficial de carga en la pared plana interior del volumen $(z=0)$

$$\sigma = \vec{E}\cdot\hat{n}$$ siendo $\hat{n} = \hat{z} = \hat{\rho}\cos\theta - \hat{\theta}\,\text{sen}\theta$

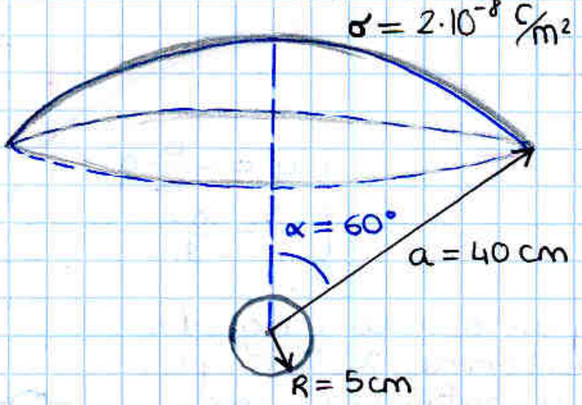
en este caso al estar en $z=0$

$\hat{n} = \hat{z} = -\hat{\theta}$

$$\sigma = -E_\theta(r, \theta=\tfrac{\pi}{2})$$

Problema 2

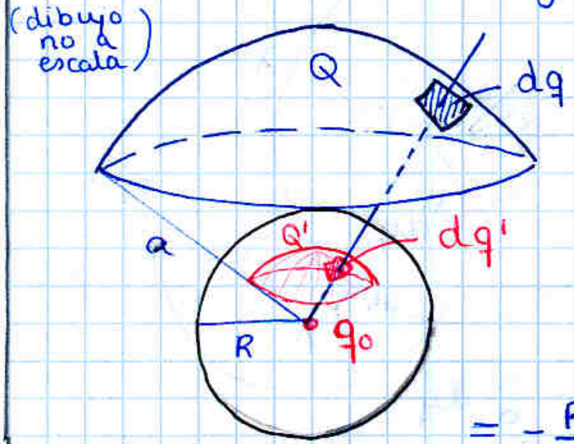
Distribución superficial de carga en forma de casquete esférico.
Esfera conductora aislada y descargada cuyo centro coincide con el del casquete



aislada y descargada es como decir $Q = 0$.

a) calcular el potencial que toma la esfera

Calculamos las imagenes



$$dq' = -\frac{R}{a}\,dq$$

queremos $Q = 0 = Q' + q_0$

$$Q' = \iint_{S'} dq' = \iint_S -\frac{R}{a}\,dq$$

¡pasamos a la superficie real!

$$= -\frac{R}{a}\iint_S dq = -\frac{R}{a}\,\sigma\iint_S ds$$

$$Q' = -\frac{R\sigma}{a}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad \begin{matrix} r = a \\ r^2 = a^2 \end{matrix}$$

$$Q' = 2\pi R\sigma a\,[\cos\alpha - 1]$$

$$Q = Q' + q_0 = 0 \Rightarrow q_0 = -2\pi R\sigma a\,[\cos\alpha - 1]$$
$$= 2\pi R\sigma a\,[1 - \cos\alpha]$$

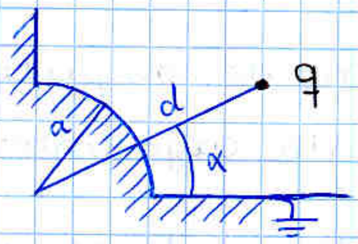
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0}{R} \qquad \boxed{V = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\,[1 - \cos\alpha]}$$

b) Si se conecta momentaneamente la esfera a tierra y se aisla despues, calcular la carga que conserva

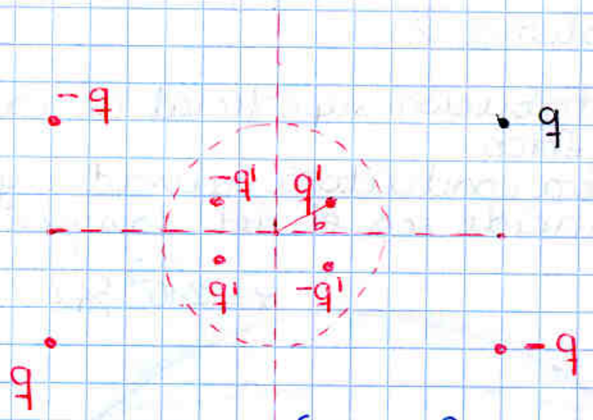
$$\boxed{V = 0 \longrightarrow q_0 = 0}$$

$$Q = Q' = 2\pi R a\,[\cos\alpha - 1]$$

Problema 3. Plantear las cargas imagenes para la siguiente situación:

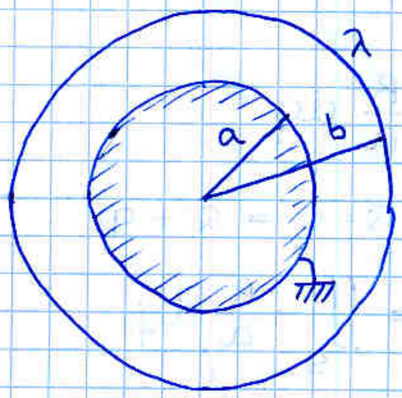


x

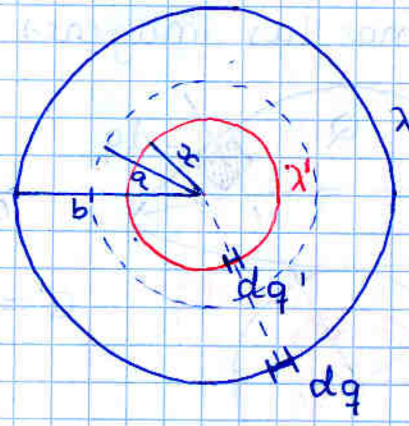


$$\begin{cases} q' = -\frac{a}{d} q \\ b = \frac{a^2}{d} \end{cases}$$

Problema 4. La figura muestra un anillo cargado con densidad lineal de carga uniforme λ C/m que rodea una esfera metálica a potencial cero. Calcular la carga total inducida en la esfera



x



$$dq' = -\frac{a}{b} dq$$
$$x = \frac{a^2}{b}$$

como V = 0, no hay carga imagen en el centro q_0

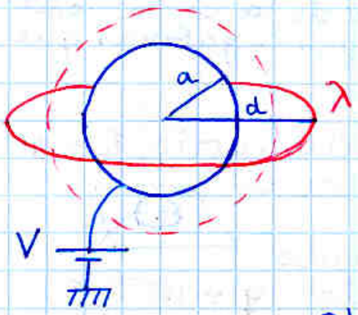
$$Q' = \int_{L'} dq' = \int_L -\frac{a}{b} dq = \int_L -\frac{a}{b} \lambda dl \underset{dl = \rho d\varphi}{=} \int_L -\frac{a}{b} \lambda b \, d\varphi$$

pasamos al real

$$= -\frac{a}{b} \lambda b \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi a \lambda$$

$$\boxed{Q_{esf} = Q' = -2\pi a \lambda}$$

Problema 5. Una esfera metálica de radio 'a' está a potencial V. Dicha esfera está rodeada por un anillo concéntrico de radio d cargado con distrib. lineal de carga λ C/m.
Calcule el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio R tal que $a < R < d$



$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = Q_{esf} = \text{cargas imagenes} = Q' + q_0$$ ↖ carga en el centro que proporciona el potencial V.

$$Q' = (\text{ejercicio anterior}) = -2\pi a \lambda$$

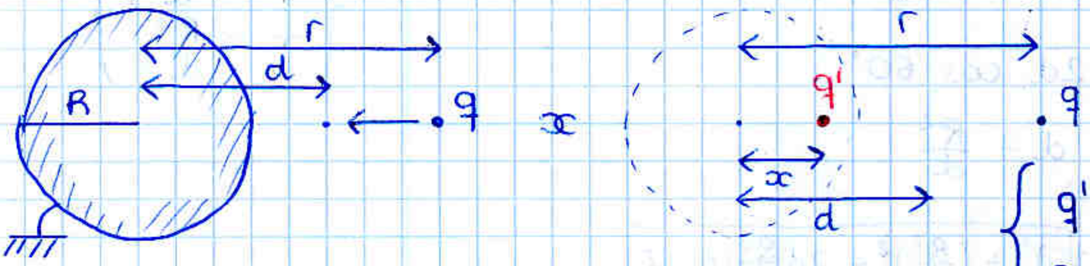
$$V = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow q_0 = 4\pi\varepsilon_0 a V$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{Q' + q_0}{\varepsilon_0} = -\frac{2\pi a\lambda}{\varepsilon_0} + 4\pi a V}$$

Problema 6. Se desea trasladar carga q desde ∞ hasta una distancia d del centro de una esfera metálica radio $R<d$ a potencial cero.
Calcular $W^{EXT}_{q(\infty\to d)}$ indicando claramente el signo

$$W^{EXT}_{q(\infty\to d)} = \int_\infty^d \vec{F}_{EXT} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^d \vec{F}_{INT} \cdot d\vec{r} = \int_d^\infty q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

hay que conocer $\vec{E}$ en el instante en que q está en cualquier r



$$\begin{cases} q' = -\frac{R}{r} q \\ x = \frac{R^2}{r} \end{cases}$$

nota que conforme q se va acercando a la esfera, la carga imagen se va alejando del centro (empieza en el centro)

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} \qquad \begin{cases} |\vec{r}-\vec{r}'| = r - \frac{R^2}{r} \\ \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \hat{r} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 \left(r - \frac{R^2}{r}\right)^2} \hat{r}$$

$$W^{EXT}_{q(\infty\to d)} = q\int_d^\infty \frac{q'\,\hat{r}\cdot dr\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\frac{R^2}{r}\right)^2} \overset{(q'=-\frac{R}{r}q)}{=} q\int_d^\infty \frac{-R/r\; q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{r^2-R^2}{r}\right)^2}\,dr$$

$$= -\frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty \frac{1/r\,dr}{\frac{(r^2-R^2)^2}{r^2}} = -\frac{Rq^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\int_d^\infty \frac{2r}{(r^2-R^2)^2}dr$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{esta integral es muy}\\ \text{simple. Compruébala}\\ \text{derivando el resultado}\end{array}\right) = -\frac{Rq^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-(r^2-R^2)^{-1}\right]_d^\infty$$

$$= -\frac{Rq^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d^2-R^2}\right]$$

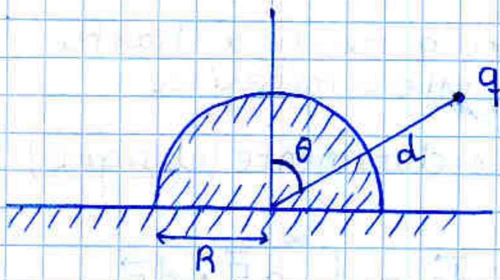
es negativo. Lógico.
En la superficie de la esfera cond. aparecerían cargas negativas que atraen a q.

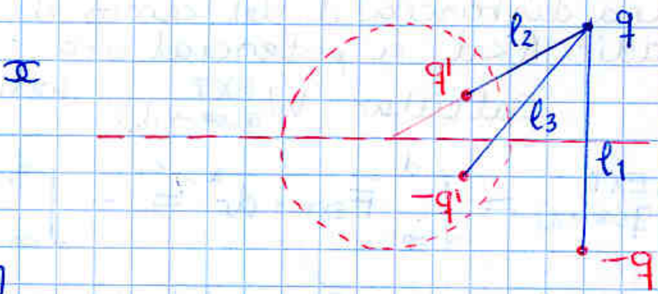
Problema 7. Una semiesfera metálica de radio R = 2m descansa sobre un plano metálico infinito

Calcule la energía electrostática cuando se sitúa una carga puntual de valor q = 10^{-6} C en r = d = 4 m, θ = θ₀ = 60°

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\,q\,\varnothing_q}$$

NOTA: Un plano infinito toca el infinito donde Ø = 0, por tanto es como si estuviera a tierra





$$\varnothing_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{l_1}+\frac{q'}{l_2}+\frac{-q'}{l_3}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} q' = -\frac{R}{d}q \\ x = \frac{R^2}{d}\end{array}\right\}$$

$$l_1 = 2d\cos 60°$$

$$l_2 = d - \frac{R^2}{d}$$

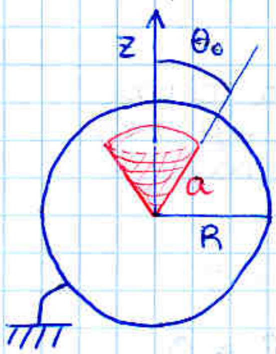
$$l_3 = \sqrt{d^2+\left(\frac{R^2}{d}\right)^2 - 2d\frac{R^2}{d}\cos 60}$$

$$\varnothing_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{2d\cos 60°}+\frac{-q\frac{R}{d}}{d-\frac{R^2}{d}}+\frac{+q\frac{R}{d}}{\sqrt{d^2-\left(\frac{R^2}{d}\right)^2-2d\frac{R^2}{d}\cos 60}}\right]$$

$$U_e = \frac{1}{2}q\,\varnothing_q = (\text{calculando valor numérico}) = -1'25\cdot 10^{-3}\,J$$

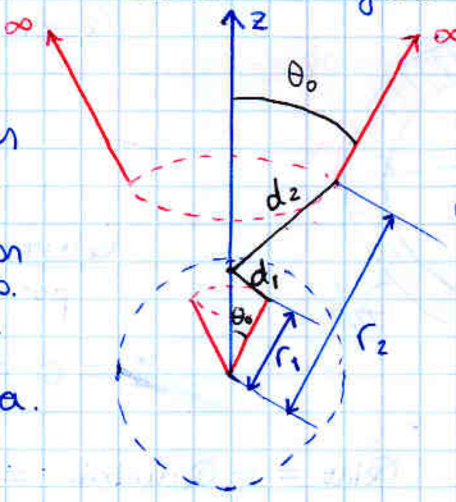
(de momento este es el problema más difícil del tema)

Problema 8. Esfera hueca conductora a potencial cero con distribución superficial de carga en su interior $0 \leq r \leq a$, $\theta = \theta_0$



a) Expresar mediante una integral simple el ϕ en el eje z en los puntos interiores a la esfera

método de las imágenes



$$dq' = -\frac{R}{r_1}\,dq$$

$$r_2 = \frac{R^2}{r_1}$$

las imagenes resultan ser la superficie de un cono sin punta con base en el infinito.
Los puntos en el infinito son los correspondientes a los dq del centro de la esfera.

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint_{S_1}\frac{dq}{d_1} + \iint_{S_2}\frac{dq'}{d_2}\right]$$

$$d_1 = \left[z^2 + (r_1)^2 - 2zr_1\cos\theta_0\right]^{1/2}$$

$$d_2 = \left[z^2 + (r_2)^2 - 2zr_2\cos\theta_0\right]^{1/2}$$

$$= \left[z^2 + \left(\frac{R^2}{r_1}\right)^2 - 2z\frac{R^2}{r_1}\cos\theta_0\right]^{1/2}$$

tomamos el d_2 que corresponde a la carga imagen dq' de la carga dq que está en d_1.

piden una integral simple

$$dq = \sigma\,ds$$

$$dq = \sigma\,r_1\,\text{sen}\,\theta_0\,dr_1\,d\varphi$$

$$dq' = -\frac{R}{r_1}\,dq$$

queda:

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{2\pi}d\varphi\right]\left[\sigma\,\text{sen}\,\theta_0\int_0^a\frac{r_1}{\left[z^2+(r_1)^2-2zr_1\cos\theta_0\right]^{1/2}} - \frac{R}{\left[z^2+\left(\frac{R^2}{r_1}\right)^2-2z\left(\frac{R^2}{r_1}\right)\cos\theta_0\right]^{1/2}}\,dr_1\right]$$

$$= \frac{\sigma\,\text{sen}\,\theta_0}{2\varepsilon_0}\int_0^a\left(\frac{r_1}{(z^2+r_1^2-2zr_1\cos\theta_0)^{1/2}} - \frac{R}{\left(z^2+\left(\frac{R^2}{r_1}\right)^2-2z\left(\frac{R^2}{r_1}\right)\cos\theta_0\right)}\right]dr_1 \quad //$$

b) Calcular para el caso $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a\left(\frac{r_1}{(z^2+r_1^2)^{1/2}} - \frac{R}{\left(z^2+\left(\frac{R^2}{r_1}\right)^2\right)^{1/2}}\right]dr_1$$

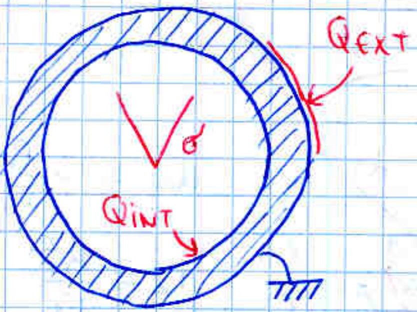
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(z^2+r_1^2)^{1/2}\Big|_0^a - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a\frac{Rr_1}{(z^2r_1^2+R^4)^{1/2}}\,dr_1$$

CUIDADO! $\sqrt{z^2} = |z|$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((z^2+a^2)^{1/2} - |z|\right) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot 2 \frac{R}{2z^2} \left(z^2 r_1^2 + R^4\right)^{1/2} \Big|_0^a$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(z^2+a^2)^{1/2} - |z| - (z^2a^2+R^4)^{1/2}\frac{R}{z^2} + \frac{R^3}{z^2}\right] //$$

c) También para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, halle la carga total inducida en cada una de las superficies (interior y exterior) de la esfera conductora.



Q_{EXT}:

$\phi_{ext} = cte = 0$
$E_{ext} = 0$
$\sigma = \varepsilon \vec{E} \cdot \hat{n} = 0$
$Q_{EXT} = 0$

Q_{INT}:

por Gauss (sup interior esfera)

$$\Phi = 0 = \frac{Q_{int\,sup}}{\varepsilon_0} \equiv \frac{Q_{distrib} + Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$Q_{int} = -Q_{distrib} = -\sigma \cdot A$$

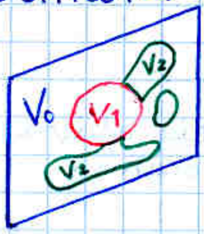
$$A = \int\!\!\int_{r=0,\ \varphi=0}^{r=a,\ \varphi=2\pi} dS \underset{\uparrow}{=} \int_0^a \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}\theta_0 \, d\varphi \, dr = 2\pi \cdot \underset{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\underset{\shortparallel}{1}} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^a = \pi a^2$$

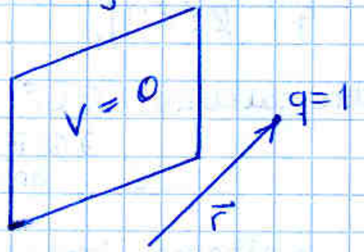
$$dS = r \operatorname{sen}\theta_0 \, dr \, d\varphi$$

$$\boxed{Q_{int} = -\sigma \pi a^2}$$

4.2 Método de Green

Problema original.
Calcular ϕ en región con cond. contorno arbitrarias $\longrightarrow$ Calcular $G(\vec r', \vec r)$ con cond. contorno homogeneas $\longrightarrow$ Obtener ϕ a partir de G





se basa en la segunda identidad de green

$$\iiint_{V'} (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)\,dV' = \oiint_{S'} \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right) dS'$$

si hacemos:

$f = \phi(\vec r')$ potencial electrostático
$g = G(\vec r', \vec r)$ función de green

$\phi(\vec r')$ verifica:

$\hookrightarrow \nabla'^2 \phi(\vec r') = -\dfrac{\rho(\vec r')}{\varepsilon_0}$

$\hookrightarrow \phi(\vec r')\big|_s = \phi\big|_s$

$G(\vec r', \vec r)$ verifica:

$\hookrightarrow \nabla'^2 G(\vec r', \vec r) = -\dfrac{\delta(\vec r' - \vec r)}{\varepsilon_0}$

$\hookrightarrow \left(G(\vec r', \vec r)\big|_{S'} = 0\right)$ para el problema de Dirichlet

La función G corresponde al potencial en $\vec r'$ creado por una carga puntual de valor unidad en $\vec r$ (y estando la superficie de contorno a potencial cero y sin ninguna otra carga)

Desarrollando la 2ª identidad de green con ϕ y G se llega a:

$$\phi(\vec r) = \iiint_{V'} \overbrace{\rho(\vec r')}^{\text{cargas libres}}\, G(\vec r', \vec r)\,dV' +$$

$$+ \cancel{\varepsilon_0 \oiint_{S'} G(\vec r', \vec r) \underbrace{\frac{\partial \phi(\vec r')}{\partial n'}}_{\text{dato en el problema de Neumann}} dS'} - \varepsilon_0 \oiint_{S'} \underbrace{\phi(\vec r')}_{\text{dato en el problema de Dirichlet}} \frac{\partial G(\vec r', \vec r)}{\partial n'} dS'$$

En esta asignatura sólo tratamos el problema de Dirichlet y por eso hacemos $G(\vec r', \vec r)\big|_{S'} = 0$, para que desaparezca la segunda integral

Problema de Dirichlet

$$\boxed{\phi(\vec r) = \iiint_{V'} \rho(\vec r')\, G(\vec r',\vec r)\, dV' - \varepsilon_0 \oiint_{S'} \phi(\vec r')\, \frac{\partial G(\vec r',\vec r)}{\partial n'}\, dS'}$$

volumen de las cargas del problema; en realidad es todo el espacio pero sólo cuenta $\rho \neq 0$

datos del problema original $\rho(\vec r')\big|_{V'}$ y $\phi(\vec r')\big|_{S'}$

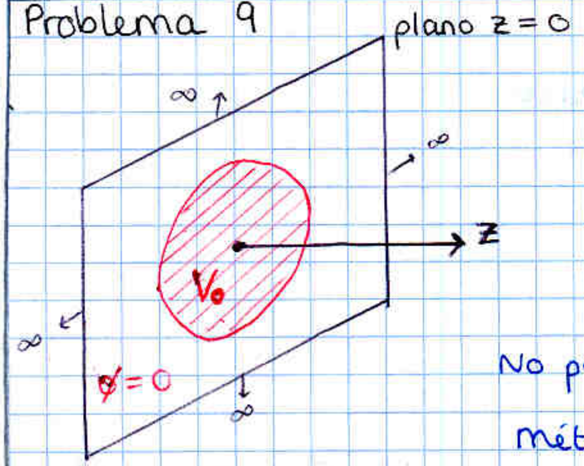
superficie de las condiciones de contorno.

Sólo hace falta calcular $G(\vec r',\vec r)\big|_{V'}$ y $\frac{\partial G(\vec r',\vec r)}{\partial n'}\Big|_{S'}$

$\vec n'$ hacia afuera del volumen

Para hallar $G(\vec r',\vec r)$, quitamos todas las cargas $\rho(\vec r')$, ponemos la superficie que limita el volumen a potencial cero, y calculamos el potencial creado por $q=1$ en $\vec r$ por imágenes

Problema 9



$$\phi\big|_{S'} = \begin{cases} V_0 \text{ en } \rho \le a & z=0 \\ 0 \text{ en } \rho > a & z=0 \end{cases}$$

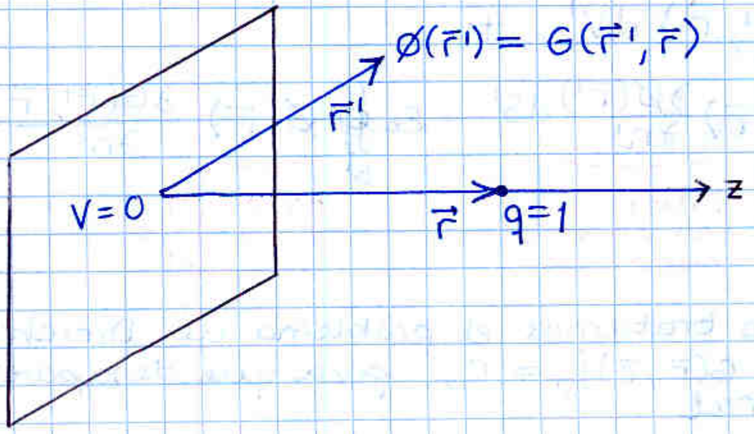
se pide:
Calcular $\phi(\vec r)$ en el semieje $z>0$

No podemos resolverlo por imágenes
↓
método de Green
↓
conocemos $\phi|_{S'}$ → problema de Dirichlet

$$\phi(\vec r) = \iiint_{V'} \underset{\overset{\|}{0}}{\rho(\vec r')}\, G(\vec r',\vec r)\, dV' - \varepsilon_0 \oiint_{S'} \phi(\vec r')\, \frac{\partial G(\vec r',\vec r)}{\partial n'}\, dS'$$

como no hay $\rho(\vec r')$ la primera integral se va

Hay que calcular $G(\vec r',\vec r)$

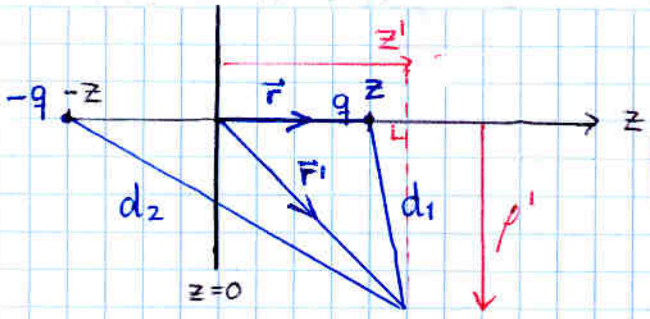


ponemos el plano a $V=0$

colocamos carga puntual $q=1$ en $\vec r$

calculamos $\phi(\vec r') = G(\vec r',\vec r)$

lo hacemos por imágenes



$$G(\bar{r}',\bar{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 d_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_1 &= [(\rho')^2 + (z'-z)^2]^{1/2} \\ d_2 &= [(\rho')^2 + (z'+z)^2]^{1/2} \end{aligned}}$$

hay que ser ingeniosa

$$G(\bar{r}';\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[(\rho')^2+(z-z')^2]^{1/2}} + \frac{-1}{[(\rho')^2+(z+z')^2]^{1/2}}\right]$$

ya tenemos $G(\bar{r}',\bar{r})$, ahora hay que hacer $\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'}$

$\vec{n}'$ debe ser hacia fuera del volumen

$\hat{n}' = -\hat{z}'$

esta prima es importante

$$\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'} = -\frac{\partial G(\bar{r}';\bar{r})}{\partial z'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z-z'}{[(\rho')^2+(z-z')^2]^{3/2}} + \frac{z+z'}{[(\rho')^2+(z+z')^2]^{3/2}}\right]$$

no olvidar este paso que hace todo más sencillo: particularizar en S'

$$\left.\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'}\right|_{S'} = -\left.\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \frac{z}{2\pi\varepsilon_0[(\rho')^2+z^2]^{3/2}}$$

ahora hacemos la integral, (en la sup donde V=0 y en el ∞ dond V=0 no hace falta integrar)

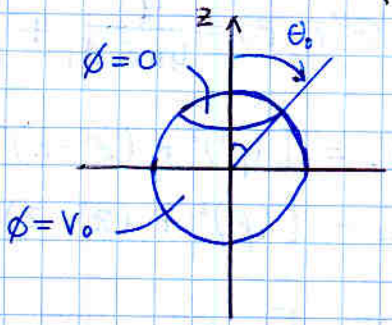
$$\emptyset(\bar{r}) = -\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_0^a V_0\,\frac{z}{2\pi\varepsilon_0[(\rho')^2+z^2]^{3/2}}\,\rho'\,d\rho'\,d\varphi'$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 V_0 z}{2\pi\varepsilon_0}\,2\pi\,\frac{1}{2}\int_0^a\frac{2\rho'\,d\rho'}{[(\rho')^2+z^2]^{3/2}}$$

$$\boxed{\emptyset(\bar{r}) = V_0\left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]}$$

Problema 10

Calcular ϕ en el eje positivo z fuera de la esfera

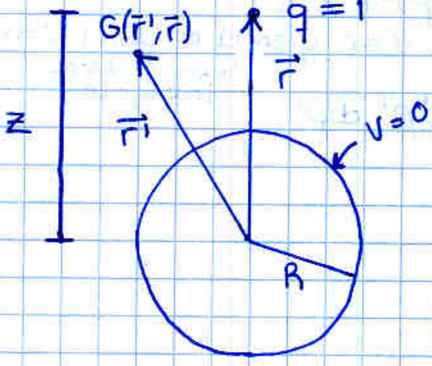


Se ve claramente que hay que recurrir al método de Green problema de Dirichlet.

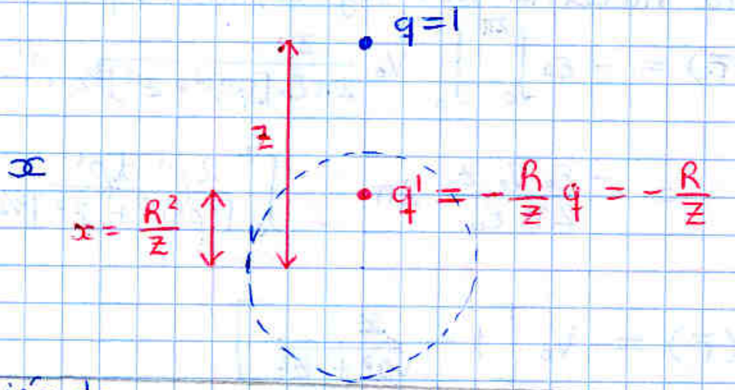
$$\phi(\vec r)=\iiint_{V'}\underset{0}{\underset{\|}{\rho}}(\vec r')\,G(\vec r',\vec r)\,dV-\varepsilon_0\oint\!\!\oint_{S'}\phi(\vec r')\,\frac{\partial G(\vec r',\vec r)}{\partial n'}\,dS'$$

$$=-\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\pi}V_0\cdot\frac{\partial G(\vec r',\vec r)}{\partial n'}\,dS'$$

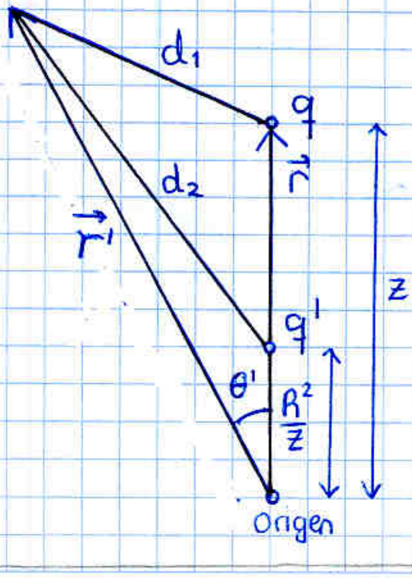
hay que calcular la función de Green

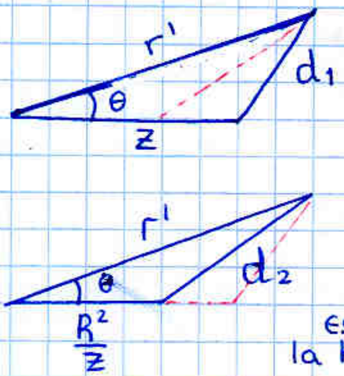


Por imagenes:



hay que saber la expresión de d_1 y d_2 casi de inmediato así que entiende bien el proceso.





piensa que el ángulo θ es el que en pitagoras actúa como ángulo recto.
Es decir d_1 es la hipotenusa

$$d_1^2=(r')^2+z^2-2zr'\cos\theta'$$

$$d_2^2=(r')^2+\left(\frac{R^2}{z}\right)^2-2\frac{R^2}{z}r'\cos\theta'$$

por tanto

$$G(\bar{r}',\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[(r')^2+z^2-2zr'\cos\theta']^{1/2}} - \frac{R/z}{[(r')^2+(\frac{R^2}{z})^2-2\frac{R^2}{z}r'\cos\theta']^{1/2}}\right]$$

$$\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial \hat{n}'} \qquad \hat{n}' = -\hat{r}' \text{ (hacia fuera del volumen)}$$

<u>este paso se repite mucho: apréndelo!</u>

$$= -\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial \hat{r}'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r'-z\cos\theta'}{[(r')^2+z^2-2zr\cos\theta']^{3/2}} - \frac{R/z\,[r'-\frac{R^2}{z}\cos\theta']}{[(r')^2+(\frac{R^2}{z})^2-2\frac{R^2}{z}r'\cos\theta']^{3/2}}\right]$$

ahora la particularizamos a la superficie $(r'=R)$

$$-\left.\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial \hat{r}'}\right|_{r'=R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R-z^2/R}{[R^2+z^2-2zR\cos\theta']^{3/2}}$$

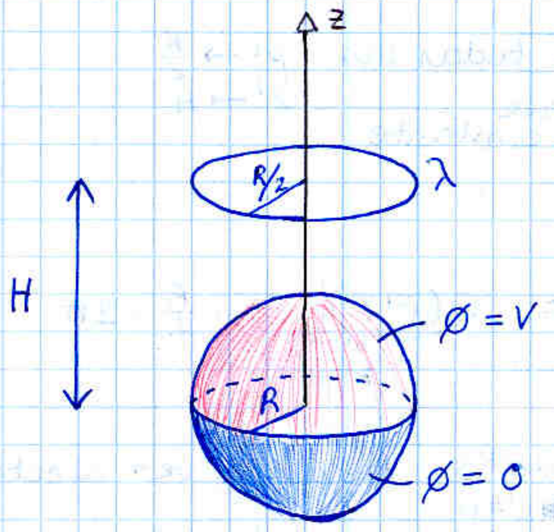
y ahora ya podemos sustituir en la expresión de ϕ

$$\phi(\vec{r}) = -\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\pi} V_0\frac{\partial G(\vec{r}',\bar{r})}{\partial n'}\underset{\overset{\|}{R}}{(r')^2}\,\text{sen}\,\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

$$= -\varepsilon_0 V_0 R^2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(R-\frac{z^2}{R}\right)\frac{\overset{\swarrow\int_0^{2\pi}}{2\pi}}{2zR}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{2zR\;\text{sen}\,\theta'\,d\theta'}{[R^2+z^2-2zR\cos\theta']^{3/2}}$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{V_0(R^2-z^2)}{2z}\left[\frac{1}{R+z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos\theta_0}}\right]}$$

Problema examen. Enero 2003 (4 ptos/10)



c. contorno:

$$\phi|_s = \begin{cases} V_0 & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \quad r=R \\ 0 & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi \quad r=R \end{cases}$$

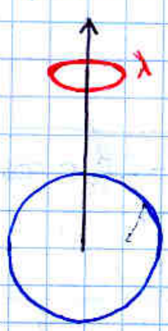
Carga libre:

$$\hookrightarrow \rho(\bar{r}) = \lambda\,\delta(\rho-\tfrac{R}{2})\,\delta(z-2R)$$

calcular el $\phi(\vec{r})$ en el semieje $z>0$

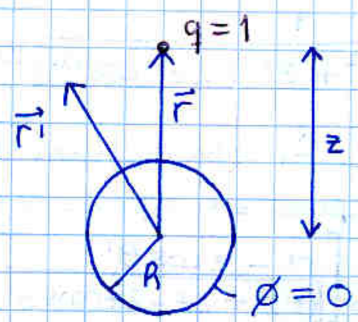
CUIDADO:
- tanto fuera como dentro
- en este caso $\rho(\bar{r}) \neq 0$
- hay que separar el problema en 2 $\quad z > R$
  $\quad z < R$

Región exterior



Problema de Green

Recuerda: no traemos las cargas libres



por imágenes se obtiene

$$G(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{[(r')^2+z^2-2r'z\cos\theta']^{1/2}}} - \frac{R/2}{[(r')^2+(\frac{R^2}{z})^2-2r'\frac{R^2}{z}\cos\theta']^{1/2}}\right]$$

$$\left.\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'}\right|_{S'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R-z^2/R}{[R^2+z^2-2Rz\cos\theta']^{3/2}}$$

Ahora ya podemos calcular el potencial como:

$$\emptyset(\bar{r}) = \iiint_{V'} \rho(\bar{r}')G(\bar{r}',\bar{r}) - \varepsilon_0 \oiint_{S'} \emptyset(\bar{r}')\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial \hat{n}'}dS'$$

hagamos las integrales por separado

$$I_1 = \iiint_{V'} \rho(\bar{r}')\,G(\bar{r}',\bar{r})\,dV' =$$

$$= \iiint_{V'} \lambda\,\delta(\rho'-\tfrac{R}{2})\,\delta(z'-H)\,G(\bar{r}',\bar{r})\;\rho'\,d\rho'\,d\varphi'\,dz'$$

la presencia de las δ convierten todas las $\rho'\rightarrow\frac{R}{2}$, $z'\rightarrow H$

$G(\bar{r}',\bar{r}) \rightarrow \left.G(\bar{r}',\bar{r})\right|_{\substack{\rho'=\frac{R}{2}\\ z'=H}}$ se hace una constante

$$= \left.G(\bar{r}',\bar{r})\right|_{\substack{\rho'=\frac{R}{2}\\ z'=H}}\cdot\int_0^{2\pi}\lambda\,\underset{R/2}{\underset{\uparrow}{\rho'}}\,d\varphi = \left.G(\bar{r}',\bar{r})\right|_{\substack{\rho'=R/2\\ z'=H}}\cdot\lambda\cdot\frac{R}{2}\cdot 2\pi$$

esta r' no es la r' de las coord esféricas (r,θ,φ) sino la r' como vector de posición

para particularizar $\left.G(\bar{r}',\bar{r})\right|_{\substack{\rho'=R/2\\ z'=H}}$ lo que se ve afectado es la r' que se limita al anillo, convirtiendo

$(r')^2 = (\rho')^2+(z')^2 = \frac{R^2}{4}+H^2$ y ademas $\cos\theta' = \frac{H}{r'} = \frac{H}{[H^2+\frac{R^2}{4}]^{1/2}}$

$r'\cos\theta' = H$

$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[H^2+\frac{R^2}{4}+z^2-2zH]^{1/2}} - \frac{R/2}{[H^2+\frac{R^2}{4}+(\frac{R^2}{z})^2-2\frac{R^2}{z}H]^{1/2}}\right]$$

en cuanto a I_2

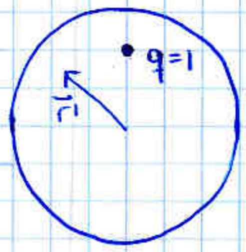
$$I_2 = -\varepsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} V_0 \frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'} (\overset{R}{\overset{\shortparallel}{r'}})^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\varphi' = \dots$$

$$= \frac{V_0 (R^2 - z^2)}{2z}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2-z^2}} - \frac{1}{R-z}\right]$$

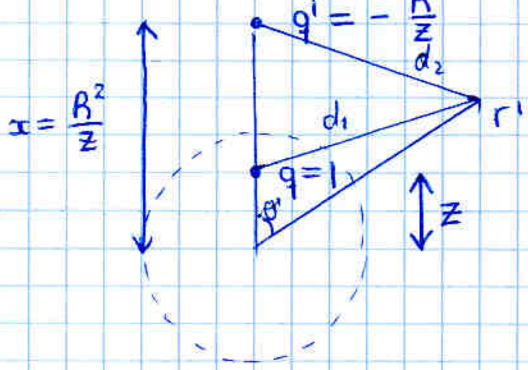
$$\varnothing(\bar{r}) = I_1 + I_2$$

dentro de la esfera

Problema de Green



por imagenes



$$d_1 = \left[(r')^2 + z^2 - 2r'z\cos\theta'\right]^{1/2}$$

$$d_2 = \left[(r')^2 + \frac{R^4}{z^2} - 2r'\frac{R^2}{z}\cos\theta'\right]^{1/2}$$

$$G(\bar{r}',\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[(r')^2+z^2-2r'z\cos\theta']^{1/2}} - \frac{R/z}{[(r')^2+\frac{R^4}{z^2}-2r'\frac{R^2}{z}\cos\theta']^{1/2}}\right]$$

$$\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'} \overset{\substack{\text{sin}\\ \text{menos}}}{=} + \frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial r'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r' - z\cos\theta'}{[(r')^2+z^2-2zr\cos\theta']^{3/2}} - \frac{R/z\,[r' - \frac{R^2}{z}\cos\theta']}{[(r')^2 + (\frac{R^2}{z})^2 - 2\frac{R^2}{z}r'\cos\theta]^{3/2}}\right.$$

$$\left.\frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'}\right|_{s'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R - z^2/R}{[R^2+z^2-2Rz\cos\theta']^{3/2}}$$

↖ son expresiones típicas que deben ir sonándote

ya podemos calcular el potencial como

$$\varnothing(\bar{r}) = \iiint_{V'} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\rho(\bar{r}')}}\, G(\bar{r}';\bar{r}) - \varepsilon_0 \oint_{S'} \varnothing(\bar{r}')\frac{\partial G(\bar{r}';\bar{r})}{\partial n'} ds'$$

$$= -\varepsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V \frac{\partial G(\bar{r}',\bar{r})}{\partial n'} (\underset{R}{\underset{\shortparallel}{r'}})^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$= + \cancel{\varepsilon_0} V R^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{2}\cancel{4}\pi\cancel{\varepsilon_0}}(R - z^2/R)\frac{2\pi}{2z\cancel{R}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2zR\operatorname{sen}\theta' d\theta'}{[R^2+z^2-2zR\cos\theta']^{3/2}}$$

$$= \frac{V(R^2-z^2)}{4z}\left[\frac{2}{[R^2+z^2-2zR\cos\theta']^{1/2}}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{V(R^2 - z^2)}{4z}\left[\frac{2}{[R^2+z^2]^{1/2}} - \frac{2}{[R^2+z^2-2zR]^{1/2}}\right]$$

$$\emptyset(\bar{r}) = \frac{V(R^2-z^2)}{2z}\left[\frac{1}{[R^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[R^2+z^2-2zR]^{1/2}}\right]$$

TEMA 5. MAGNETOSTATICA EN EL VACIO

5.1. Corrientes estacionarias

5.1.1 Densidad de corriente

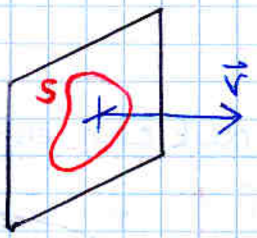
Intensidad de corriente: $I = \frac{dQ}{dt}$ (A)

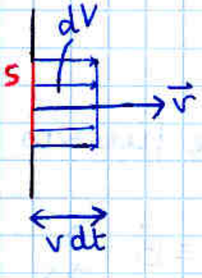
Consideramos volumen de partículas en movimiento:

q_e – carga de la partícula

N – (nº partículas/m^3)

$\vec{v}$ – velocidad



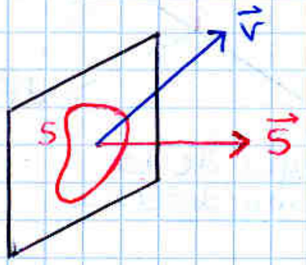


$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{q_e\cdot N\cdot dV}{dt}=\underbrace{q_e\cdot N}_{\rho}\cdot S\cdot v$$

ρ densidad volumetrica de carga

$dV = S\cdot v dt$

$$I=\rho\cdot v\cdot S$$



$$I=\rho\vec{v}\cdot\vec{S}$$

$$dI=\rho\vec{v}\cdot\vec{dS}$$

Densidad superficial de corriente $\boxed{\vec{J}=\rho\vec{v}}$ (A/m^2)

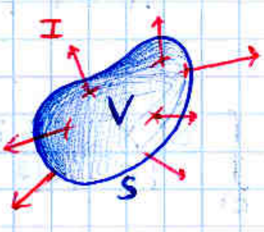
$$dI=\vec{J}\cdot\vec{dS}$$

$$\boxed{I=\iint_{S'}\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{dS}'}$$

notación: primamos las corrientes que nos crean campos magnéticos

5.1.2 Ecuación de continuidad

$$I=-\frac{dQ}{dt}$$
$$=-\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV$$
$$=\iiint_V -\frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV$$



$$I=\oint\!\!\oint_S dI$$
$$=\oint\!\!\oint_S \vec{J}\cdot\vec{dS}$$
$$\overset{T^a\,div}{=}\iiint_V \nabla\cdot\vec{J}\, dV$$

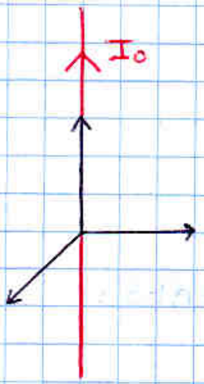
$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

magnetostática $\nabla\cdot\vec{J}=0$ → no hay fuentes ni sumideros

⇓

J ≡ vector senoidal

5.1.3 Densidad generalizada de corriente



$$\boxed{\vec{J}(\vec{r}') = I_0 \, \delta(x') \, \delta(y') \, \hat{z}}$$

se cumple

$$I = \iint_{\boxed{S\infty}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{dS}'$$

superficie infinita ¡no volumen!

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_0 \, \delta(x') \, \delta(y') \, \hat{z} \cdot dx'dy' \, \hat{z}$$

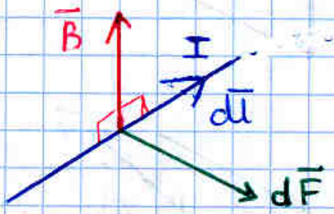
$$= I_0$$

5.2 Campo Magnético

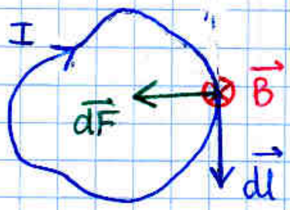
Ampere observó la existencia de fuerzas magnéticas entre circuitos de corriente.

Campo de Inducción Magnético $\equiv \vec{B}$

(Intensidad de campo magnético $\equiv \vec{H}$)



Ley experimental

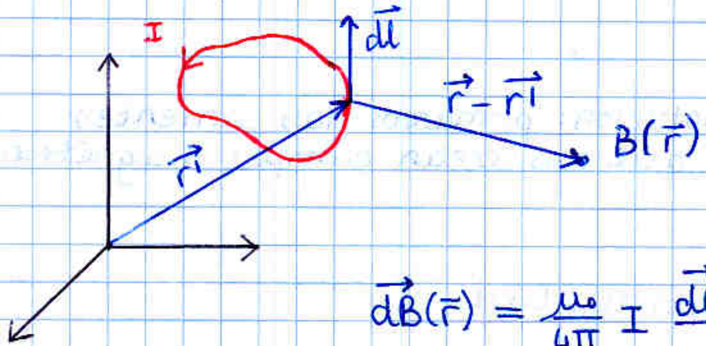


$$\boxed{d\vec{F} = I \, \vec{dl} \times \vec{B}}$$

Regla de la mano derecha

Ley de Biot y Savart

Da el campo $\vec{B}$ creado por un circuito de corriente



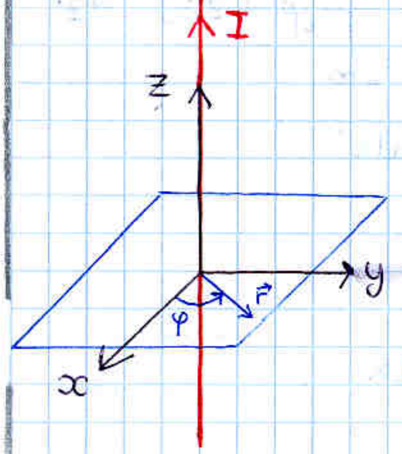
μ_0 = permeabilidad magnética en el vacío

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ N/A^2$

$$\vec{dB}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\boxed{B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{C'} \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

Problema 1. Calcule el campo de inducción magnética $\vec{B}$ creado por el hilo infinito de la figura en todo punto del espacio



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{C'} \frac{\vec{dl'} \times (\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

$$\vec{dl'} = dz' \, \hat{z}$$

$$\vec{r'} = \rho' \underset{\uparrow}{\hat{\rho}'} + z' \hat{z}$$

NOTA: aunque en este problema no afecta, para ir acostumbrando he usado $\hat{\rho}'$ y no $\hat{\rho}$ puesto que $\hat{\rho}$ es un vector unitario que no es cte, varía según φ. [$\hat{\rho} = \cos\varphi \, \hat{x} + \text{sen}\, \varphi \, \hat{y}$] Por tanto $\hat{\rho}'$ contiene info de φ' mientras que $\hat{\rho}$ contiene info de φ

Esto no hace falta con $\hat{z}$, $\hat{y}$ ni $\hat{x}$ puesto que son constantes

Primer paso:
obtener
dl'
y
$(\vec{r}-\vec{r'})$

$$\vec{r'} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\rho'} \hat{\rho}' + z' \hat{z}$$

$$\vec{r'} = z' \hat{z}$$

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

TRUCO: como el hilo es ∞, lo calculamos $\vec{B}$ en $z=0$ y sirve $\forall z$

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} \qquad \vec{r'} = z' \hat{z}$$

$$\vec{r} - \vec{r'} = \rho \hat{\rho} - z' \hat{z}$$

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = [\rho^2 + (z')^2]^{1/2}$$

Segundo paso: hacer el producto vectorial

$$\vec{dl'} \times (\vec{r}-\vec{r'}) = (dz' \hat{z}) \times (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z})$$

$$= dz' \rho (\hat{z} \times \hat{\rho}) - dz z' \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(\hat{z} \times \hat{z})}$$

$$= dz' \rho \; \hat{\varphi}$$

NOTA: en productos vectoriales IMPORTA el orden

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

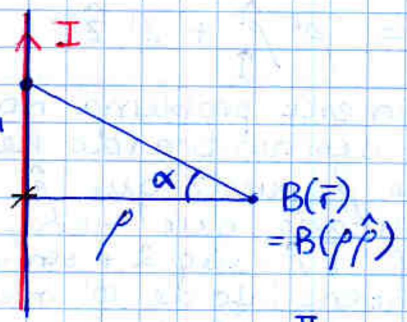
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	$\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$	$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$
$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$	$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$	$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$
$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$	$\hat{\varphi} \times \hat{\rho} = -\hat{z}$	$\hat{\varphi} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$
$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$		

Se comprueba fácilmente con mano derecha tercer paso: calcular la integral

$$B(\bar r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{C'} \frac{\overline{dl'} \times (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{C'} \frac{\rho\,\hat\varphi}{[\rho^2 + z'^2]^{3/2}}\, dz' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \rho\, \hat\varphi \int_{-\infty}^{\infty} [\rho^2+z'^2]^{-3/2}\, dz'$$

$$= \frac{\mu_0 I \rho\, \hat\varphi}{4\pi}\left[[\rho^2+z'^2]^{-1/2}\cdot 2 \ \ldots \right.$$ así no sale



C.V.

$$z' = \rho\, tg\, \alpha$$

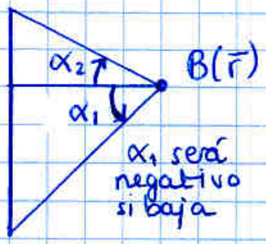
$$dz' = \frac{\rho}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I \rho\, \hat\varphi}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{[\rho^2+\rho^2\, tg^2\alpha]^{3/2}}\, \frac{\rho}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

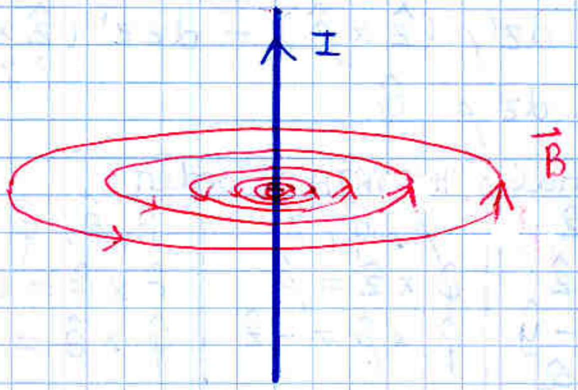
$$= \frac{\mu_0 I\, \hat\varphi}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2/\cos^2\alpha}{[\rho^2/\cos^2\alpha]^{3/2}}\, d\alpha = \frac{\mu_0 I\, \hat\varphi}{\rho\, 4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha$$

$$B(\bar r) = \frac{\mu_0 I\, \hat\varphi}{4\pi\rho}\, \text{sen}\, \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\, \hat\varphi$$

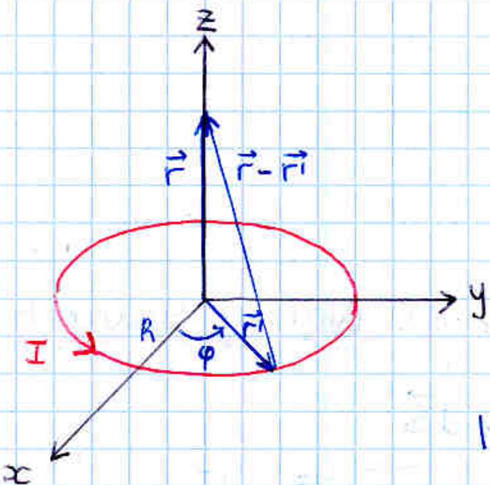
Ley general para un hilo finito o infinito



$$\boxed{B(\bar r) = \frac{\mu_0 I\, \hat\varphi}{4\pi\rho}\, \text{sen}\, \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}$$



Problema 2. Calcular $B(\vec{r})$ en eje z creado por la espira circular de la figura.



Primer paso: $\underline{\overline{dl'} \text{ y } \vec{r}-\vec{r'}}$

$\overline{dl}' = \rho' \, d\varphi' \, \hat{\varphi}' = R \, d\varphi' \, \hat{\varphi}'$

$\vec{r} = z \hat{z}$

$\vec{r'} = \rho' \hat{\rho}' = R \hat{\rho}'$

$\vec{r}-\vec{r'} = z\hat{z} - R\hat{\rho}'$

$|\vec{r}-\vec{r'}| = [R^2 + z^2]^{1/2}$

segundo paso: hacer el producto vectorial

$$\underline{\overline{dl}' \times (\vec{r}-\vec{r'})} = (R \, d\varphi' \, \hat{\varphi}') \times (z\hat{z} - R\hat{\rho}')$$
$$= (R \, d\varphi' z (\hat{\varphi}' \times \hat{z}) - R \, d\varphi' R \, (\hat{\varphi}' \times \hat{\rho}')$$
$$= R \, d\varphi' \, z \, \hat{\rho} - R \, d\varphi' R \, (-\hat{z})$$
$$= R z \, d\varphi' \, \hat{\rho} + R^2 \, d\varphi' \, \hat{z}$$

Tercer paso: hacer la integral

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{C'} \frac{\overline{dl}' \times (\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\varphi=0}^{\varphi'=2\pi} \frac{Rz\hat{\rho} + R^2\hat{z}}{[R^2+z^2]^{3/2}} \, d\varphi'$$

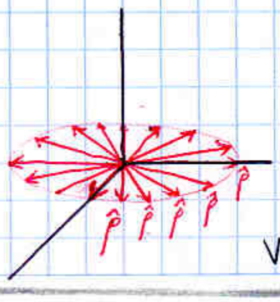
Vemos que cada dB tiene componentes $\hat{\rho}$ y $\hat{z}$. Podemos razonar, que por la simetría del problema, las componentes $\hat{\rho}$ de todos los dB se anularán

otra forma sería hacer la integral, y la componente en $\hat{\rho}$ daría cero:

$$\int_0^{2\pi} (\hat{\rho}) \, d\varphi' = \int_0^{2\pi} [\cos\varphi' \, \hat{x} + \text{sen}\,\varphi' \, \hat{y}] \, d\varphi'$$
$$= \hat{x} \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \, d\varphi' + \hat{y} \int_0^{2\pi} \text{sen}\,\varphi' \, d\varphi'$$
$$= 0$$

Gráficamente, si sumamos todos los $\hat{\rho}$ claramente se anulan.

Por tanto, en la integral, quitamos la componente en $\hat{\rho}$ para ahorrarnos trabajo (si la dejáramos se anularía igualmente)

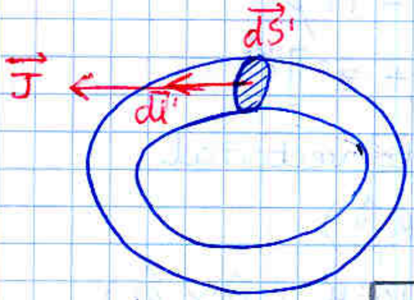


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2\,\hat{z}}{\underbrace{[R^2+z^2]^{3/2}}_{\text{no depende de }\varphi}}\, d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi[R^2+z^2]^{3/2}}\,\hat{z}\int_0^{2\pi} d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2+z^2]^{3/2}}\,\hat{z}$$

5.2.2. Generalización de la ley de Biot y Savart



$$I = \iint_{S'} \vec{J}\cdot\vec{dS}$$

NOTA: $\vec{J}$ y $\vec{dl}$ siempre llevan misma dirección

por tanto:

"Ley no Oficial"

$$\oint_{L'} I\,\vec{dl'} \equiv \iiint_{V'} \vec{J}\, dV \searrow \vec{J} = I\,\delta(\,)\,\delta(\,)$$

circuitos de corriente — generalizada

Dem:

$$\oint_{L'} I\,\vec{dl'}$$ sustit. expresión de I

$$= \underbrace{\oint_{L'}\Big(\iint_{S'}}_{V'} \vec{J}\cdot\underbrace{\vec{dS}\Big)\,\vec{dl}}_{dV}$$

$$= \iiint_{V'} \vec{J}\, dV$$

Por tanto, la Ley de Biot y Savart para circuitos de corriente se convierte en:

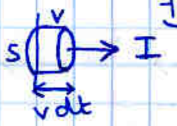
$$\boxed{B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\, dV'}$$

5.3 Fuerzas Magnéticas

Actuan sobre cargas en movimiento

- Fuerza sobre carga puntual en movimiento

sabiendo $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{q_e \cdot N \cdot S \cdot \; vdt}{dt} = \underbrace{q_e \cdot N}_{\rho} \cdot S' \cdot v$



y por la ley experimental

$d\vec{F} = \vec{I} dl \times \vec{B}$

sustituyendo I

$= \rho \cdot S' \cdot \vec{v} \; dl' \times \vec{B} = \overbrace{\rho \cdot \underbrace{S' dl'}_{dV'}}^{dq} \vec{v} \times \vec{B}$

$dF = dq \; \vec{v} \times \vec{B}$

se obtiene:

$$\boxed{\vec{F}_q = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

- Fuerza sobre una distribución arbitraria de corriente

tambien partiendo de

$$d\vec{F} = I \, d\vec{l}' \times \vec{B} = \left[\iint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S}' \right] d\vec{l}' \times \vec{B} = \iint_{S'} \underbrace{(d\vec{l}' \cdot d\vec{S}')}_{dV'} (\vec{J} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = \oint_{C'} d\vec{F} = \oint_{C'} \iint_{S'} dV' \, (\vec{J} \times \vec{B})$$

$$\boxed{\vec{F} = \iiint_{V'} \vec{J} \times \vec{B} \; dv}$$

o, en un caso mas simple, para un hilo de corriente

$$d\vec{F} = I \, d\vec{l}' \times \vec{B} \rightarrow \vec{F} = \oint_{C'} d\vec{F} = \oint_{C'} I \, dl' \times \vec{B}$$

Asi que estas son las expresiones para las fuerzas magnéticas

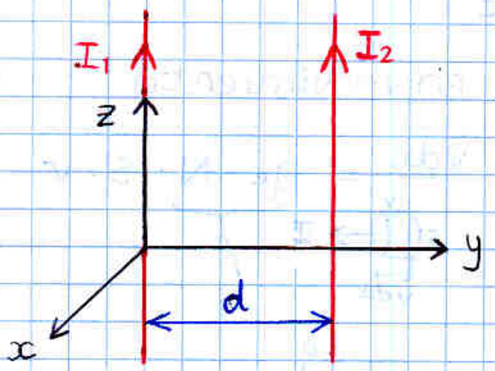
$d\vec{F} = I \, d\vec{l} \times \vec{B}$ experimental

→ $\vec{F} = \oint_{C'} I \, d\vec{l} \times \vec{B}$ hilo de corriente

→ $\vec{F} = q \, \vec{v} \times \vec{B}$ carga puntual

→ $\vec{F} = \iiint_{V'} \vec{J} \times \vec{B} \, dv'$ generalizada

Problema 3. Calcular la $\bar F$ por unidad de longitud que se ejerce entre 2 hilos infinitos, paralelos y separados una distancia d.



$\vec F_{1\to2}$ ≡ fuerza del hilo ① ejercida sobre el hilo ② (por unidad de longitud)

$$\vec B_1(\vec r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat\varphi$$

particularizando en el hilo 2

$$\varphi = \pi/2 \to \hat\varphi = -\hat x$$
$$\rho = d$$

$$\vec B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat x)$$

$$\vec F_{1\to2} = \int_0^1 I_2\, d\vec l' \times \vec B_1 = \int_0^1 I_2\, dz'\,\hat z \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right)\hat x$$

$$= \int_0^1 I_2\left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right) dz'\,\hat y$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\hat y$$

similarmente $\bar F_{2\to1} = -\bar F_{1\to2}$

$\boxed{\text{Corrientes mismo sentido: SE ATRAEN}}$

5.4. Potencial vector

partiendo de

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\bar J(\bar r')\times(\bar r-\bar r')}{|\bar r-\bar r'|^3}dV'$$

y utilizando

$$\nabla\left(\frac{1}{|\bar r-\bar r'|}\right) = -\frac{\bar r-\bar r'}{|\bar r-\bar r'|^3}$$

y alguna identidad vectorial $\nabla\times(f\vec C)$

se llega a:

$$\bar B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\times\left[\frac{\bar J(\bar r)}{|\bar r-\bar r'|}\right]dV' = \nabla\times\underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\bar J(\bar r)}{|\bar r-\bar r'|}dV'\right]}_{\bar A}$$

derivada respecto a coordenadas no primadas (donde se calcula el campo)

volumen de coordenadas primadas (el que genera el campo)

$$\boxed{\begin{gathered}\vec B = \nabla\times\vec A\\ \vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{J(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}dV'\end{gathered}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{I\,d\vec l}{|\bar r-\bar r'|}$$

para hilos de corriente

es como el potencial electrostatico pero en vector

$\phi \longleftrightarrow \vec A$

$E = -\nabla\phi \longleftrightarrow \vec B = \nabla\times\vec A$

$\vec A$ no es único

sabiendo que $\nabla\times cte = 0$

y $\nabla\times\nabla f = 0$

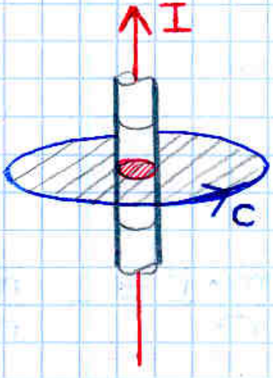
se deduce que $\vec B = \nabla\times\vec A$ tambien lo cumplen cualquier

$$\vec A_1 = \vec A + cte$$
$$\vec A_2 = \vec A + \nabla f$$

5. 5 Ley de Ampere

en forma diferencial: $$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

forma integral



$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I}$$

I → intensidad que atraviesa cualquier superficie S limitada por C
(intensidad en la direcc. dada por mano dcha.)

La utilidad es cuando encontramos una curva C adecuada:

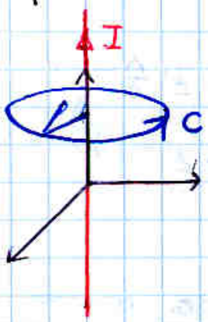
- $\vec{B}$ sea // ó $\perp$ a todo $\vec{dl}$
- Dónde $\vec{B}$ sea // a $\vec{dl}$, que ademas sea constante

de esa forma $$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partes donde} \\ B \perp dl}}{0} + \underbrace{\int_{C_2} B\,dl}_{\substack{\text{partes} \\ \text{donde } B // dl \\ \text{y ademas } B \text{ cte}}} = B \underbrace{\int_{C_2} dl}_{\substack{L \\ \text{longitud} \\ \text{total de los} \\ \text{tramos de C} \\ \text{donde } B//dl}}$$

si se cumple todo ello despejamos B

$$\rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{L}}$$

ejemplo:



se puede saber que $\vec{B} = |B|\cdot\hat{\varphi}$
y que $\vec{B} = \vec{B}(\rho)$ depende de ρ

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \left\{\begin{matrix} \vec{B} = B\cdot\hat{\varphi} \\ \vec{dl} = \rho\, d\varphi\, \hat{\varphi} \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} B\hat{\varphi}\cdot\rho\, d\varphi\, \hat{\varphi}$$

$$= \int_0^{2\pi} B\rho\, d\varphi = B\rho\, 2\pi$$

aplicando la Ley de Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \begin{cases} \mu_0 I \\ B\cdot 2\pi\rho \end{cases} \Rightarrow B\, 2\pi\rho = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{\underset{\text{es la longitud de C}}{\boxed{2\pi\rho}}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\hat{\varphi}$$

5.6 Campos lejanos de una distribución de corriente

Partiendo de la expresión de $\vec{A}$, y desarrollando $\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$ en serie de Taylor
se llega a:

$$\boxed{\vec{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{m}\times\vec{r}}$$

$\vec{m}$ ≡ momento dipolar magnético

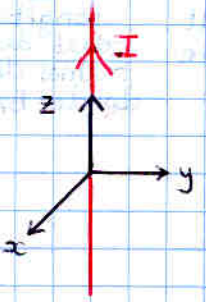
$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \bar{r}' \times \bar{J}(\bar{r}')\,dV'}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \longrightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,\bar{m}\cdot\bar{r}}{r^5}\,\bar{r} - \frac{\bar{m}}{r^3}\right]}$$

5.7. Energía magnetostática

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2}\iiint_{\underset{\text{corrientes}}{V'}} \vec{J}\cdot\vec{A}\,dV' = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_{\underset{\text{todo el espacio}}{V\infty}} \vec{B}\cdot\vec{B}\,dV}$$

Problema 4. Campo magnético creado por un hilo utilizando el potencial vector



$$\boxed{\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,dV' \overset{\text{regla no oficial}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \frac{I\,\overline{dl}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}$$

$J = \delta(x)\,\delta(y)\,I$

$$\overline{dl}' = dz'\,\hat{z}$$

$\bar{r} = \rho\hat{\rho}$ (cogemos $z=0$)

$\bar{r}' = z'\hat{z}$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \quad \bar{r}-\bar{r}' = \rho\hat{\rho} - z'\hat{z} \qquad |\bar{r}-\bar{r}'| = [\rho^2 + z'^2]^{1/2}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[\rho^2+z'^2]^{1/2}}\,\hat{z}$$

$$\boxed{\text{NOTA: } \int_{-a}^{a} \frac{dz'}{[\rho^2+(z')^2]^{1/2}} = 2\ln\left[\frac{a}{\rho} + \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2}+1}\right]}$$

como $a \to \infty$ $\sqrt{\frac{a^2}{\rho^2}+1} \simeq \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2}} = \frac{a}{\rho}$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,2\ln\left[2\frac{a}{\rho}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\hat{z}\left[2\ln(2a) - 2\ln\rho\right]$$

$$= cte_\infty - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho\,\hat{z}$$

tomamos: $\boxed{\bar{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho\,\hat{z}}$

$$\bar{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\rho \ \hat{z}\right)$$

hay que miras como era el producto vectorial en cilíndricas

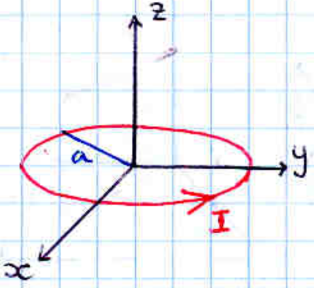
$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \cancel{A_z}}{\partial \cancel{\varphi}} - \frac{\partial \cancel{A_\varphi}}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial \cancel{A_\rho}}{\partial z} - \boxed{\frac{\partial A_z}{\partial \rho}}\right)\hat{\varphi} + \left(\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cancel{A_\varphi}) - \frac{\partial \cancel{A_\rho}}{\partial \varphi}\right]\hat{z}\right)$$

ya que en este caso $\bar{A} = A(\rho)\,\hat{z}$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\hat{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho\right]\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

Problema 5. Dada una espira de radio a contenida en el plano XY y centrada en el origen

a) Exprésese, mediante una integral simple, el potencial vector en todo el espacio.



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\overline{dl}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

$$\overline{dl}' = \rho' d\varphi' \hat{\varphi} = a\, d\varphi' \hat{\varphi}'$$

$$\bar{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$\bar{r}' = a\hat{\rho}'$$

CUIDADO! Estaría mal $\bar{r}-\bar{r}' = (\rho - a)\hat{\rho} + \hat{z}$ $\qquad \hat{\rho} \neq \hat{\rho}'$

$$\vec{r}-\vec{r}' = \rho\hat{\rho} - a\hat{\rho}' + z\hat{z}$$

para no liarse: $= \rho(\cos\varphi\hat{x} + \text{sen}\varphi\hat{y}) - a(\cos\varphi'\hat{x} + \text{sen}\varphi'\hat{y}) + z\hat{z}$

$= (\rho\cos\varphi - a\cos\varphi')\hat{x} + (\rho\,\text{sen}\varphi - a\,\text{sen}\varphi')\hat{y} + z\hat{z}$

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \left[\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho\cos(\varphi' - \varphi)\right]^{1/2}$$

$$A = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{d\varphi'}{[\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho\cos(\varphi'-\varphi)]^{1/2}}\ \hat{\varphi}$$

b) valor aproximado de $\bar{A}$ cuando $r \gg a$

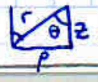
$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\bar{m}\times\bar{r} \qquad \bar{m} = \frac{1}{2}\iiint_{V'}\bar{r}' \times \bar{J}(\bar{r}')\,dV'$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{C'}\vec{r}' \times I\overline{dl}' = \left\{\begin{matrix}\overline{dl}' = a\,d\varphi'\,\hat{\varphi}' \\ \bar{r}' = a\hat{\rho}'\end{matrix}\right\}$$

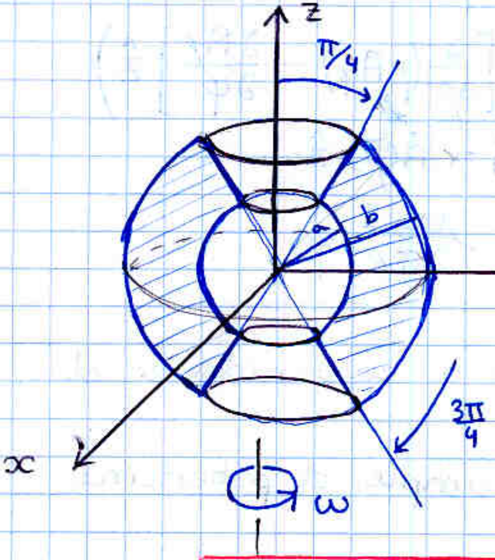
$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} a\hat{\rho}' \times Ia\,d\varphi'\,\hat{\varphi}' = \frac{I}{2}\int_0^{2\pi} a^2 d\varphi' \ (\hat{z})$$

$\boxed{\bar{m} = I\pi a^2 \ (\hat{z}) \quad \text{momento dipolar de espira}}$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}(\pi a^2\hat{z})\times(\rho\hat{\rho} + z\hat{z}) = \frac{\mu_0 \rho\pi a^2 I}{4\pi r^3}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 a^2 \rho I}{4\ r^3}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 a^2 I}{4r^2}\text{sen}\theta\hat{\varphi}$$

$\frac{\rho}{r} =$  $= \text{sen}\theta$ $\sqrt{V-6}$

Problema 8. Una distribución volumétrica de carga cuya densidad es $\rho = 2(\rho_0/r^2)\,\text{sen}\,\theta$ C/m³ se halla confinada en el volumen $a \leq r \leq b$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y gira en torno al eje $\theta = 0$ con ω rad/s



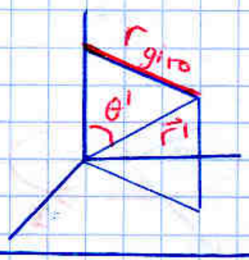
a) Expresar mediante integral doble el campo $\vec{B}$ en el eje z.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV'$$

1. Calcular $\vec{J}(\vec{r}\,')$
2. $\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')$
3. Integrar lo que podamos

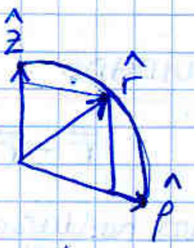
Paso 1. $\boxed{\vec{J}(\vec{r}\,') = \rho\cdot\vec{v}}$

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_v$$
$$= \omega\cdot r_{giro}\,\hat{\varphi}'$$
$$= \omega\, r'\,\text{sen}\,\theta'\,\hat{\varphi}'$$



$$\vec{J}(\vec{r}\,') = \rho\cdot\omega\cdot r'\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\varphi}'$$
$$= \frac{2\rho_0}{(r')^2}\,\text{sen}\,\theta'\cdot\omega\cdot r'\,\text{sen}\,\theta'\,\hat{\varphi}'$$
$$\vec{J}(\vec{r}\,') = \frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\text{sen}^2\theta'\,\hat{\varphi}'$$

Paso 2.
$$\vec{r} = z\,\hat{z}$$
$$\vec{r}\,' = r'\,\hat{r} = r'\left[\cos\theta'\,\hat{z} + \text{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}\right]$$



$$\vec{r}-\vec{r}\,' = (z - r'\cos\theta')\,\hat{z} - r'\,\text{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}'$$
$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[(z^2 - 2zr'\cos\theta' + r'^2\cos^2\theta') + (r')^2\,\text{sen}^2\theta'\right]^{1/2}$$
$$= \left[z^2 + (r')^2 - 2zr'\cos\theta'\right]^{1/2}$$

CUIDADO CON LOS SIGNOS

$$\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}\,') \overset{\downarrow}{=} \left(\frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\text{sen}^2\theta'\,\hat{\varphi}'\right)\times\left((z - r'\cos\theta')\,\hat{z} - r'\,\text{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}'\right)$$
$$= \frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\text{sen}^2\theta'(z - r'\cos\theta')\,\hat{\rho}' - \frac{2\rho_0\omega}{r'}\,\text{sen}^2\theta'\,r'\,\text{sen}\,\theta'\,(-\hat{z})$$

Paso 3.
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_a^b \frac{\frac{2\rho_0\omega\,\text{sen}^2\theta'(z - r'\cos\theta)\hat{\rho}'}{r'} + 2\rho_0\,\omega\,\text{sen}^3\theta'\,\hat{z}}{\left[z^2 + (r')^2 - 2zr'\cos\theta'\right]^{3/2}}\left((r')^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'\right)$$

si separaramos la integral en 2, sabemos que la componente en $\hat{\rho}$ se anularía (tanto por simetría del problema como por $\int_0^{2\pi}\hat{\rho}\,d\varphi = 0$

Así que nos olvidamos de ella

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{{}_2 4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_a^b \frac{2\rho_0\,\omega(r')^2\,\text{sen}^4\theta\,\hat{z}}{\left[z^2 + (r')^2 - 2zr'\cos\theta'\right]^{3/2}}\,dr'\,d\theta'\,d\varphi' \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0\,\rho_0\,\omega\,\hat{z}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_a^b \frac{(r')^2\,\text{sen}^4\theta}{\left[z^2 + (r')^2 - 2zr'\cos\theta'\right]^{3/2}}\,dr'\,d\theta'}$$

b) Hallar $\bar{B}$ en el origen de coordenadas

sustituir $z=0$ (no $z'=0$)!

$$\bar{B} = \mu_0 \rho_0 \omega \ \hat{z} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_a^b \frac{(r')^2 \operatorname{sen}^4 \theta'}{(r')^3} dr' \, d\theta'$$

$$= \mu_0 \rho_0 \omega \ \hat{z} \int_a^b \frac{1}{r'} dr' \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^4 \theta' d\theta'$$

toda la dificultad de este ejercicio está en integrar $\operatorname{sen}^4 \theta$

Integrar potencias senos, cosenos, tangentes

Recuerda: Potencias impares sen/cos $\longrightarrow$ $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$

Potencias pares sen $\longrightarrow$ $\cos 2A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$

cos $\longrightarrow$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

¿como deducir?

Recordar: las 3 mega formulas $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(a \pm b) &= \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}}$$

$$\boxed{\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1}$$

de ahi se saca

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$

$\cos^2 = 1 - \operatorname{sen}^2$

$\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2$

$\longleftarrow$ truco para recordar las 2 formulas

El seno es buena persona. al derivarse da cos al hacer sen (a±b) reparte igual su tesoro con su amigo cos

El coseno es mala persona, putea al seno. al derivarse da menos seno! al hacer cos (a±b) se pone primero él y LUEGO pone al seno RESTANDO! ¡que cabron!

Potencia cualquiera de tan $\longrightarrow$ $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

$$= \mu_0 \rho_0 \omega \ \hat{z} \ \ln \frac{b}{a} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^4 \theta' d\theta'$$

$$\cos 2\theta' = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta'$$
$$\hookrightarrow \operatorname{sen}^2\theta' = \frac{1 - \cos 2\theta'}{2}$$

$$\operatorname{sen}^4\theta' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta'}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\theta' + \frac{1}{4}\cos^2 2\theta'$$

$$\cos 2\theta' = 2\cos^2\theta' - 1$$
$$\hookrightarrow \cos^2\theta' = \frac{\cos 2\theta' + 1}{2}$$

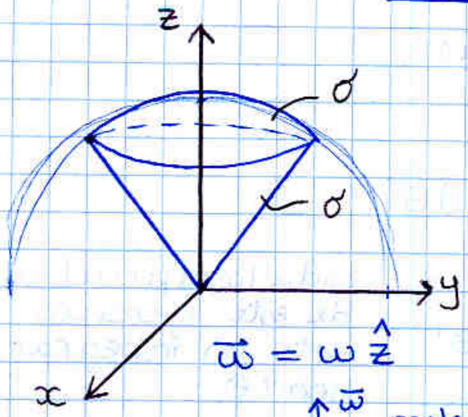
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\theta' + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\theta'$$

$$= \mu_0 \rho_0 \omega \ \hat{z} \ \ln \frac{b}{a} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\theta' + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\theta'\right) d\theta'$$

$$= \mu_0 \rho_0 \omega \ \hat{z} \ \ln \frac{b}{a} \left[\frac{\theta'}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta' + \frac{\theta'}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4\theta'\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \mu_0 \rho_0 \omega \ \ln \frac{b}{a} \left[\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}\right] \hat{z}$$

Problema 9. <u>superficie</u> definida por las ecuaciones



$$\left.\begin{matrix} r = R \\ \theta \leq \alpha \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}\right\} \text{casquete esférico} \qquad \left.\begin{matrix} 0 \leq r \leq R \\ \theta = \alpha \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}\right\} \text{superficie cónica}$$

gira alrededor del eje z

$\vec{\omega} = \omega\,\hat{z}$

a) Expresar el vector inducción magnética $\vec{B}$ en los puntos del eje z mediante integrales simples

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV'$$

$$\vec{J}(\vec{r}\,') = \rho \cdot \vec{v} \qquad \vec{v} = v \cdot \hat{\varphi}' = \omega \cdot r_{giro} \cdot \hat{\varphi}' = \omega \cdot r' \,\text{sen}\,\theta'\, \hat{\varphi}'$$

Casquete esférico

$$\left.\begin{matrix} \vec{v} = \omega \cdot R \cdot \text{sen}\,\theta'\, \hat{\varphi}' \\ \boxed{\rho = \sigma\,\delta(r'-R)} \end{matrix}\right\} \vec{J}(\vec{r}\,') = \sigma\omega R\,\text{sen}\,\theta'\,\delta(r'-R)\,\hat{\varphi}'$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{r} = z\,\hat{z} \\ \vec{r}\,' = R\,\hat{r}' \quad \text{lo pasamos a cilíndricas} \\ = R\cos\theta'\,\hat{z} + R\,\text{sen}\,\theta'\,\hat{\rho}' \end{matrix}\right\} \vec{r}-\vec{r}\,' = (z - R\cos\theta')\,\hat{z} - (R\,\text{sen}\,\theta')\,\hat{\rho}'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[z^2 - 2Rz\cos\theta' + R^2\cos^2\theta' + R^2\,\text{sen}^2\theta'\right]^{1/2} = \left[z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta'\right]^{1/2}$$

$$\vec{J} \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = \left[\sigma\omega R\,\text{sen}\,\theta'\,\delta(r'-R)\,\hat{\varphi}'\right] \times \left[(z - R\cos\theta')\,\hat{z} + (R\,\text{sen}\,\theta')\,\hat{\rho}\,\right]$$
$$= \sigma\omega R\,\text{sen}\,\theta'\,\delta(r'-R)(z - R\cos\theta')\,\hat{\rho}' - \sigma\omega R\,\text{sen}\,\theta'\,\delta(r'-R)(R\,\text{sen}\,\theta')\,(-\hat{z})$$

Al integrar $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}'\, d\varphi$ ya sabemos que la componente en $\hat{\rho}'$ se va, además por simetría que $\vec{B}$ sólo tendrá componente en $\hat{z}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\underbrace{\int_0^{\infty}}_{\text{la }\delta\text{ se encarga de esto}} \frac{\sigma\omega\, R^2\,\text{sen}^2\theta'\,\delta(r'-R)\,\hat{z}}{\left[z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta'\right]^{3/2}}\,\underbrace{(r')^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr\,d\theta\,d\varphi}_{}\,\frac{\mu_0}{4\pi}$$

la δ hace que todas las r' sean R y por tanto la integral $\int_0^\infty \delta(r'-R)$ ya sólo afecta a la δ, y el resultado es uno.

$$\vec{B}(\bar{r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \frac{\sigma\omega R^2 \operatorname{sen}^2\theta' \hat{z}}{[z^2+R^2-2Rz\cos\theta']^{3/2}} R^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta \, d\varphi \quad \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega R^4 \; \hat{z} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen}^3\theta' d\theta}{[z^2+R^2-2Rz\cos\theta']^{3/2}}$$

<u>superficie cónica</u>

$$\vec{v} = \omega \, r' \operatorname{sen}\alpha \; \hat{\varphi}'$$

$$\rho = \frac{\sigma \; \delta(\theta'-\alpha)}{\boxed{r'}} \rightarrow \text{mucho cuidado}$$

¿cómo se sacaba?
Hay que igualar

$$\iint_{S'} \sigma \, dS' = \iiint_{V\infty} \rho \, dV$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma \overbrace{r\operatorname{sen}\theta \, dr \, d\varphi}^{} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{R} \rho \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

componente $\hat{\theta}$ de $d\vec{S}$ en esféricas

ahora hay que añadir una δ adecuada

$$\int_0^{2\pi}\boxed{\int_0^{\infty}}\int_0^{R} \sigma r\operatorname{sen}\theta \boxed{\delta(\theta-\alpha)} dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{R} \rho \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

comparando ambos integrandos

$$\sigma r \; \delta(\theta-\alpha) = \rho \, r^2$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\sigma \; \delta(\theta-\alpha)}{r}$$

$$\vec{J} = \sigma\omega \operatorname{sen}\alpha \; \delta(\theta'-\alpha) \; \hat{\varphi}'$$

$$\bar{r} = z\hat{z}$$

$$\bar{r}' = r'\hat{r}'$$

$$= r'(\cos\alpha\,\hat{z} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\rho})$$

$$\bar{r}-\bar{r}' = (z - r'\cos\alpha)\hat{z} - r'\operatorname{sen}\alpha \; \hat{\rho}$$

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = [z^2+(r')^2-2zr'\cos\alpha]^{1/2}$$

$$\vec{J}\times(\bar{r}-\bar{r}') = \underbrace{(\sigma\omega\operatorname{sen}\alpha\,\delta(\theta-\alpha)[z-r'\cos\alpha])}_{\text{se irá al integrar}}\hat{\rho} \;+\; \sigma\omega\operatorname{sen}\alpha \; r'\operatorname{sen}\alpha \; \delta(\theta'-\alpha) \; \hat{z}$$

$$\bar{B}(\bar{r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{R} \frac{\sigma\omega\operatorname{sen}^2\alpha \; r' \; \delta(\theta'-\alpha) \; \hat{z}}{[z^2+(r')^2-2zr'\cos\alpha]^{3/2}} (r')^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma\omega \; \operatorname{sen}^3\alpha \; \hat{z}}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{(r')^3}{[z^2+(r')^2-2zr'\cos\alpha]^{3/2}} dr \, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma\omega \; \operatorname{sen}^3\alpha \; \hat{z}}{2} \int_0^{R} \frac{(r')^3}{[z^2+(r')^2-2zr'\cos\alpha]^{3/2}} dr$$

el campo total será la suma de ambos (principio de superposición)

b) Calcular $\overline{B}$ en el origen de coordenadas.

sustituir $z = 0$

$$\overline{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{2}\hat{z}\int_0^{\alpha}\frac{\text{sen}^3\theta'\, d\theta'}{(R^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 \sigma \omega\, \text{sen}^3\alpha}{2}\hat{z}\int_0^{R}\frac{\cancel{r'^3}}{\cancel{(r'^2)^{3/2}}_{1}}dr'$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}\hat{z}\int_0^{\alpha}\text{sen}^3\theta'\, d\theta' + \frac{\mu_0 \sigma \omega R\, \text{sen}^3\alpha}{2}\hat{z}$$

$$\text{sen}^3\theta' = \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}^2\theta$$
$$= \text{sen}\,\theta \cdot (1-\cos^2\theta)$$
$$= \text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos^2\theta$$

$$\int_0^{\alpha}\text{sen}\,\theta' - \text{sen}\,\theta'\cos^2\theta'\, d\theta'$$

$$= \left[-\cos\theta' + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\alpha}$$

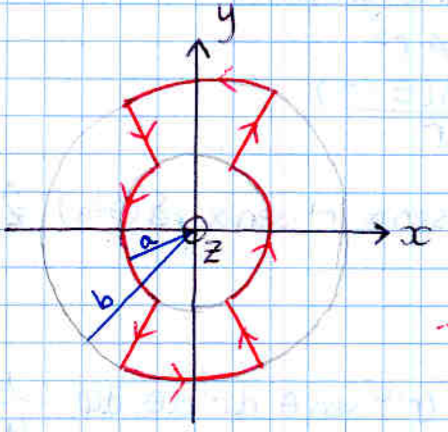
$$= \frac{\cos^3\alpha}{3} - \cos\alpha + \frac{2}{3}$$

por tanto

$$\overline{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}\hat{z}\left[\frac{\cos^3\alpha}{3} - \cos\alpha + \frac{2}{3} + \text{sen}^3\alpha\right] //$$

Problema 6. Se pide calcular $\overline{B}$ creado por la espira de la figura en el eje z

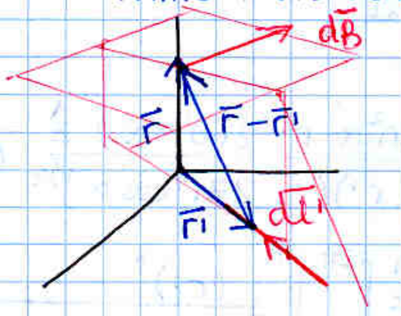
Sugerencia: calcular por separado los tramos rectos y los tramos curvos



$$\overline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{\overline{dl}' \times (\overline{r}-\overline{r}')}{|\overline{r}-\overline{r}'|^3}$$

· Tramos rectos

Primero: estudiamos simetria

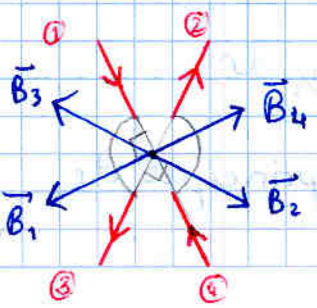


$\overline{dl}'$ y $(\overline{r}-\overline{r}')$ estan en mismo plano vertical

$$\Rightarrow\ d\overline{B} = \frac{dl \times (\overline{r}-\overline{r}')}{4\pi|\overline{r}-r'|^3}\mu_0$$

sólo tendrá comp. horizontales

Por tanto, las 4 tramos rectos

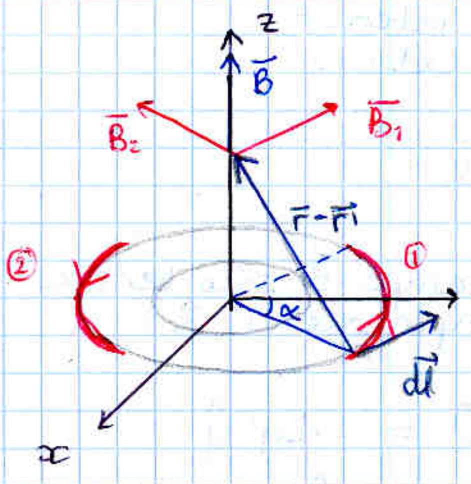


se anula la componente horizontal, y como $\overline{B}$ sólo tiene componente horizontal:

$$\overline{B} = 0$$

Anillo exterior:

estudiemos simetría:



se anulan las componentes horizontales: sólo le queda componente en $\hat{z}$

$$\overline{dl}' = b\, d\varphi'\ \hat{\varphi}'$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= z\hat{z} \\ \bar{r}' &= b\,\hat{\rho}' \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \bar{r}-\bar{r}' &= z\hat{z} - b\hat{\rho}' \\ |\bar{r}-\bar{r}'| &= [z^2+b^2]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\overline{dl}' \times (\bar{r}-\bar{r}') = b z\, d\varphi\, \hat{\rho} + b^2 d\varphi\, \hat{z}$$

como sabemos que al final se anulará, no tenemos en cuenta la componente $\hat{\rho}$

$$\vec{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{b^2\, d\varphi\ \hat{z}}{[z^2+b^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}^{\frac{3\pi}{2}+\alpha} \frac{b^2\, d\varphi\ \hat{z}}{[z^2+b^2]^{3/2}}$$

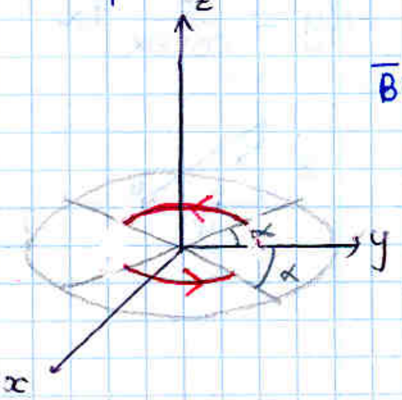
$$\cancel{= \frac{\mu_0 I b^2\ \hat{z}}{4\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d}{[z^2+b^2]}\right.}$$

$$= \frac{\mu_0 I b^2\ \hat{z}}{4\pi\, [z^2+b^2]^{3/2}} \left[\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} d\varphi}_{\alpha} + \underbrace{\int_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}^{\frac{3\pi}{2}+\alpha} d\varphi}_{\alpha} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I b^2 \alpha\ \hat{z}}{2\pi\, [z^2+b^2]^{3/2}}$$

Anillo interior:

podemos hacer exactamente lo mismo pero cambiando el radio por b y ajustando los límites de integración para que coincidan con el sentido y los ángulos

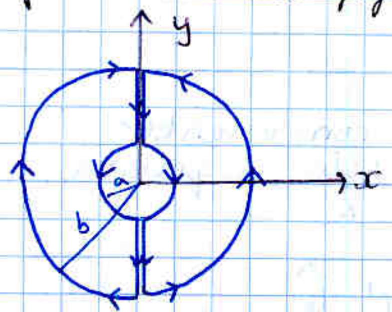


$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0 I a^2\ \hat{z}}{4\pi\, [z^2+b^2]^{3/2}} \left[\underbrace{\int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\varphi}_{\pi-2\alpha} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha} d\varphi}_{\pi-2\alpha} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2\ \hat{z}}{4\pi\, [z^2+b^2]^{3/2}} \left[2\pi - 4\alpha \right]$$

El campo total será la suma de todos los campos.

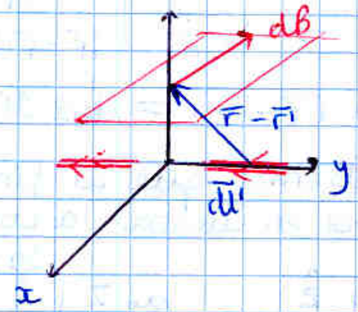
Problema 7. Calcular $\overline{B}$ en el eje z creado por las dos espiras de la figura.



Vemos 3 zonas:
- tramos rectos
- anillo interior
- anillo exterior

Tramos rectos

estudiemos simetria



el campo $\overline{B}$ sólo tendra componente $(-\hat{x})$

$$\overline{dl}' = -dy'\,\hat{y}$$

$$\begin{cases} \overline{r} = z\,\hat{z} \\ \overline{r}' = y'\,\hat{y} \end{cases}$$

$$\overline{r}-\overline{r}' = z\,\hat{z} - y'\,\hat{y}$$

$$|\overline{r}-\overline{r}'| = [z^2+y'^2]^{1/2}$$

pasamos a integrar

$$\overline{dl}' \times (\overline{r}-\overline{r}') = (-dy')\hat{y} \times (z\hat{z}-y'\hat{y})$$

$$= -z\,dy'\,\hat{x}$$

$$\overline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} \frac{\overline{dl}' \times (\overline{r}-\overline{r}')}{|\overline{r}-\overline{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} \frac{-z\,\hat{x}\,dy'}{[z^2+y'^2]^{3/2}}$$

Primer tramo:

$$\overline{B}_{1tramo} = \frac{-\mu_0 I z\,\hat{x}}{4\pi}\int_{ⓐ}^{ⓑ} \frac{dy'}{[z^2+y'^2]^{3/2}}$$

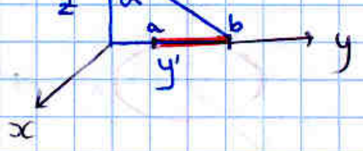
no desde b hasta a, porque ya hemos considerado $\overline{dl}'$ negativo así que nuestra referencia era en la dirección $\hat{y}$

para tener todo con misma variable [como en Fisica]

Cambio de variable

$$y' = z\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$dy' = \frac{z}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$



$$\overrightarrow{B}_{1tramo} = -\frac{\mu_0 I z\,\hat{x}}{4\pi}\int_{\mathrm{atan}\frac{a}{z}}^{\mathrm{atan}\frac{b}{z}} \frac{z/\cos^2\alpha\;d\alpha}{[z^2+z^2\mathrm{tg}^2\alpha]^{3/2}}$$

$$= \frac{-\mu_0 I z\,\hat{x}}{4\pi}\int \frac{z/\cos^2\alpha\;d\alpha}{z^3\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{3/2}} \qquad 1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

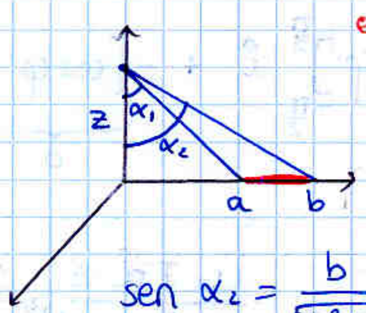
$$= -\frac{\mu_0 I z\,\hat{x}}{4\pi}\int_{\text{atan}\frac{a}{z}}^{\text{atan}\frac{b}{z}} \frac{z/\cos^2\alpha}{z^3/\cos^3\alpha}\,d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi z}\,\hat{x}\int_{\text{atan}\frac{a}{z}}^{\text{atan}\frac{b}{z}} \underset{\uparrow}{\cos\alpha}\,d\alpha$$

no confundir! es facil poner $\frac{1}{\cos}$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z}\,\hat{x}\left[\text{sen}\,\alpha\right]_{\text{atan}\frac{a}{z}=\alpha_1}^{\text{atan}\frac{b}{z}=\alpha_2}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z}\left[\text{sen}\,\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\hat{x}$$

ESTA ES LA TIPICA
EXPRESION PARA
UN HILO



$$\text{sen}\,\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

$$\text{sen}\,\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

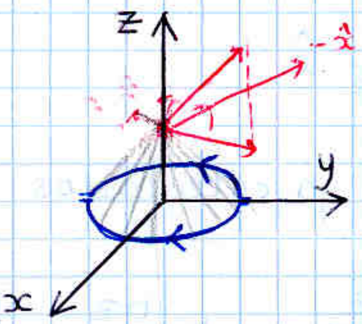
$$\overline{B}_{1\,\text{tramo}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi z}\left[\frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]\hat{x}$$

se puede ver que para los otros 3 tramos rectos será igual, así que no hay mas que multiplicar por 4

$$\overline{B}_{\substack{\text{tramos}\\\text{rectos}}} = \frac{-\mu_0 I}{\pi z}\left[\frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]\hat{x}$$

anillo interior de radio a.

estudiemos la simetria



se puede ver que la dirección de $\overline{B}$ será $-\hat{x}$

$\overline{dl'} = -a\,d\varphi'\,\hat{\varphi}'$ ó $+a\,d\varphi'\,\hat{\varphi}'$ según el tramo

$$\left.\begin{aligned}\overline{r} &= z\hat{z}\\ \overline{r'} &= a\hat{\rho}'\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\overline{r}-\overline{r'} &= z\hat{z} - a\hat{\rho}'\\ |\overline{r}-\overline{r'}| &= [z^2+a^2]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\overline{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overline{dl'}\times(\overline{r}-\overline{r'})}{|\overline{r}-\overline{r'}|^3}$$

1er tramo

$$\overline{dl'}\times(\overline{r}-\overline{r'}) = (-a\,d\varphi'\,\hat{\varphi}')\times(z\hat{z}-a\hat{\rho}') = -az\,d\varphi'\,\hat{\rho}' + a^2 d\varphi'(-\hat{z})$$

2° tramo

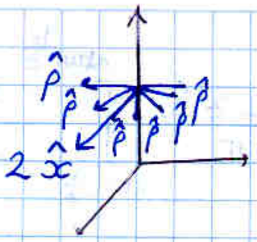
$$\overline{dl'}\times(\overline{r}-\overline{r'}) = (a\,d\varphi'\,\hat{\varphi}')\times(z\hat{z}-a\hat{\rho}') = az\,d\varphi'\,\hat{\rho}' - a^2 d\varphi'(-\hat{z})$$

la componente $\hat{z}$ se anulará un tramo con otro así que no la usamos

CUIDADO
No se puede sacar
(sería absurdo)

$$\overline{B}_{\text{tramo}_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-az\,d\varphi'}{[z^2+a^2]^{3/2}}\,\hat{\rho}' = \frac{-\mu_0 I a z}{4\pi[z^2+a^2]^{3/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{\rho}'\,d\varphi'$$

graficamente: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{\rho}' \, d\varphi'$ tiene dirección $\hat{x}$



$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi' \, \hat{x} + \text{sen}\,\varphi' \, \hat{y} \; d\varphi'$$

$$= \left[\text{sen}\,\varphi'\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{x} + \underbrace{-\left[\cos\varphi'\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{0} \hat{y}$$

$$= 2\,\hat{x}$$

$$\vec{B}_{tramo_1} = -\frac{\mu_0 I a z}{2\pi\left[z^2+a^2\right]^{3/2}} \hat{x}$$

el $\vec{dl}$ va en la otra dirección

$$\vec{B}_{tramo_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\boxed{+}\, a z \, d\varphi'}{\left[z^2+a^2\right]^{3/2}} \hat{\rho}'$$

Los limites cambian

se compensan ambos cambios, el resultado es el mismo.

$$\vec{B}_{\substack{anillo \\ interior}} = -\frac{\mu_0 I a z}{\pi\left[z^2+a^2\right]^{3/2}} \hat{x}$$

anillo exterior de radio b

se puede seguir paso a paso el proceso anterior cambiando el radio a por el b y cambiando de signo los $\vec{dl}$ de ambos tramos.

el resultado es $\vec{B}_{\substack{anillo \\ exterior}} = \frac{\mu_0 I b z}{\pi\left[z^2+a^2\right]^{3/2}} \hat{x}$

El campo total será la suma de los 3 ya calculados (principio de superposición)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left[\underbrace{\frac{a}{z\left[a^2+z^2\right]^{1/2}} - \frac{b}{z\left[b^2+z^2\right]^{1/2}}}_{\text{tramos rectos}} \underbrace{- \frac{a z}{\left[z^2+a^2\right]^{3/2}}}_{\substack{\text{anillo} \\ \text{interior}}} \underbrace{+ \frac{b z}{\left[z^2+a^2\right]^{3/2}}}_{\substack{\text{anillo} \\ \text{exterior}}} \right] \hat{x}$$