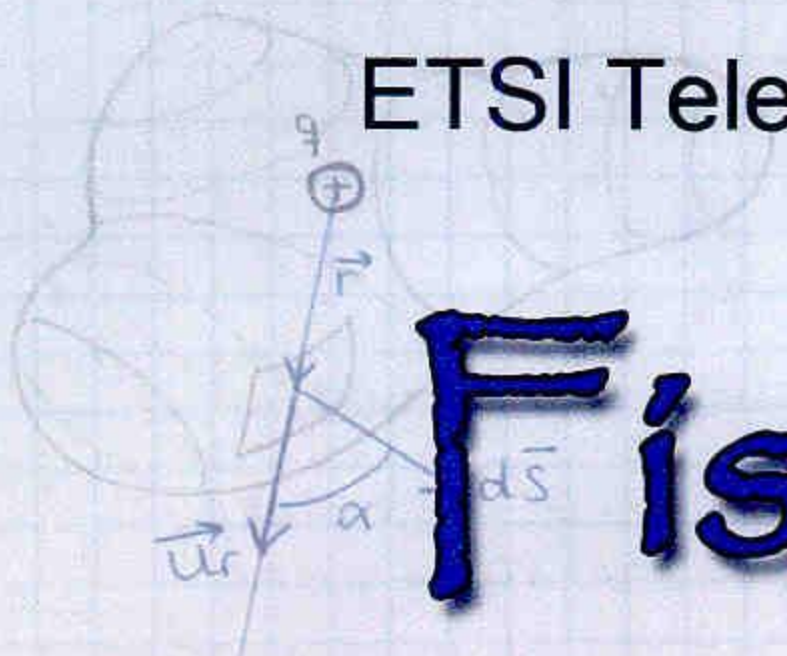
ETSI Telecomunicación

Física I

## Flujo a través de una superficie cerrada

Flujo del campo eléctrico a través de la superficie cerrada

$$\Phi_{sc} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$




$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} (\vec{u}_r \cdot d\vec{S})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos\alpha$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \boxed{\frac{dS\cos\alpha}{r^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi_{s.c.} = \int_{s.c.} d\Phi = \int_{s.c.} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{s.c.} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi$$

$$\boxed{\Phi_{s.c.} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$ ← Teorema de Gauss: el flujo de una superficie cerrada sólo depende de la carga encerrada

si la carga está fuera,
$\Phi_{s.c.} = 0$.
se cancela el campo que entra con el campo que sale.

### TEOREMA DE GAUSS

$$\Phi_{s.c.} \equiv \iint_{s.c.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

### Utilidad del T. de Gauss

Si se toman superficies cerradas en las cuales el campo es constante y paralelo a dS

$$\vec{E} \parallel d\vec{S} \Longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = |E||dS|$$

$$\iint_{s.c.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{s.c.} E\,dS \overset{\text{(si E cte)}}{=} E \iint_{s.c.} dS = \underbrace{\boxed{E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}}_{|E| \text{ cte en todo } S,\ \vec{E} \parallel d\vec{S} \text{ en todo } S}$$

Apuntes de Pak

**Física I**

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 1$^{er}$ curso
Curso 2003/2004

**Contenido**

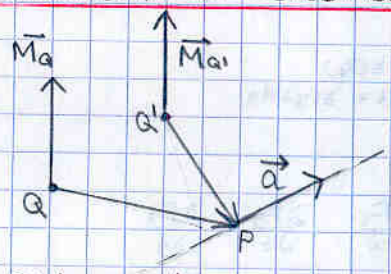
- Formulario
- Apuntes de la asignatura.

**Fecha de última actualización:** 26 Agosto 2007

# FORMULAS DE FISICA 1

Cosenos directores: $\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$

## Momento de vector deslizante:




$$\vec{M}_Q(\vec{a}) = \vec{QP} \times \vec{a}$$

$$\vec{M}_{Q'}(\vec{a}) = \underbrace{(\vec{Q'Q} \times \vec{a})}_{\vec{Q'Q} \parallel \vec{a} \to 0} + \vec{M}_Q$$

Sistema de vectores deslizantes:

vector resultante $\vec{R} = \sum \vec{a}_i$

momento resultante $\vec{M}_O = \sum \vec{OA}_i \times \vec{a}_i$

$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + (\vec{QO} \times \vec{R})$

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R}$

## Triedro Intrínseco:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(dt)}{dx}\vec{j} + \frac{dz(dt)}{dx}\vec{k}$$

$$\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

ojo con orden. Imaginate que la derivada va avanzando

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|dr/dt|} = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\vec{T}/dt}{d\vec{r}/dt}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

si $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq cte$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\quad\right|} \qquad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

## Fórmulas matemáticas:

línea recta paramétrica $P_1$ — $P_2$ $\quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t$

### superficies y volúmenes:

perim circunf: $2\pi R$

sup. circunf: $\pi R^2$

sup. esfera $4\pi R^2$

vol. esfera $\frac{4}{3}\pi R^3$

$\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3} A H$

$dS = 2\pi\rho\, d\rho$

$dV = 4\pi\rho^2 d\rho$

# Teoria de Campos

$\text{grad } V = \nabla V$

$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{\vec{u}} = D_{\vec{u}}V = \text{grad } V \cdot \vec{u}$

Líneas de campo

$d\vec{r} \parallel \vec{F} \equiv \frac{dx}{dF} = \frac{dy}{dF} = \frac{dz}{dF}$

sup, sup → línea (intersección de sup)

$C_A^B = \oint_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$x = x(q_1)\quad y = y(q_1)\quad z = z(q_1)$

$dx = x(q_1)dq_1\quad dy = y(q_1)dq_1\quad dz = z(q_1)dq_1$

$C_A^B = \int_{r_a}^{r_b} F(r)\,dr$ ← $\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$

f. v. conservativas

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{dx} \quad \frac{\partial F_x}{dz} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$

$C_A^B = \int_A^B -dV = V_A - V_B$

$V(x,y,z) = V_A - C_A^B$, inteligentemente

$V(r) = V_A - \int_{r_A}^{r} F(r)\cdot dr$

flujo: $\Phi_s = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

div $\vec{F}$ escalar!: $\text{div}\,\vec{F} = \frac{d\Phi}{dv}$ $\quad \text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ $\quad \Phi_{sc} = \iiint_V \text{div}\,\vec{F}\cdot dV$

rot $\vec{F}$: $\text{rot}\,\vec{F} = \frac{d\vec{C}}{dS}_{max}$ $\quad \text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ $\quad C_{TC} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$

f. v. conservativo: $\vec{F} = -\nabla V$

$\text{div}\,F = -\Delta V$ (↑ laplaciano) $\quad \text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

# Cinemática:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = |\vec{v}| \cdot \vec{T}$

$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad \vec{a_T} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\cdot\vec{T} \quad \vec{a_N} = \frac{|v|^2}{\rho}\vec{N} \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$

Movimiento circular

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

velocidad angular: $\vec{\omega}$

aceleración angular $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$a_T = \alpha \cdot R \quad a_N = \omega^2 R = \omega v$

$\vec{a_T} = \vec{\alpha} \times \vec{R} \quad \vec{a_N} = \vec{\omega} \times \vec{v}$

# Dinámica

en todo momento $\vec{F}$ se refiere a $\Sigma\vec{F}$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$\vec{F}_x \to \ddot{x} \to x$
$\vec{F}_y \to \ddot{y} \to y$
$\vec{F}_z \to \ddot{z} \to z$

**Trabajo:**

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Potencia:**

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

**Energía cinética**

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

**Teorema de la Ec**

$$\boxed{dW = dT}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

**Fzas conservativas**

$$\vec{F} = -\text{grad } U \quad (U: \text{energía pot})$$

$$\boxed{dW = -dU = dT}$$

$$T + U = cte$$

**cant de mov**

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{I} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot dt = \vec{p}_B - \vec{p}_A$$

**momento cinético**

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

**fuerzas centrales**

$\vec{L}_O = cte$ (trayectoria plana) $\qquad \frac{dA}{dt} = cte$

**Energía potencial**

elástica: $U = \frac{1}{2} k x^2$

gravit: $U = -G\frac{Mm}{r}$

$h \ll R \Rightarrow \Delta U = mgh$

equilibrio: $\frac{dU}{dx} = 0 \qquad \frac{dU}{d\theta} = 0 \quad \dots$

**Movimiento rectilíneo:**

$$F(t) \to \int F(t)\,dt = \int m\,dv \to v(t) \to \int v(t) = x(t)$$

$$F(v) \to F = m\frac{dv}{dt} \to \int dt = \int \frac{m}{F(v)}\,dv \to t(v) \to v(t) \to \int v(t) = x(t)$$

$$F(r) \to \text{rot } F = 0 \Rightarrow \exists U \qquad U = -\int F(x)\,dx$$

$$T + U = E$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{[E - U(x)]\frac{2}{m}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[E-U(x)]\frac{2}{m}}} = \int dt$$

se lleva hacia

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \text{arc sen } u$$

# Electrostática

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$ $\quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

T. Coulomb $\quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

T. Gauss $\quad \iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

hilo ∞ $\quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}$

plano ∞ $\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Ec. Poisson $\quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Ec. Laplace $\quad \rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$

polarización $\quad \vec{P} = q\cdot\vec{l}$

# Conductores Cargados en Equilibrio

int. cond
$\vec{E} = \vec{0}$
$V = cte$
$\rho = 0$

Presión electrostática $\quad P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

elem corresp
$\sigma_1 dS_1 = \sigma_2 dS_2$

conexión cond.
$V_1 = V_2$

a tierra
$V = 0$

pot esfera
$V(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$V(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Sist cond Equilibrio:

$\Delta V = 0$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad V = Ax + b$

$x = 0 \quad V = V_1$
$x = d \quad V = V_2$

$V = \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1$

$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$

$E = -\frac{V_2 - V_1}{d}\vec{i}$

$\sigma_1 = E\cdot\varepsilon_0$
$\sigma_2 = -E\cdot\varepsilon_0$

# Condensadores

$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

energía: $\quad V = V_1 - V_2$

$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}V^2 C$

densidad de energía:

$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Fuerza entre armaduras:

$F = \int dF = \int dq\, E = \int \sigma\, dS\, E = \int \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$

$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

campo y potencial

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

$V_A - V_B = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$

$C = \frac{\varepsilon S}{d}$

# Dielectricos

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon_0(\chi + 1)$

Polariz: $\quad \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \varepsilon_0\chi\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$

$\sigma_i = \vec{P}\cdot\vec{u}_n$

Desplaz: $\quad \vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon}$

$\vec{D} = \sigma\vec{u}_n$ en las proximidades sólo

$\sigma_i = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

T. de Gauss generalizado

$\iint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{libre}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q_{libre}}{\varepsilon}$

$\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}$

Condensador con varias capas de dieléctrico

$D = \sigma = cte \qquad P_i = \varepsilon_0(\varepsilon_{ri} - 1)E$

$E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_i} \qquad P_i = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{ri}}\right)\sigma$

$V_A - V_B = \sigma\left[\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \dots\right]$

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \dots\right)}$

# TEMA 1: MAGNITUDES FÍSICAS

## 1. INTRODUCCIÓN

Física: Ciencia q. estudia el mundo inanimado y sus fenómenos
Objetivo: Descubrir y dar forma matemática a las leyes que relacionan entre sí a las magnitudes que intervienen en los fenómenos naturales.
Magnitud Física: es medible

## 2. MAGNITUDES FÍSICAS

- Propiedad medible
  - -escalar
  - -vectorial

## 3 UNIDADES Y MEDIDAS

- cantidad: Valor de una magnitud en un objeto o fenómeno
- Medir: Comparar una cantidad desconocida de una magnitud con una cantidad patrón de la misma magnitud
- Unidad: Cantidad Patrón elegida como referencia

cantidad = medida x unidad
(C) = C · u
longitud mesa = 1·2 m

# 4. LEYES FÍSICAS

Expresión matemática que relaciona cantidades de distintas magnitudes que intervienen en un fenómeno

$(Y) \propto (A)^a (B)^b (C)^c$ → cantidades

$Y = k\, A^a B^b C^c$ ⟶ medidas

constante ↔ universales: siempre ej G
↳ características: en condiciones determinadas

# 5. SISTEMAS DE UNIDADES

Magnitudes fundamentales:
Se eligen de entre las magnitudes físicas.
No se pueden expresar una en función de otra

en España → longitud
tiempo
masa

a cada mag. fundamental se le asocia una unidad fundamental

MAGN. FUNDAMENTAL ⟶ MAGN. DERIVADA
UNIDAD FUNDAMENTAL — Ley Física → UNIDAD DERIVADA

Ecuación de Definición

$v = \frac{l}{t}$ → m/s

# 6. ECUACION DE DIMENSIONES

- NO es una ley física $v = \frac{l}{t}$
- ES una ecuación simbólica. $[v] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T}$ $\quad [l] = L$, $[T] = T$

la dimensión se representa entre corchetes cuadrados

$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ → $[P] = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}}$

ley física — se eliminan las constantes que no tienen dimensiones (algunas sí que tienen) — ecuación simbólica

constantes que sí que tienen dimensiones

$F = G\frac{mm'}{r^2}$ $\quad [G] = \frac{[F][l]^2}{[m]^2}$ $\quad [F] = [m]\cdot\frac{[l]}{[t]^2}$

$[G] = \frac{[m][l][t]^{-2}[l]^2}{[m]^2}$

$[G] = [m]^{-1}[l]^3[t]^{-2}$

$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ?

$[P] = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}}$

$[t] = \sqrt{\frac{[l]}{[l][t]^{-2}}}$

$[t] = \sqrt{[t]^2}$

$[t] = [t]$

dimensionalmente correcta

# ANALISIS DIMENSIONAL

Para averigüar relacion entre magnitudes

$t = f(h, g, m)$

$[t] = [h]^{\alpha}[g]^{\beta}[m]^{\gamma}$ $\quad t \propto h^{\alpha} g^{\beta} m^{\gamma}$

$[t] = T$
$[h] = L$
$[g] = LT^{-2}$
$[m] = M$

$T = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} \cdot M^{\gamma}$

$T = L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta} \cdot M^{\gamma}$

igualar coeficientes

[T] $\quad 1 = -2\beta$

$\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$

[M] $\quad \boxed{0 = \gamma}$ → la masa no influye

[L] $\quad 0 = \alpha + \beta$

$0 = \alpha - \frac{1}{2}$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

de aqui sacamos:

$t \propto h^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}}$

$\boxed{t \propto \sqrt{\frac{h}{g}}}$ haciendo medidas se puede ahora obtener la constante.

# TEMA 2: ÁLGEBRA VECTORIAL

**Magnitudes escalares:** $m_{tiza} = 0'03$ kg (medida, unidad)

**Magnitudes vectoriales:** módulo, dirección y sentido

**Suma de vectores:** conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
Asociativa: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
Elemento neutro: $\exists \vec{0}: \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
Elemento simétrico $\exists -\vec{a}: \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

**Producto por un escalar:** $\alpha \cdot \vec{a}$ Da un nuevo vector misma dirección módulo y sentido puede variar según $\alpha$

**Vector:** tiene todas las propiedades mencionadas arriba

## Dependencia e Independencia lineal

Sea $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n\}$

→ **Linealmente dependientes** $\exists \lambda$, no todas nulas: $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i a_i)=0$

→ **Linealmente independientes** $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot a_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (i=1,2,3\dots,n)$

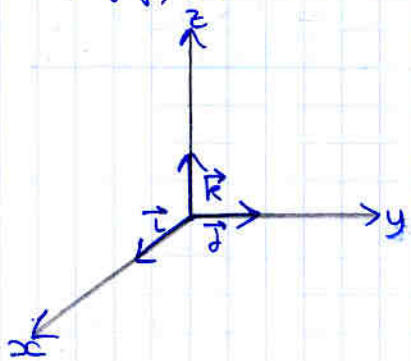
**Dimensión de un espacio vectorial**
Número máximo de vectores linealmente independientes

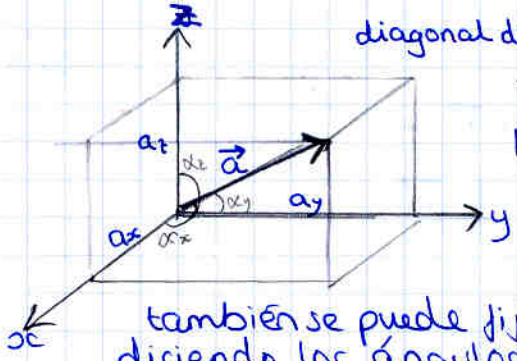
**Bases**
Conjunto de vectores LI tal que todo vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos

## Nuestro sistema de referencia

sistema cartesiano trirrectangular a derechas

Base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$




diagonal del paralepípedo

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

también se puede fijar un vector diciendo los ángulos con los ejes.

- Cosenos directores:
$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$

# Producto escalar de dos vectores

$\vec{a} \cdot \vec{b} = n$ (escalar)

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

ej físico: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, proy_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot proy_{\vec{b}}\vec{a}$

$proy_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

$proy_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$

para proyectar un vector en una dirección $\vec{a} \cdot \vec{u}$

## Propiedades:

- conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Asociativa respecto multiplicación por escalar
  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}(\lambda \vec{b})$
- Distributiva suma vectores
  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

- No cumple $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ porque no tiene sentido

## Expresión analítica

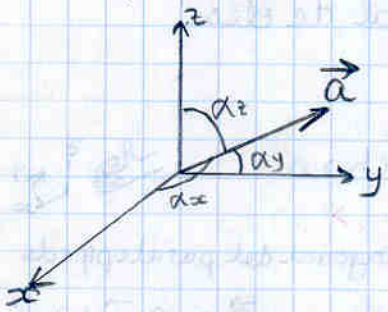
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{a_x\vec{i} \cdot b_x\vec{i}}_{= a_x b_x} + \underbrace{a_x\vec{i} \cdot b_y\vec{j}}_{= 0} + \ldots$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

## Aplicación ángulo que forman dos vectores




ej: $\vec{a} = (3, 1, 2)$

$\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos\alpha_x = a_x i_x + b_y \overbrace{i_y}^{0} + b_z \overbrace{i_z}^{0}$

$\cos\alpha_x = \frac{a_x i_x}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}}$

$\cos\alpha_x = \frac{3}{\sqrt{14}}$

si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

## Producto vectorial de dos vectores

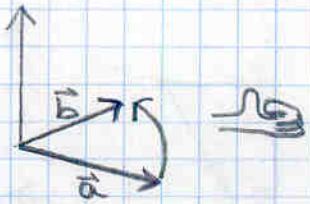
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ $\quad \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

el resultado es un vector

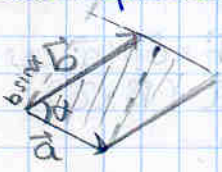
módulo: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$

dirección: $\vec{c} \perp \pi_{\vec{a},\vec{b}}$

sentido: dado por la mano derecha




el módulo representa area del paralepípedo




Propiedades:

- No cumple conmutativa $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- Asociativa respecto multiplicación por escalar
  $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$
- Distributiva suma de vectores
  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- No cumple la asociativa
  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Expresión analítica

$\vec{i} \times \vec{i} = 0$
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
etc...

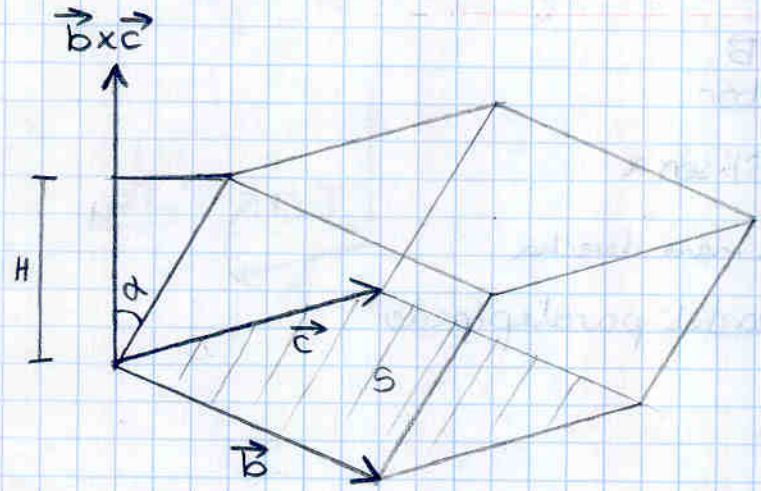
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

← da lugar a

- si se cambian dos filas, determinante cambia signo: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- si 2 filas son proporcionales, determinante es cero: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

# Producto Mixto

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$




volumen del paralelepípedo

$S = |\vec{b} \times \vec{c}|$

$H = |\vec{a}| \cos\alpha$

$V = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cos\alpha$

$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

## Propiedad

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \rightarrow$ vectores son coplanares

Expresión analítica

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Volumen del tetrahedro $= \frac{1}{6}$ producto mixto

Demostrar en $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ que relación hay entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

$(|\vec{a}+\vec{b}|)^2 = (|\vec{a}-\vec{b}|)^2$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

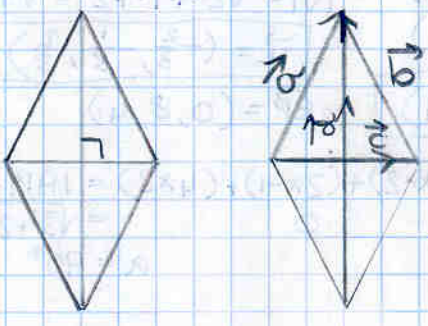
$\vec{a}\vec{a}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{b} = \vec{a}\vec{a}+\vec{b}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}$

$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$a \perp b$

Rombo de 4 lados iguales.
Demostrar que las dos diagonales forman 90°






sea $\vec{a}$ $(a_x, a_y)$

$\vec{b}$ $(-a_x, a_y)$

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}\cdot\vec{d} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}$

$= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ como $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

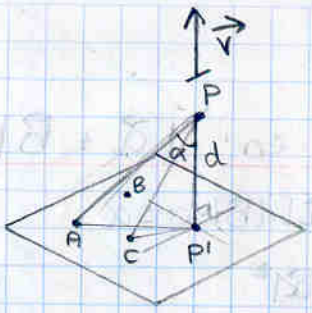
$\vec{c}\cdot\vec{d} = |\vec{a}|^2 - |\vec{a}|^2$

$\vec{c}\cdot\vec{d} = 0$

$\vec{c} \perp \vec{d}$

Problema:

$\pi \begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,-6,0) \\ C(0,0,3) \end{cases}$ $\quad P(0,2,4)$




$\vec{AB} = (3,-6,0)$

$\vec{AC} = (3,0,3)$

$\vec{P'P}$ es perpendicular al plano

vector // $\vec{P'P} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -18\vec{i} - 9\vec{j} + 18\vec{k}$$

$\vec{v} = (-18,-9,18)$

$\vec{v} = (-2,-1,2)$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\boxed{\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

$\vec{PC} = (0,-2,-1)$

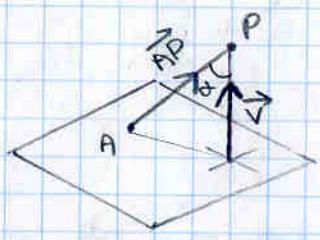
$\boxed{\vec{AP} = (3,2,4)}$

$\vec{BP} = (0,8,4)$

$\vec{AP} \cdot \vec{v} = (3x-2)+(2x-1)+(4x2) = |AP| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$

$= 0 \qquad = \sqrt{3^2+2^2+4^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cos\alpha$

$\alpha = 90°$



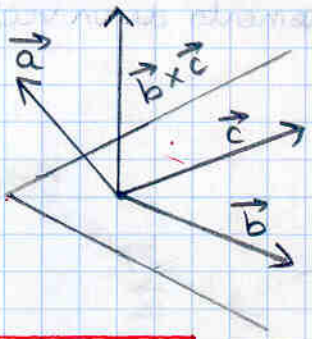
## Doble Producto Vectorial

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$\therefore \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in \pi_{b,c}$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}$

combinación lineal




$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

## Clasificación de Vectores

Dos vectores son equipolentes cuando tienen igual módulo, dirección y sentido.

Vectores libres:
- se puede sustituir por cualquiera de sus equipolentes sin dejar de representar la misma cantidad vectorial
- Para determinarlos: módulo, dirección y sentido
- Ej: vector traslación de un sólido

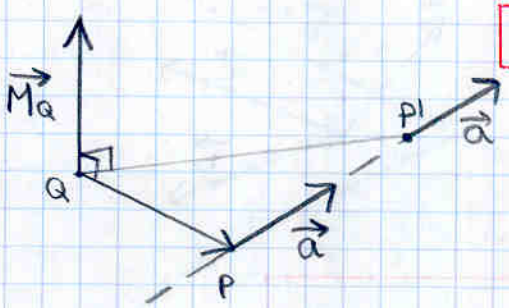
Vectores deslizantes
- Se pueden sustituir por cualquiera de sus equipolentes, contenidos en su línea de acción
- Para determinarlos hay que conocer: módulo, dirección, sentido y línea de acción
- Ej: fuerza sobre un sólido rígido

Vectores localizados
- No puede sustituirse por ningún otro vector
- Para determinarlos hay que conocer el módulo, la dirección, sentido y punto de aplicación.
- Ejemplo: fuerza sobre un sólido deformable.

## Momento de un vector deslizantes

se define el momento de un vector $\vec{a}$ respecto a un punto Q:
(P = punto de aplicación de $\vec{a}$)

$$\vec{M}_Q(\vec{a}) = \vec{QP} \times \vec{a}$$




Dimensiones: dependen de $\vec{a}$

$$[M] = L \cdot [\vec{a}]$$

si cambio el punto de aplicación P del vector deslizante $\vec{a}$ a P', ¿qué pasará con el momento de $\vec{a}$ respecto a Q?

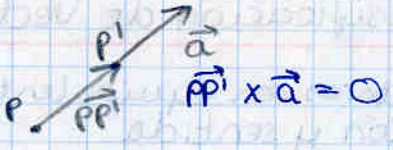
$$\vec{QP'} = \vec{QP} + \vec{PP'}$$

$$\vec{M}'_Q(\vec{a}) = (\vec{QP} + \vec{PP'}) \times \vec{a}$$

$$= \vec{M}_Q(\vec{a}) + \vec{PP'} \times \vec{a}$$

ó

$$\vec{M}'_Q(\vec{a}) = \vec{M}_Q(\vec{a})$$

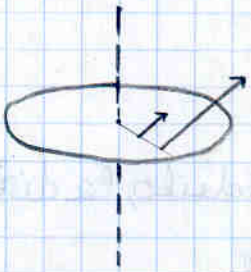



$\vec{PP'} \times \vec{a} = 0$

**Propiedad:**
El momento de un vector respecto a un punto Q no depende del punto de aplicación, P, sobre la línea de acción del vector

**Campo de momentos**
A cada punto del espacio, Q, le hacemos corresponder el momento del vector respecto de ese punto Q

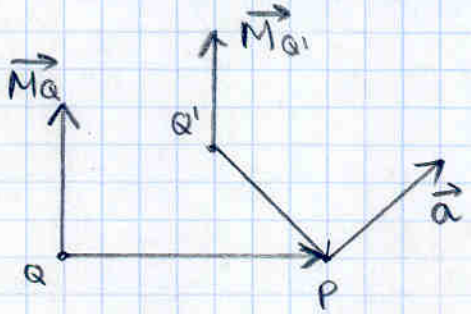
ej



un disco que gira. Cada punto tiene una velocidad.
El conjunto de estos vectores de velocidad sería un campo de velocidad.

Lo mismo ocurre con todos los momentos de un vector en cada punto del espacio

¿Cómo pasar del momento del vector respecto de un punto Q al momento de otro punto Q'?




$$\vec{M}_Q = \vec{QP} \times \vec{a}$$

$$\vec{M}_{Q'} = \vec{Q'P} \times \vec{a} \qquad \vec{Q'P} = \vec{Q'Q} + \vec{QP}$$

$$= (\vec{Q'Q} + \vec{QP}) \times \vec{a}$$

$$= (\vec{Q'Q} \times \vec{a}) + (\vec{QP} \times \vec{a})$$

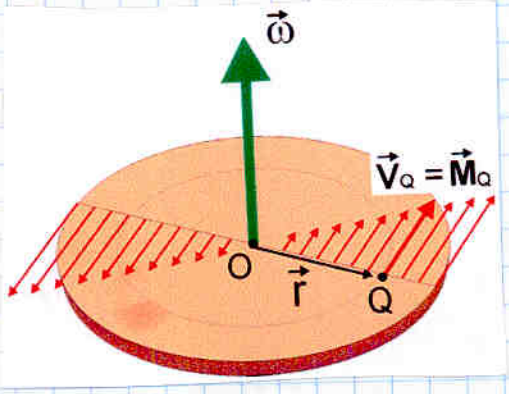
$$\vec{M}_{Q'} = (\vec{Q'Q} \times \vec{a}) + \vec{M}_Q$$

esto es cero cuando $\vec{Q'Q} \parallel \vec{a}$.
En ese caso $\vec{M}_{Q'} = \vec{M}_Q$

$\vec{a} = \vec{\alpha}$
$\vec{v} = \vec{\omega}$
$\vec{a} = \vec{\omega}$

ejemplo campo de momentos  es decir; en la def:

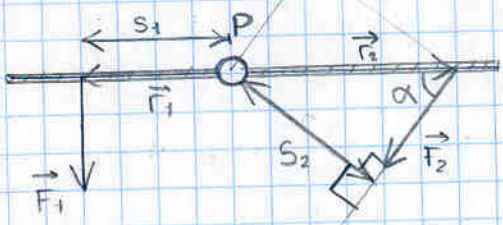
Campo de momentos ($\vec{M}_Q$'s) creados por el vector velocidad angular ($\vec{\omega}$) respecto a varios puntos Q.




en este caso, el momento respecto a un punto Q de la velocidad angular $\vec{\omega}$ es igual a la velocidad lineal de ese punto Q.

$$\vec{V_Q} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$= \omega \times \vec{OQ}$$
$$\vec{V_Q} = M_Q(\vec{\omega})$$

Explicación lógica de momento: lo dimos en AS




|momento de $F_1$| = $|F_1| \cdot S_1$ = $|r_1 \times F_1|$

|momento de $\vec{F}_2$| = $\frac{|F_2| \cdot S_2}{F_2 \cdot (r_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha)}$ = $|\vec{r}_2 \times \vec{F}_2|$

además, la dirección con la regla de mano derecha.

momento de $F_2$ = $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$

## Sistema de vectores deslizantes

Conjunto formado por un número cualquiera de vectores deslizantes

$S = \{(\vec{a}_1; A_1), (\vec{a}_2; A_2), \dots (\vec{a}_n; A_n)\}$

$\vec{a}_i$ = módulo, dirección, sentido
$A_i$ = punto de la línea

### - Vector resultante

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

$\vec{R}$ es un vector libre

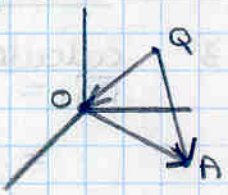
### - Momento resultante (respecto de un punto)

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA}_i \times \vec{a}_i$$

$\vec{M}_O$ es un vector localizado

Para cambiar el punto del cual respecta el momento

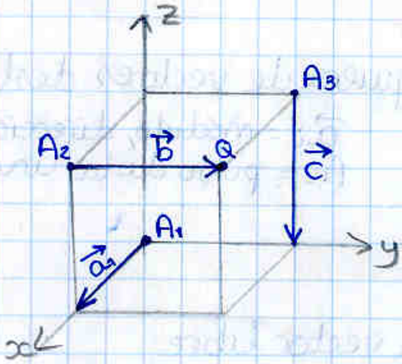
$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{n} \vec{QA}_i \times \vec{a}_i$$
$$= \sum (\vec{QO} + \vec{OA}_i) \times \vec{a}_i$$
$$= \sum (\vec{QO} \times \vec{a}_i) + \sum (\vec{OA}_i \times \vec{a}_i)$$
$$= [\vec{QO} \times \vec{a}_1 + \vec{QO} \times \vec{a}_2 + \dots \vec{QO} \times \vec{a}_n] + \vec{M}_O$$
$$= \vec{QO} \times [\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n] + \vec{M}_O$$
$$= \vec{QO} \times \sum \vec{a}_i + \vec{M}_O$$
$$= \vec{QO} \times \vec{R} + \vec{M}_O$$




Cuando se conoce momento respecto a O ($\vec{M}_O$), el momento respecto a otro punto Q viene dado por:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + \vec{QO} \times \vec{R}$$

## - Ejercicio: sistema de vectores deslizantes




$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

Hallar
- vector resultante $\vec{R}$
- Momento resultante respecto a $A_1$ $\quad \vec{M}_O$
- Momento resultante respecto a Q $\quad \vec{M}_Q$

1ero: sacar vectores y puntos:

$\vec{a} = (1,0,0) \qquad A_1 = (0,0,0)$
$\vec{b} = (0,1,0) \qquad A_2 = (1,0,1)$
$\vec{c} = (0,0,-1) \qquad A_3 = (0,1,1)$
$\qquad\qquad\qquad Q = (1,1,1)$

2°: calcular $\vec{R}$

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{R} = (1,1,-1)$

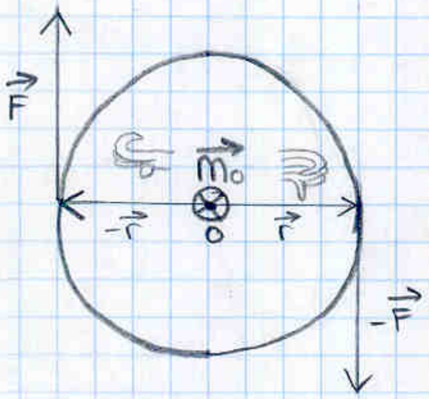
3°: calcular $\vec{M}_O$

$$\vec{M}_O = \vec{OA_1} \times \vec{a} + \vec{OA_2} \times \vec{b} + \vec{OA_3} \times \vec{c}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (0,0,0) + (-1,0,1) + (-1,0,0)$$
$$\vec{M}_O = (-2,0,1)$$

4°: calcular $\vec{M}_Q$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + \vec{QA_1} \times \vec{R}$$
$$= (-2,0,1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-2,0,1) + (2,-2,0)$$
$$\vec{M}_Q = (0,-2,1)$$

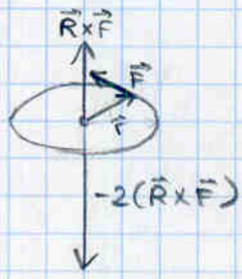
## - otro ejemplo; par de fuerzas



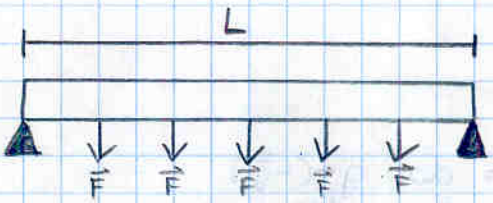

$\vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0} \qquad \nexists$ TRASLACIÓN

$\vec{M}_O = \vec{r} \times (-\vec{F}) + (-\vec{r}) \times \vec{F}$
$= -2\vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{M}_O = -2 \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$

hay rotación



## • Ejercicio: sistema de vectores deslizantes paralelos

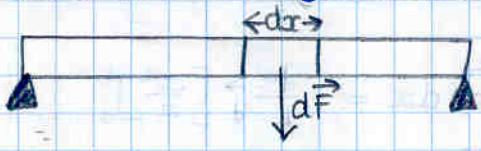



una tabla de longitud L

su peso por unidad de longitud es q (N/m)

Hallar donde actua la fuerza resultante $\vec{R}$

- consideremos una fuerza infinitesimal




$$\boxed{d\vec{F} = q \cdot dx\,(-\vec{j})} \quad ①$$

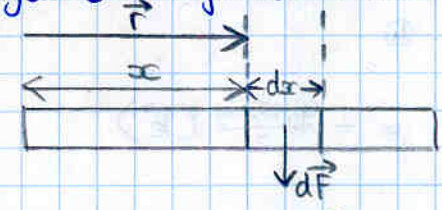
- la fuerza resultante $\vec{R}$ es la suma de los infinitos $d\vec{F}$

$$\vec{R} = \int_0^L d\vec{F} \qquad \text{sustituyendo ①} \qquad \vec{R} = \int_0^L q \cdot dx\,(-\vec{j})$$

$$= -\vec{j} \cdot q \cdot \int_0^L dx$$

$$\boxed{\vec{R} = -qL\vec{j}} \quad ②$$

- consideremos el momento infinitesimal respecto a O $d\vec{m}_0$ de una fuerza infinitesimal $d\vec{F}$




$$(\vec{r} = x\vec{i})$$

$$d\vec{m}_0 = \vec{r} \times d\vec{F} = x\vec{i} \times d\vec{F} \qquad \text{sustituyendo ①}$$

$$d\vec{m}_0 = x\vec{i} \times (q \cdot dx\,(-\vec{j})) = -xq\,dx\,(\vec{i} \times \vec{j})$$

$$\boxed{d\vec{m}_0 = -xq\,dx\,\vec{k}} \quad ③$$

- El momento resultante respecto a O $\vec{m}_0$ es la suma de los $\infty$ $d\vec{m}_0$

$$\vec{m}_0 = \int_0^L d\vec{m}_0 \overset{③}{=} \int_0^L -xq\,dx\,\vec{k} = -q\vec{k}\int_0^L x\,dx = -q\vec{k}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L$$

$$\boxed{\vec{m}_0 = -\frac{qL^2}{2}\vec{k}} \quad ④$$

- Tenemos un momento resultante y una fuerza resultante

$$\vec{m}_0 = \vec{r} \times \vec{R} = x\vec{i} \times \vec{R} \qquad \text{sustituyendo ②}$$

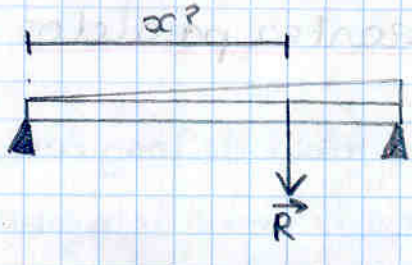
$$= x\vec{i} \times -qL\vec{j} = -xqL\,(\vec{i} \times \vec{j}) = -xqL\vec{k} \qquad \text{igualandolo a ④}$$

$$-xqL\vec{k} = -\frac{qL^2}{2}\vec{k}$$

$$xL = \frac{L^2}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{L}{2}}$$

- Mismo ejercicio que el anterior pero ahora $q = q_0 \frac{x}{L}$




$q = q_0 \frac{x}{L}$

- fuerza infinitesimal: $d\vec{F} = dx \cdot q\ (-\vec{j})$

$$d\vec{F} = \frac{q_0 x\, dx}{L}(-\vec{j}) \quad ①$$

- fuerza resultante:

$$\vec{R} = \int_0^L \frac{q_0 x\, dx}{L}(-\vec{j}) = -\frac{q_0}{L}\vec{j}\int_0^L x\, dx = -\frac{q_0}{L}\vec{j}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L$$

$$\vec{R} = -\frac{q_0 L^2}{2L}\vec{j} \qquad \vec{R} = -\frac{q_0 L}{2}\vec{j} \quad ②$$

- momento infinitesimal

$$d\vec{M}_0 = \vec{r} \times d\vec{F} = x\vec{i} \times \frac{q_0 x\, dx}{L}(-\vec{j}) = -\frac{x^2 q_0\, dx}{L}\vec{k} \quad ③$$

- momento resultante

$$\vec{M}_0 = \int_0^L d\vec{M}_0 = \int_0^L -\frac{x^2 q_0\, dx}{L}\vec{k} = -\frac{q_0}{L}\vec{k}\int x^2\, dx = -\frac{q_0}{L}\vec{k}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L$$

$$\vec{M}_0 = -\frac{q_0 L^3}{3L}\vec{k} = -\frac{q_0 L^2}{3}\vec{k} \quad ④$$

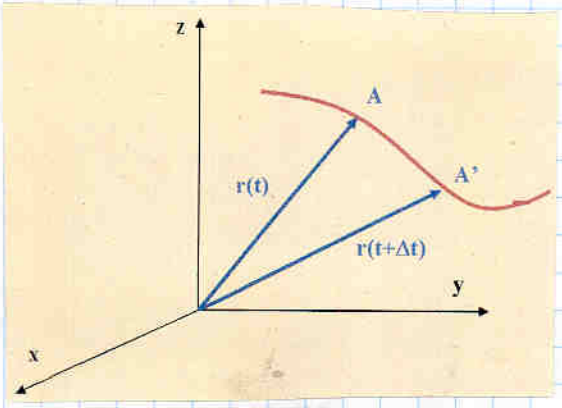
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{R} = x\vec{i} \times -\frac{q_0 L}{2}\vec{j} = -\frac{q_0 x L}{2}(\vec{k})$$

$$-\frac{q_0 L^2}{3}\vec{k} = -\frac{q_0 x L}{2}\vec{k}$$

$$\frac{L}{3} = \frac{x}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}L}$$

# TEMA 3: FUNCION VECTORIAL DE VARIABLE ESCALAR



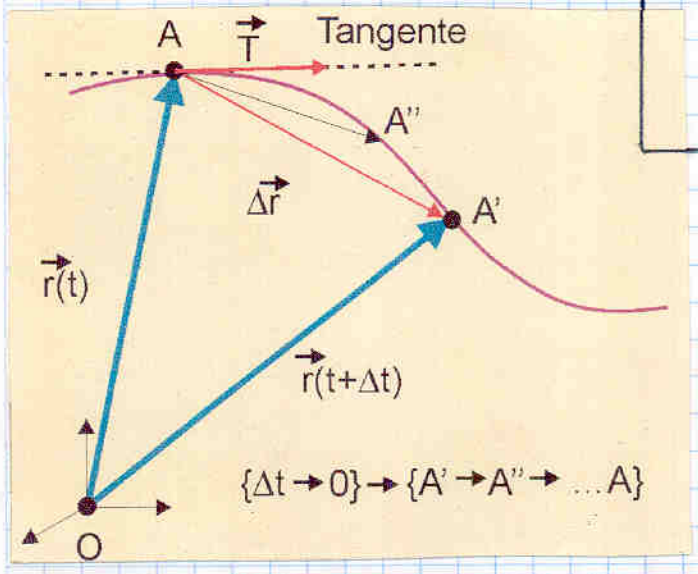

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Propiedades:
- Uniforme: para cada valor t corresponde un A
- Continua: al aumentar t a t+Δt; A' está infinitamente próxima a A

## • Vector derivada

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

↳ Dirección del vector derivada




**Razonamiento de la derivada**

↳ recordemos: $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

↳ por lo tanto

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

**REGLAS DE DERIVACIÓN**

1. $\frac{d[\vec{r}_1 + \vec{r}_2]}{dt} = \frac{d[\vec{r}_1]}{dt} + \frac{d[\vec{r}_2]}{dt}$
2. $\frac{d[\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2]}{dt} = \frac{d[\vec{r}_1]}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \frac{d[\vec{r}_2]}{dt}$
3. $\frac{d[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]}{dt} = \frac{d[\vec{r}_1]}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d[\vec{r}_2]}{dt}$ ojo con el orden!
4. $\frac{d[\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)]}{dt} = \frac{d[\vec{r}_1]}{dt} \cdot \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_1 \cdot \left[\frac{d[\vec{r}_2]}{dt} \times \vec{r}_3\right] + \vec{r}_1 \cdot \left[\vec{r}_2 \times \frac{d[\vec{r}_3]}{dt}\right]$
5. $\frac{d[\varphi(t) \cdot \vec{r}(t)]}{dt} = \frac{d[\varphi]}{dt} \cdot \vec{r} + \varphi \cdot \frac{d[\vec{r}]}{dt}$

**siempre $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es tangente a la curva indicatriz**

→ si $|\vec{r}|$ es constante: $\frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}$

→ si dirección es constante: $\frac{d\vec{r}}{dt} \parallel C.I \parallel \vec{r}$

Si utilizamos (2) con $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ y $|\vec{r}| = cst.$

$$\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{dt} = \frac{d(\vec{r})}{dt}\cdot\vec{r} + \frac{d(\vec{r})}{dt}\cdot\vec{r}$$

$$\frac{d(|\vec{r}|^2)}{dt} = 2\,\frac{d(\vec{r})}{dt}\cdot\vec{r}$$

si $|\vec{r}(t)| = \text{constante}$

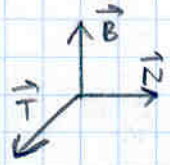
$$\frac{d(|\vec{r}|^2)}{dt} = 0$$

por lo tanto

$$2\,\frac{d(\vec{r})}{dt}\cdot\vec{r} = 0$$

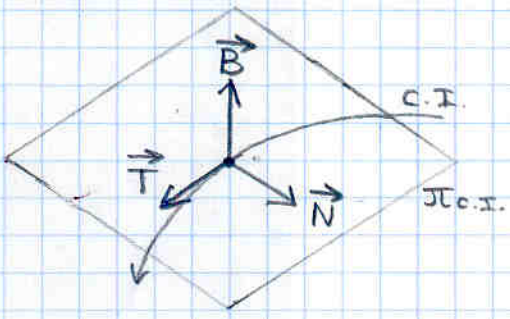
por lo tanto $\frac{d(\vec{r})}{dt} \perp \vec{r}$

# Triedro Intrínseco




$|\vec{T}|=|\vec{N}|=|\vec{B}|=1$ (son vectores unitarios)

- el triedro intrínseco acompaña a la curva indicatriz
  - ↳ $\vec{T}$ es tangente a la C.I.
  - ↳ $\vec{N}$ → perpendicular a $\vec{T}$
    - ↳ incluido en el plano de la curva indicatriz
  - ↳ $\vec{B}$ perpendicular al plano de la C.I. ($\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$)




## → Vector tangente $\vec{T}$

↳ tangente a C.I.
↳ módulo unitario

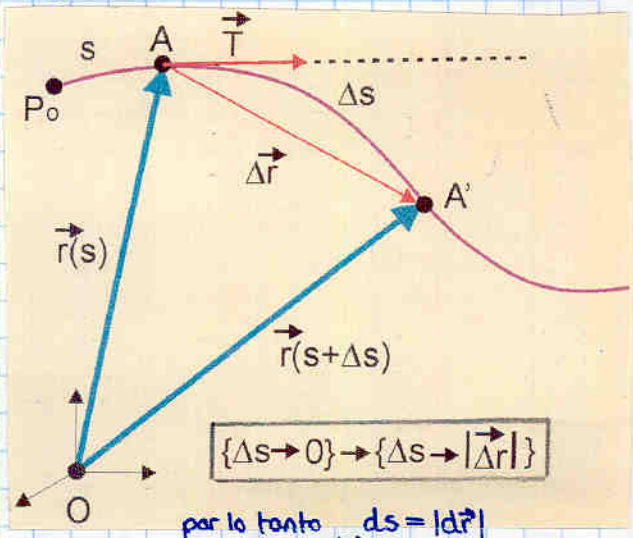
$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$$

cuando la variable escalar es la longitud del arco recorrido (s)

$$\vec{T}=d\vec{r}/ds$$

**Caso particular: si la variable escalar es la longitud del arco recorrida (s)**

entonces:




por lo tanto $ds=|d\vec{r}|$

y $|d\vec{r}/ds|=1$

entonces $\vec{T}=\frac{d\vec{r}/ds}{|d\vec{r}/ds|}=\frac{d\vec{r}/ds}{1}=d\vec{r}/ds$

Cuando la variable escalar es la longitud del arco recorrido

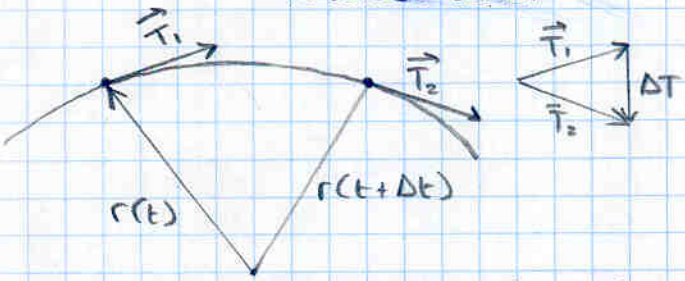
$$\vec{T}=d\vec{r}/ds$$

## → Vector normal $\vec{N}$

↳ perpendicular a $\vec{T}$
↳ módulo unitario

$$\vec{N}=\frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|}$$

como $\vec{N}$ lleva la dirección $d\vec{T}/dt$ = la dirección de $\Delta\vec{T}$



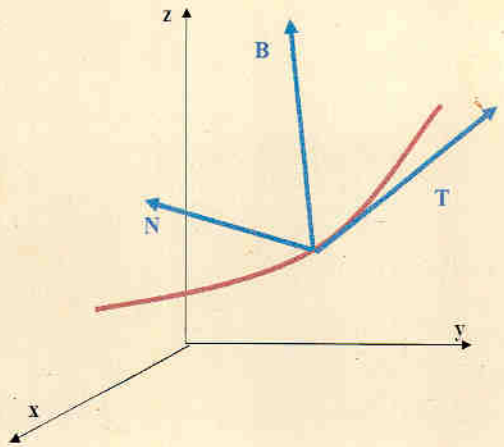

$\vec{N}$ siempre se dirige hacia el interior de la curvatura

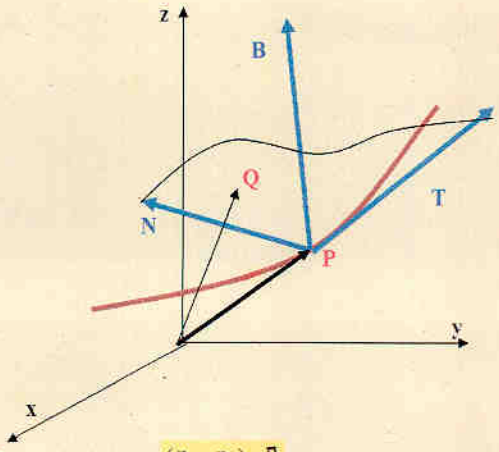
## → Vector Binormal $\vec{B}$

↳ $\vec{B}\perp\vec{T}$
↳ $\vec{B}\perp\vec{N}$

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$$

## DETERMINACIÓN DE LOS PLANOS DEL TRIEDRO INTRÍNSECO

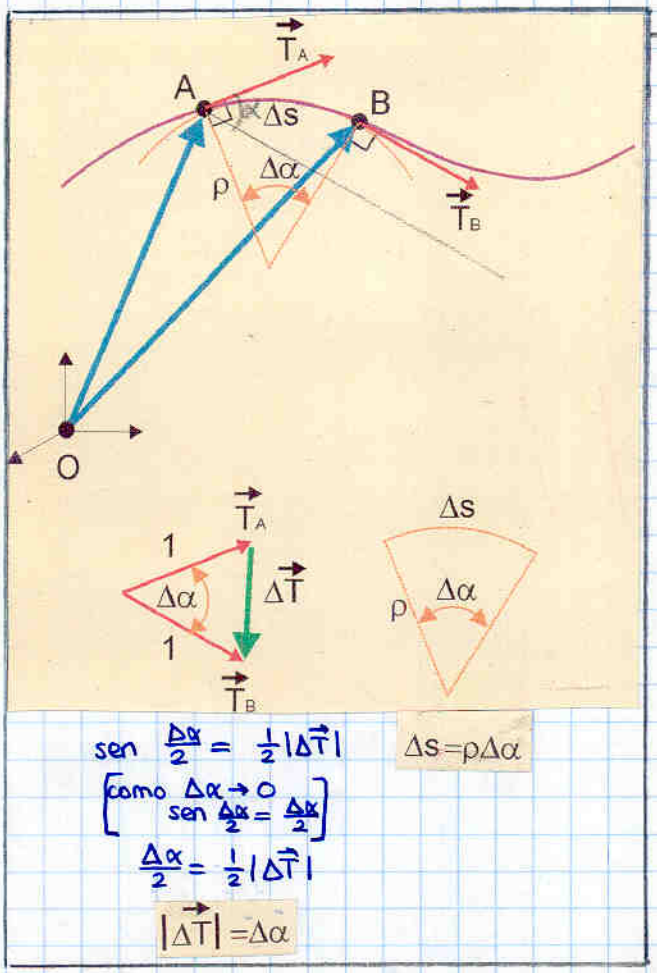



| | | |
|---|---|---|
| PQ ⊥ B | $(\vec{r} - \vec{r}_p) \cdot \vec{B}$ | Plano osculador |
| PQ ⊥ T | $(\vec{r} - \vec{r}_p) \cdot \vec{T}$ | Plano normal |
| PQ ⊥ N | $(\vec{r} - \vec{r}_p) \cdot \vec{N}$ | Plano rectificante |

## - 1ª formula de Frenet

en el caso especifico en que la variable escalar es la longitud del arco recorrido tenemos lo siguiente




$\rightarrow$ $|\Delta\vec{T}| = \Delta\alpha$ $\quad \Delta s = \rho\Delta\alpha$

¿ cuánto vale $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ?

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{|\Delta\vec{T}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\rho\Delta\alpha} = \frac{1}{\rho}$$

la dirección es la de $\vec{N}$ por lo que

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\cdot\vec{N}}$$ 1ª formula de Frenet

sen $\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{1}{2}|\Delta\vec{T}|$ $\quad \Delta s = \rho\Delta\alpha$

[como $\Delta\alpha \to 0$ $\quad$ sen $\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\Delta\alpha}{2}$]

$\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{1}{2}|\Delta\vec{T}|$

$|\Delta\vec{T}| = \Delta\alpha$

como $\boxed{\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}} = \left|\frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt}\right|$

y como $|d\vec{r}| = ds$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\vec{T}/dt}{d\vec{r}/dt}}$$

↳ radio de curvatura

- **Aplicación a problemas**

→ Caso 1 $\vec{r} = \vec{r}(s)$ → Caso 2 $\vec{r} = \vec{r}(t)$

**CASO 1** $\vec{r} = \vec{r}(s)$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \qquad \vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

**CASO 2** $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$$

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{|d\vec{T}/dt|}{|d\vec{r}/dt|}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

→ Caso 3 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ pero $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \neq$ cte

**CASO 3** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ pero ahora $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \neq cte$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \vec{T}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \vec{T} + \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \vec{T} + \frac{1}{\rho}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 \cdot \vec{N}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 \cdot \vec{B}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3} \qquad \vec{B} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot \vec{T}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] \cdot \vec{T} + \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\vec{T} + \frac{d\vec{T}}{dt}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

sust ③

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\vec{T} + \frac{1}{\rho} \cdot \vec{N} \cdot \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left[\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \vec{T}\right] \times \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\vec{T} + \frac{1}{\rho}\vec{N}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2\right]$$

$$= \left[\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \vec{T} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\vec{T}\right] + \left[\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \vec{T} \times \frac{1}{\rho}\vec{N}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2\right]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 \frac{1}{\rho} \cdot \vec{B} \quad ④$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ tiene la dirección de $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}$$

sabiendo:

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \quad ①$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{N} \quad ②$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

sust ① y ②

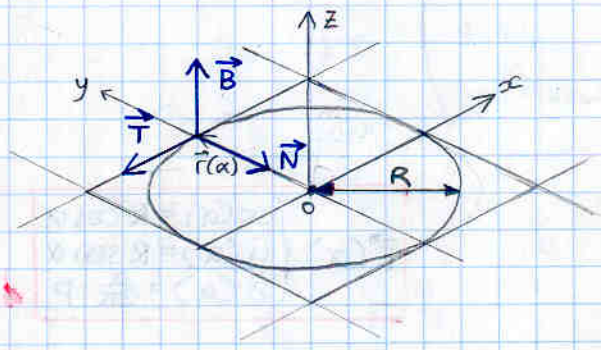
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{N}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \quad ③$$

haciendo módulos de ④

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3 \frac{1}{\rho}|\vec{B}| \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

# Problemas

- Hallar triedro intrinseco siendo la curva indicatriz una circunferencia.




1º antes de empezar, hay que sacar $\vec{r}$
↳ utilicemos como variable el ángulo

$$r(\alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$$

2º Vector $\vec{T}$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/d\alpha}{|d\vec{r}/d\alpha|} = \frac{(-R\sin\alpha, R\cos\alpha, 0)}{\sqrt{(R\sin\alpha)^2 + (R\cos\alpha)^2}} = \frac{(-R\sin\alpha, R\cos\alpha, 0)}{R}$$

$$\boxed{\vec{T} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)}$$

3º Vector $\vec{N}$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/d\alpha}{|d\vec{T}/d\alpha|} = \frac{(-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{N} = (-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)}$$

4º Vector $\vec{B}$

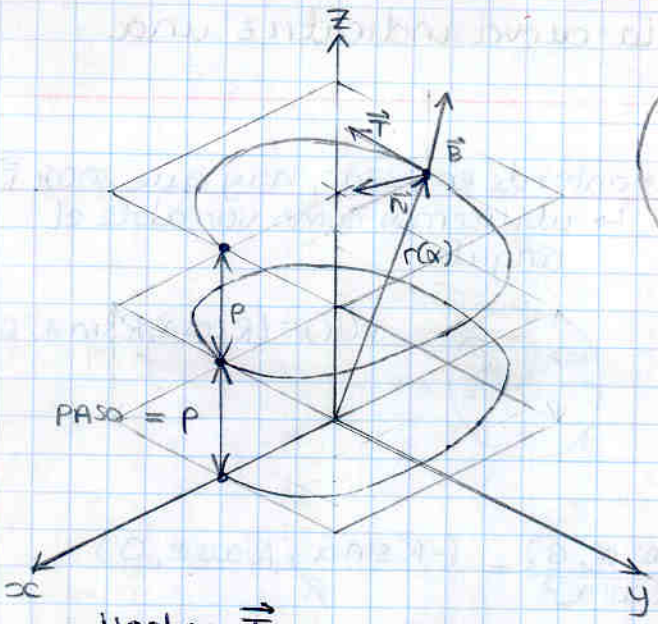
$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\vec{k} = \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = (0, 0, 1)}$$

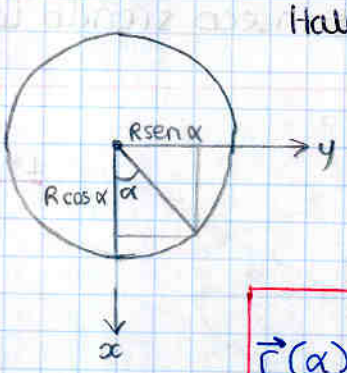
Obviamente, si calculamos radio de curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|d\vec{T}/d\alpha|}{|d\vec{r}/d\alpha|} = \frac{1}{R}$$

# - Hallar triedro intrinseco dada una hélice como C I.




Hallar $\vec{r}, \vec{T}, \vec{N}$ y $\vec{B}$




$$\vec{r}(\alpha)\begin{cases} x(\alpha) = R\cos\alpha \\ y(\alpha) = R\,\text{sen}\,\alpha \\ z(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot P \end{cases}$$

## - Vector $\vec{T}$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/d\alpha}{|d\vec{r}/d\alpha|} = \frac{(-R\,\text{sen}\,\alpha,\ R\cos\alpha,\ \frac{P}{2\pi})}{\sqrt{(R\,\text{sen}\,\alpha)^2 + (R\cos\alpha)^2 + (P/2\pi)^2}} = \frac{(-R\,\text{sen}\,\alpha,\ R\cos\alpha,\ P/2\pi)}{\sqrt{R^2 + (P/2\pi)^2}}$$

$$\boxed{\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (P/2\pi)^2}}(-R\,\text{sen}\,\alpha,\ R\cos\alpha,\ P/2\pi)}$$

## - Vector $\vec{N}$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/d\alpha}{|d\vec{T}/d\alpha|} = \frac{\frac{R}{R^2+(P/2\pi)^2}(-\cos\alpha, -\text{sen}\,\alpha, 0)}{\sqrt{\left(\frac{R}{R^2+(P/2\pi)^2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{R}{R^2+(P/2\pi)^2}\text{sen}\,\alpha\right)^2}} = \frac{\frac{R}{R^2+(P/2\pi)^2}(-\cos\alpha, -\text{sen}\,\alpha, 0)}{\sqrt{\left(\frac{R}{R^2+(P/2\pi)^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha + \text{sin}^2\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{N} = (-\cos\alpha, -\text{sen}\,\alpha, 0)}$$

## - Vector $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{R^2+(P/2\pi)^2}}}_{\text{se puede sacar factor común de una fila y el determinante queda igual}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\,\text{sen}\,\alpha & R\cos\alpha & P/2\pi \\ -\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{R^2+(P/2\pi)^2}}\left[\left(\frac{P\,\text{sen}\,\alpha}{2\pi}\right)\vec{i} - \left(\frac{P\cos\alpha}{2\pi}\right)\vec{j} + R\vec{k}\right]$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{R^2+(P/2\pi)^2}}\left(\frac{P\,\text{sen}\,\alpha}{2\pi}, -\frac{P\cos\alpha}{2\pi}, R\right)}$$

Hallar triedro intrínseco y radio de curvatura dado $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t)\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

- Vector $\vec{T}$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ \cos t)}{\sqrt{(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + \cos^2 t}} = \frac{(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ \cos t)}{\sqrt{2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t}}$$

$$\boxed{\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ \cos t\right)}$$

- Vector $\vec{N}$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\cos t,\ -\operatorname{sen} t,\ -\operatorname{sen} t)}{\sqrt{\cos^2 t + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}}} =$$

$$\boxed{\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\cos t,\ -\operatorname{sen} t,\ -\operatorname{sen} t)}$$

- Vector $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen} t & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} & \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} & \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= 0\,\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = (0,\ -1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})}$$

- Radio de curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|d\vec{T}/dt|}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{2}}$$

Problema en que $|d\vec{r}/dt| = f(t)$ → se complica → caso 3

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\text{sen}\,\alpha \\ z = 0 \end{array}\right\} \vec{r}(\alpha)$$

- Vector $\vec{T}$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = \frac{(-a\,\text{sen}\,\alpha,\ b\cos\alpha,\ 0)}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}(-a\,\text{sen}\,\alpha,\ b\cos\alpha,\ 0)}$$

- Vector $\vec{B}$ (utilizando fórmula vista en el caso 3)

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt|}$$

→ $d\vec{r}/dt = (-a\,\text{sen}\,\alpha,\ b\cos\alpha,\ 0)$

→ $d^2\vec{r}/dt^2 = (-a\cos\alpha,\ -b\,\text{sen}\,\alpha,\ 0)$

→ $$d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt^2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -a\,\text{sen}\,\alpha & b\cos\alpha & 0 \\ -a\cos\alpha & -b\,\text{sen}\,\alpha & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\begin{vmatrix} -a\,\text{sen}\,\alpha & b\cos\alpha \\ -a\cos\alpha & -b\,\text{sen}\,\alpha \end{vmatrix} = \vec{k}\,(ab\,\text{sen}^2\alpha + ab\cos^2\alpha)$$

$$= ab\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (0,\ 0,\ ab)$$

$$\vec{B} = \frac{(0,\ 0,\ ab)}{\sqrt{(ab)^2}} = \frac{(0,\ 0,\ ab)}{ab}$$

$$\boxed{\vec{B} = (0,\ 0,\ 1)}$$

- Vector $\vec{N}$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -a\,\text{sen}\,\alpha & b\cos\alpha & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} = \frac{-b\cos\alpha\,\vec{\imath} - a\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{\jmath}}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}(-b\cos\alpha,\ -a\,\text{sen}\,\alpha,\ 0)}$$

- Radio de curvatura (utilizando fórmula vista en caso 3)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|d\vec{r}/dt \times d^2\vec{r}/dt^2|}{|d\vec{r}/dt|^3} = \frac{ab}{(a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{(a^2\,\text{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}{ab}}$$

# TEMA 4: NOCIONES DE TEORIA DE CAMPOS

## • Función escalar de punto (f.e.p.)

Magnitud física escalar que depende de las coordenadas $(x,y,z)$

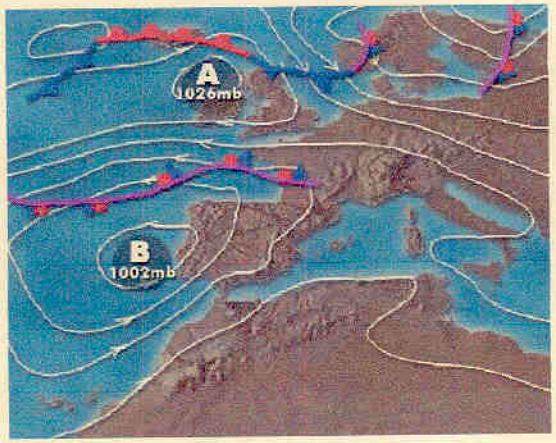
$$V = V(x,y,z)$$

↳ **Campo Escalar**
zona del espacio donde está definida una f.e.p.

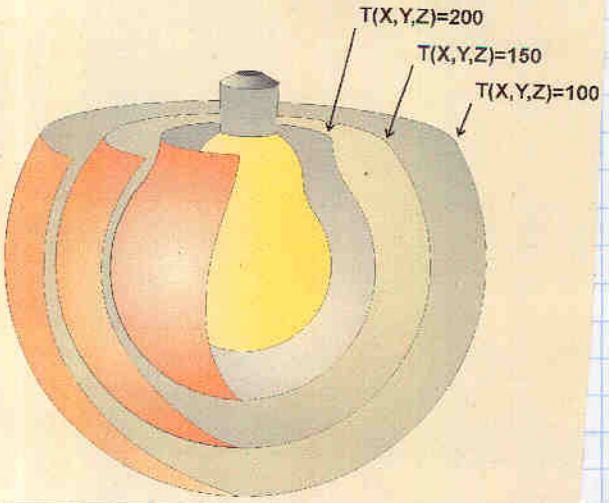
↳ **Superficie Isoescalar**
lugar geométrico de los puntos donde la fep toma el mismo valor

Las superficies isoescalares no se cortan.

**Ejemplo 2D: Isobaras**




**Ejemplo 3D: Isotermas**




## • Diferencial de una f.e.p.

sea $V = V(x,y,z)$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

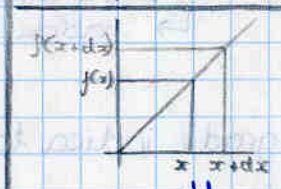
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$dV = \text{grad}\,V \cdot d\vec{r}$$

$$\text{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{grad}\,V = \nabla V$$

**Caso simple, en una dimensión**




$df = \underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{lo que me varía respecto a x}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{lo que me he movido}}$

**Derivadas Parciales**
se consideran las demas variables constantes aunque no lo sean
ej $V = 3x^2y + z$
$\frac{\partial V}{\partial x} = 6xy \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2$

**$\nabla \equiv$ Operador Nabla**
operador vectorial que actua sobre magnitudes escalares haciendo su derivada parcial

- $\text{grad}\, V \equiv \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$ : Dirección, sentido y módulo

**Dirección:**

supongamos este caso $d\vec{r} \parallel$ s.i.

$dV = \nabla V \cdot d\vec{r} = 0$
$\leftrightarrow \nabla V \perp d\vec{r}$
$\rightarrow \nabla V \perp$ s.i.

$\nabla V \perp$ superficie isoescalar

**Sentido**

supongamos este caso $d\vec{r} \perp$ s.i.
$V_2 > V_1$

$dV > 0 \rightarrow \nabla V \cdot d\vec{r} > 0$
↳ sentido $\nabla V = d\vec{r}$

Sentido $\nabla V$ : valores crecientes

**Módulo**

$dV = \nabla V \cdot d\vec{r}$ → si $d\vec{r}$ está en la dirección de grad V
$dV = \nabla V \cdot dr$

$\frac{dV}{dr} = \nabla V$

Variación por unidad de desplazam. en la dirección del gradiente

**Resumen:**

grad V = $\nabla V$
↳ dirección $\perp$ S.I.
↳ sentido: valores crecientes
↳ módulo: variación por unidad de desplazamiento en la dirección del gradiente

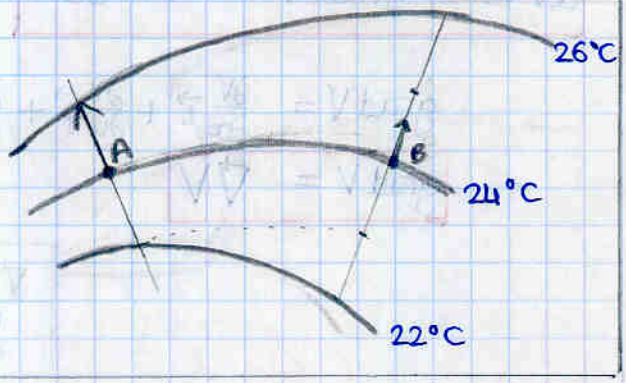
grad V indica la línea de máxima variación de la función

NOTA: El campo de gradientes forma un campo vectorial que se verá pronto.

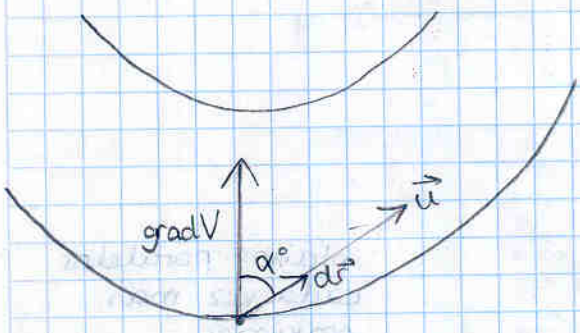
**Ejercicio / Ejemplo**

Dibujar aproximadamente las superficies isotermas 22°C y 26°C dado

$|\nabla T|_A = 2\,°C/m$
$|\nabla T|_B = 1\,°C/m$



## • Derivada direccional




en el ej. de la izquierda ($\vec{u}$ es el vector unitario en la dirección $d\vec{r}$) se tiene:

$$dV = |\text{grad } V| \cdot dr \cdot \cos\alpha$$
$$\frac{dV}{dr} = |\text{grad } V| \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{dV}{dr} = \text{grad } V \cdot \vec{u}$$

La derivada direccional $\frac{dV}{dr}|_{\vec{u}}$ da la variación de V por unidad de desplazamiento en la dirección de $\vec{u}$ = dirección de desplaz.

$$\frac{dV}{dr}|_{\vec{u}} \equiv D_{\vec{u}}V = \text{grad } V \cdot \vec{u}$$

¡Es un escalar!

$\frac{dV}{dr}|_{\vec{u}}$ es MÁXIMA si $\vec{u} \parallel \nabla V$ es $= |\nabla V|$

Para calcular $D_{\vec{u}}V$ se necesita: → dirección del movimiento
→ punto del que partimos
→ función f. e p.

**Ejemplo:**

$V = x^2yz + 4xz^2$
$P = (1,-2,-1)$
$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

$\Big\}$ $\frac{dV}{dr}|_{\vec{a}}$ ?

1- Calcular grad V

$$= \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (2yzx + 4z^2,\ x^2z,\ x^2y + 8xz)$$

2- Particularizar grad V a P(1,-2,-1)

$$\nabla V|_P = (8, -1, -10)$$

3- Unitario en dirección de $\vec{a}$

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|a|} = \frac{(2,-1,-2)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

4- Derivada direccional

$$D_{\vec{u}}(V) = \nabla V \cdot \vec{u} = (8,-1,-10) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$= 16/3 + 1/3 + 20/3$$

$$\frac{dV}{dr}|_{\vec{a}} = \frac{20}{3}$$

**Ejemplo**

$V = \text{sen } \pi x - \cos \pi y - \text{sen } \pi z$
$P = (1, 1/2, 1)$
$\vec{a} = (1,-2,-2)$

$\Big\}$ $\frac{dV}{dr}|_{\vec{a}}$ ?

1- Calcular grad V

$$= \nabla V = (\pi \cos \pi x,\ \pi \text{ sen } \pi y,\ -\pi \cos \pi z)$$

2- Particularizar grad V a P(1, ½, 1) $= (-\pi, \pi, \pi)$

3- Hallar unitario $\frac{\vec{a}}{a} = \frac{(1,-2,-2)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

4- Derivada direccional: $\nabla V \cdot \frac{\vec{a}}{a} = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$

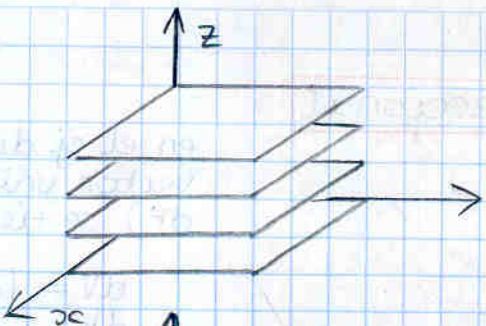
$$\frac{dV}{dr}|_{\vec{a}} = -\frac{5\pi}{3}$$

## Cuestión sencilla

$V = 4z$

SUP ISOESCALARES ?

$\nabla V = 4\vec{k}$

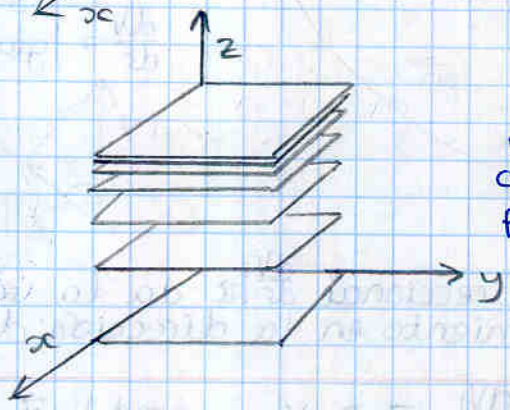



planos paralelos a plano XY

$V = 4z^2$

SUP ISOESCALARES ?

$\nabla V = 8z\,\vec{k}$




planos paralelos cada vez más próximos

# Función vectorial de punto

$$\vec{F}(x,y,z) = Fx(x,y,z)\vec{i} + Fy(x,y,z)\vec{j} + Fz(x,y,z)\vec{k}$$

ej: velocidad del aire en una habitación
ej: campo magnético $\vec{B}(x,y,z)$
ej: campo eléctrico $\vec{E}(x,y,z)$

Se representa mediante líneas de campo.

## ↳ Líneas de Campo

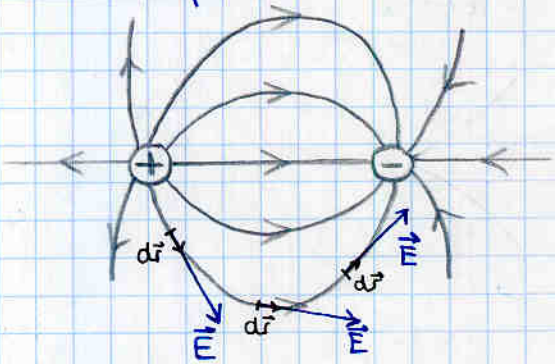
Aquellas líneas a las cuales el vector campo es tangente en todos sus puntos.

↳ hay paralelismo entre $d\vec{r}$ y $\vec{F}$ en cada punto

↳ $$\frac{dx}{Fx} = \frac{dy}{Fy} = \frac{dz}{Fz}$$

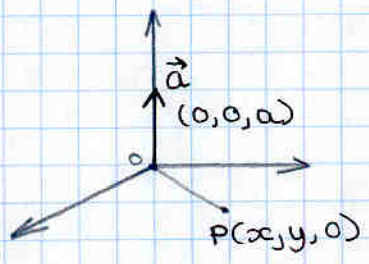
superficie superficie

intersección de superficies: línea




Ej: Dado el vector deslizante $\vec{a}$ obtener las líneas de campo del vector momento del vector a ($\vec{M}_P(a)$) en diferentes puntos P genéricos (x, y, z)

(como en este caso $\vec{a}$ es un vector deslizante, se pueden obtener las líneas de campo para el plano z=0, y serán igual para el resto de valores de z)




Momento de a respecto a punto genérico P: $\vec{M}_P(a)$

$$\vec{M}_P(a) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underset{\text{no OP}}{\vec{PO}} \times \vec{a}$$

$$= \vec{i}(-ya) - \vec{j}(-xa)$$

$$= (-ya, xa, 0)$$

$$\frac{dx}{-ya} = \frac{dy}{xa}$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

$$\int x\,dx = \int -y\,dy$$

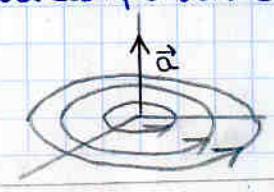
$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

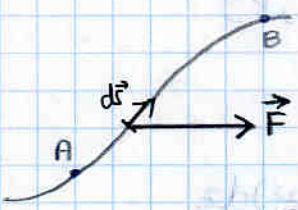
$$x^2 + y^2 = C_2$$

las líneas de campo son circunferencias de diferentes radios

la dirección: $\vec{PO} \times \vec{a}$



# • Circulación de un campo vectorial



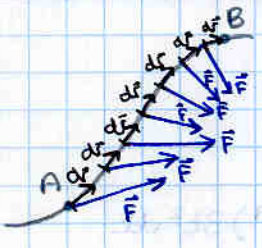

• Circulación elemental

$$dC = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

¡ATENCIÓN! ¡ES UN ESCALAR!

• Circulación entre A y B

si lo extendemos a un tramo finito de la curva AB.




$$C_A^B = \oint_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

puesto que $\vec{F}$ es una f.v.p, diferentes trayectorias desde A a B obtienen diferentes valores de $\vec{F}$ por lo que:

$C_A^B$ depende de la trayectoria

por eso es una integral curvilínea ≡ $\oint$

$\oint$ ≡ curva cerrada

desarrollando esta integral curvilínea:

$$C_A^B = \oint_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$ sabemos!

• Para calcularla necesitamos la curva entre A y B en paramétrica

$x = x(q)$ $y = y(q)$ $z = z(q)$

• Y sus diferenciales se pueden expresar

$dx = x(q)dq$ $dy = y(q)dq$ $dz = z(q)dq$

Sustituyendo x, y, z, dx, dy y dz queda:

$$C_A^B = \oint_A^B F_x(q) \cdot x(q)dq + F_y(q) \cdot y(q)dq + F_z(q) \cdot z(q)dq$$

$$C_A^B = \int_{q(A)}^{q(B)} f(q)\, dq$$

integral inmediata que depende exclusivamente del parámetro q.

## Ejemplos

- Función vectorial: $\vec{F} = (x^2 - 2yz,\ y + xz,\ 1 - 2xyz^2)$
- Puntos origen y destino: $O(0,0,0) \rightarrow P(2,4,8)$
- trayectoria: $x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3$

$$C_O^P = \oint_O^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \oint_O^P (x^2 - 2yz)dx + (y + xz)dy + (1 - 2xyz^2)dz$$

sustituimos la trayectoria:

$x = t \rightarrow dx = dt$ $\quad t \text{ en } 0 = 0$

$y = t^2 \rightarrow dy = 2t\,dt$ $\quad t \text{ en } 2 = 2$

$z = t^3 \rightarrow dz = 3t^2 dt$

$$= \int_0^2 (t^2 - 2t^5)dt + (t^2 + t^4)2t\,dt + (1 - 2t^9)3t^2 dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 2t^5)dt + (2t^3 + 2t^5)dt + (3t^2 - 6t^{11})dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 2t^5 + 2t^3 + 2t^5 + 3t^2 - 6t^{11})\,dt$$

$$= \int_0^2 (4t^2 + 2t^3 - 6t^{11})\,dt$$

$$= \left[\frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{4}t^4 - \frac{6}{12}t^{12}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}2^3 + \frac{1}{2}2^4 - \frac{1}{2}2^{12} = \frac{4 \times 8}{3} + \frac{16}{2} - \frac{4096}{2}$$

$$C_O^P = \frac{32}{3} + 8 - 2048 = \underline{-2029.3\hat{3}\ [F] \cdot L}$$

---

- Misma función vectorial y puntos OP, pero la trayectoria es el segmento que une O con P

hay que encontrar la función paramétrica: $O(x_1, y_1, z_1)\ P(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1} = t$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{8} = t \quad \left.\begin{array}{l} x = 2t \quad y = 4t \quad z = 8t \\ dx = 2dt \quad dy = 4dt \quad dz = 8dt \end{array}\right.$$

$$C_O^P = \oint_O^P (x^2 - 2yz)dx + (y + xz)dy + (1 - 2xyz^2)dz$$

$$= \int_0^2 (4t^2 - 64t^2)2dt + (4t + 16t^2)4dt + (1 - 1024t^4)8dt$$

$$= \int_0^2 (8t^2 - 128t^2)dt + (16t + 64t^2)dt + (8 - 8192t^4)dt$$

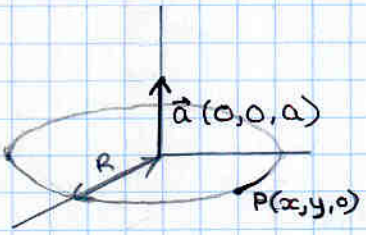
$$= \int_0^2 (8 + 16t - 56t^2 - 8192t^4)dt$$

$$= \left[8t + 8t^2 - \frac{56}{3}t^3 - \frac{8192}{5}t^5\right]_0^2$$

$$= 16 + 32 - \frac{448}{3} - \frac{26\,214\,4}{5}$$

$$= \underline{-52\,530.1\hat{3}\ [F] \cdot L}$$

## Ejemplo




Hallar la circulación del campo vectorial $\vec{M}_p(\vec{a})$ a lo largo de la circunferencia de radio R

$$\vec{M}_p(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-ya, xa, 0)$$

Sacar ec. paramétrica de circunferencia:

$x = R\cos\alpha \qquad dx = -R\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha$

$y = R\,\text{sen}\,\alpha \qquad dy = R\cos\alpha\, d\alpha$

$z = 0$

$$C = \oint (-ya)dx + (xa)dy + (0)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (-aR\,\text{sen}\,\alpha)(-R\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha) + (aR\cos\alpha)(R\cos\alpha\, d\alpha)$$

$$= \int_0^{2\pi} (+aR^2\,\text{sen}^2\alpha)\, d\alpha + (aR^2\cos^2\alpha)\, d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} aR^2\, d\alpha = aR^2 \int_0^{2\pi} d\alpha$$

$$C = 2\pi aR^2\ [M_p]\cdot L$$

Forma sencilla (razonando)

$$C = \oint \vec{M}\cdot d\vec{r} \qquad (\vec{M} \parallel d\vec{r} \rightarrow \vec{M}\cdot d\vec{r} = |M|\,|dr|)$$

$$C = \oint |M|\cdot|dr| \qquad \vec{M} = \vec{R}\times\vec{a} \rightarrow |M| = |R\cdot a|$$

$$C = \oint Ra\, dr$$

$$= Ra \oint dr = R\cdot a\cdot 2\pi r = 2\pi aR^2\ [M_p]\cdot L$$

## · Circulación con Funciones Radiales

$$\vec{F}(r) = F(r) \cdot \vec{u}_r$$

El módulo depende de la distancia al origen

ej: campo eléctrico

$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$C_A^B = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

se puede hacer de igual forma que las no-radiales (sustituyendo paramétrica) pero es mas sencillo:

$$C_A^B = \oint \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$$
$$= \oint F(r) \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{r_a}^{r_b} F(r)\, dr$$

$$\boxed{C_A^B = \int_{r_a}^{r_b} F(r)\, dr}$$

con funciones radiales

### Razonamiento previo

al cambiar $\vec{r}$ cambia tanto módulo: $r$ como dirección: $\vec{u}_r$

$$\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$$
$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\vec{u}_r$$
$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{r} \cdot (dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\vec{u}_r)$$
$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = (r \cdot \vec{u}_r)(dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\vec{u}_r)$$

$r\vec{u}_r \parallel dr\vec{u}_r$

$\vec{u}_r \perp d\vec{u}_r \rightarrow \vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$

$$= r \cdot dr + r^2(\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r)$$
$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$$

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = u_r \cdot dr$$
$$\boxed{\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = dr}$$

recordarlo, pues aparecerá más veces

### Ejemplo:

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$$

$C_A^B$? A(1,1,1) B(1,2,2)

$$C_A^B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{r_a}^{r_b} E(r) \cdot dr$$

$r_a = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
$r_b = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{k}{r^2}\, dr$$
$$= \left[-\frac{k}{r}\right]_{\sqrt{3}}^{3}$$
$$= \frac{k}{\sqrt{3}} - \frac{k}{3} = \frac{k\sqrt{3}}{3} - \frac{k}{3}$$
$$= \frac{k\sqrt{3} - k}{3}$$
$$C_A^B = \frac{k(\sqrt{3}-1)}{3}$$

# Resumen circulación

siempre

$\vec{F}(x,y,z)$

$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$

sustituyendo

$x(t)$ $x(q)\,dq$

$y(t)$ $y(q)\,dy$

$z(t)$ $z(q)\,dz$

$\equiv \int_{q(A)}^{q(B)} f(q)\,dq$

proceso arduo

$C_A^B$

escalar

$\vec{F}(r) = F(r)\cdot \vec{u}_r$

si es función radial

$\int_{r_a}^{r_b} F(r)\,dr$

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$ necesariamente

sólo si es una: Función Vectorial conservativa

- **Funciones Vectoriales Conservativas**

$C_A^B$ no depende de la trayectoria.

Éste es el caso de la función vectorial: gradiente de una f.e.p.

$$\vec{F} = \text{grad } V$$

$$C_A^B = \int_A^B \text{grad}V \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_A^B dV$$
$$C_A^B = V_B - V_A$$

(recuerda: sea V una f.e.p. $dV = \text{grad}V \cdot d\vec{r}$)

La circulación entre A y B es igual al valor de la fep en B menos el valor de la fep en A

↳ No depende de la trayectoria

↳ $\vec{F} = \text{grad}V$ es una función vectorial conservativa

Se dice que $\vec{F}$ deriva de la fep V

La circulación en una curva cerrada es cero.

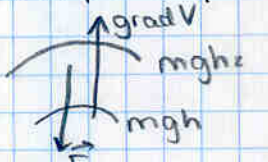
↳ **Función vectorial $\vec{F}$ derivada de una función potencial**

si en vez de trabajar con $F = \text{grad}V$ se trabaja con $V = -U$ tal que $\vec{F} = -\text{grad}\,U$

$$C_A^B = \int_A^B dU = \int_A^B -dV = V_A - V_B$$

U ≡ función potencial
≡ Potencial del que deriva el campo vectorial $\vec{F}$

¿Porqué se pone el signo menos?




las fuerzas tienen sentido contrario al gradiente (de pot. alto a bajo)

El concepto de potencial tendrá aplicación en mecánica, electromagnetismo, etc... refiriéndose a energía potencial o capacidad de desarrollar un trabajo

↳ **¿Que condiciones debe cumplir el campo vectorial F para que derive de potencial U?**

$$\vec{F} = -\text{grad}\,U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

derivando respecto a y: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

derivando respecto a x: $\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

iguales

por tanto:
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Haciendo lo mismo sobre las 3 parejas:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

condiciones necesarias para que $\vec{F}$ derive de Potencial

ejemplo:

$$\vec{F} = (3x^2y,\ x^3,\ z)$$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 3x^2$ | $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 3x^2$ | iguales ✓ |
| $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$ | $\frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$ | iguales ✓ |
| $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$ | $\frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$ | iguales ✓ |

como se cumplen las 3 condiciones:
$\vec{F}$ deriva de potencial

Para hallar la función potencial U

↳ a) como el ejemplo 4.2 del libro en página 74 (No en los apuntes)
↳ b) Método 'ingenioso' de Elvira utilizando la circulación con una trayectoria sencilla.

## a) Ejemplo pág 74 del libro

- Comprobar que el campo $\vec{F} = (y^2 - 2xyz^3)\vec{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\vec{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\vec{k}$ deriva de un potencial

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \rightarrow 2y - 2xz^3 = 2y - 2xz^3$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \rightarrow -6xyz^2 = -6xyz^2$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \rightarrow -3x^2z^2 = -3x^2z^2$$

El campo $\vec{F}$ cumple las condiciones

- Hallar la fep V que lo representa

  - se integra $F_x\,dx$ para obtener una 1ª expresión de V a la que le falta $\varphi_1(y,z)$

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow V = \int F_x\,dx = \int (y^2 - 2xyz^3)\,dx$$
$$V = y^2x - x^2yz^3 + \varphi_1(y,z)$$

  - se iguala $\frac{\partial V}{\partial y}$ de la expresión obtenida anteriormente con la de $F_y = \frac{\partial V}{\partial y}$ para obtener $\varphi_1(y,z)$ a la que le falta $\varphi_2(z)$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2yx - x^2yz^3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 3 + 2xy - x^2z^3$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 3 \rightarrow \varphi_1 = \int 3\,dy = 3y + \varphi_2(z)$$
$$V = y^2x - x^2yz^3 + 3y + \varphi_2(z)$$

  - Ya tenemos una nueva expresión de V a la que sólo le falta $\varphi_2(z)$. Se iguala $\frac{\partial V}{\partial z}$ de esta expresión con la de $F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$ para obtener $\varphi_2(z)$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -3x^2yz^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 6z^3 - 3x^2yz^2$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 6z^3 \rightarrow \varphi_2 = \int 6z^3\,dz = \frac{3}{2}z^4 + C$$

  - Ya tenemos la expresión final de V a la que sólo le falta una constante c que se puede obtener sustituyendo un punto conocido

$$V = y^2x - x^2yz^3 + 3y + 3/2\,z^4 + C$$

con este método obtienes V tal que $\vec{F} = \text{grad } V$

(grad V puede ser una función potencial $= -\text{grad } U$ donde $U = -V$)

Otro ejemplo utilizando el método del libro

me invento una fep $V = (3x^2y + 2xz^2 + 3yz)$

Dado $\vec{F} = (6xy + 2z^2,\ 3x^2 + 3z,\ 4xz + 3y)$

1- ¿Deriva de una fep?

$\frac{\partial Fx}{\partial y} = \frac{\partial Fy}{\partial x} \rightarrow 6x = 6x$

$\frac{\partial Fz}{\partial z} = \frac{\partial Fz}{\partial x} \rightarrow 4z = 4z$

$\frac{\partial Fy}{\partial z} = \frac{\partial Fz}{\partial y} \rightarrow 3 = 3$

se cumplen las condiciones

2- Hallar fep de la cual deriva

$Fx = \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V = \int Fx\, dx = 3yx^2 + 2z^2x + \varphi_1(y,z)$

$\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 3x^2 + 3z = Fy$

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 3z \rightarrow \varphi_1 = \int 3z\, dy = 3zy + \varphi_2(z)$

$V = 3yx^2 + 2z^2x + 3zy + \varphi_2(z)$

$\frac{\partial V}{\partial z} = 4xz + 3y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 4xz + 3y$

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \rightarrow \varphi_2 = \int 0\, dz = c$

$V = 3yx^2 + 2z^2x + 3zy + c$

$F = \text{grad } V$

## b) Método 'ingenioso'

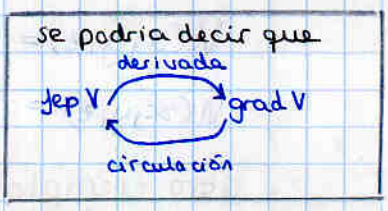
Sabemos que, cuando $\vec{F}$ deriva de potencial $(\vec{F} = -\text{grad}\, U)$

$$C_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -\text{grad}\, U \cdot d\vec{r} = \int_A^B -dU$$

recuerda $dV = \text{grad}\, V \cdot d\vec{r}$

$$C_A^B = \int_A^B -dV = V_A - V_B$$

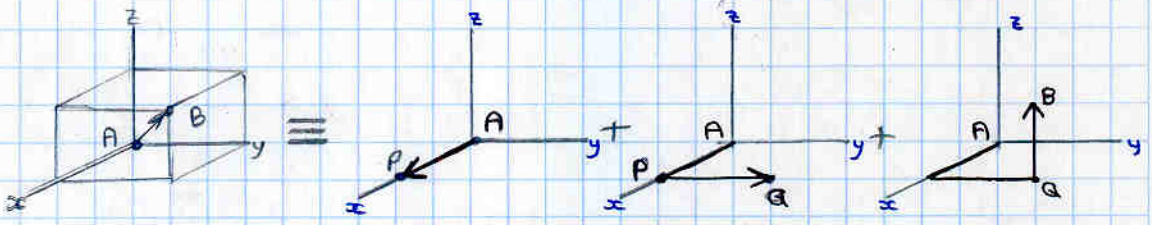
$$C_A^B = V_A - V_B \longrightarrow \boxed{U_B = U_A - C_A^B}$$




si llamamos $V_A$: valor de la fep en un punto conocido.
siempre se necesita un 'origen de potenciales'
$V_B$: valor de la fep en un punto genérico
$V_B = U(x,y,z)$

$$\boxed{U(x,y,z) = U_A - \underbrace{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}}$$

como la circulación en el caso de una $\vec{F}$ derivada de potencial no depende de la curva (aquí viene lo ingenioso) utilizamos una que nos venga bien




$$C_{(0,0,0)A}^{(x,y,z)B} = C_{(0,0,0)A}^{(x,0,0)P} + C_{(x,0,0)P}^{(x,y,0)Q} + C_{(x,y,0)Q}^{(x,y,z)B}$$

$C_{(0,0,0)A}^{(x,0,0)P}$: $dy=0$, $dz=0$, $y=0$, $z=0$

$C_{(x,0,0)P}^{(x,y,0)Q}$: $dx=0$, $dz=0$, $x=cte$, $z=0$

$C_{(x,y,0)Q}^{(x,y,z)B}$: $dx=0$, $dy=0$, $x=cte$, $y=cte$

$$U(x,y,z) = U_A - \left[\int_A^P \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_Q^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]$$

$$= U_A - \left[\int_A^P F_x dx + \cancel{F_y dy} + \cancel{F_z dz} + \int_P^Q \cancel{F_x dx} + F_y dy + \cancel{F_z dz} + \int_Q^B \cancel{F_x dx} + \cancel{F_y dy} + F_z dz\right]$$

$$\boxed{U(x,y,z) = U_A - \left[\int_A^P F_x dx + \int_P^Q F_y dy + \int_Q^B F_z dz\right]}$$

$F_x dx$: $y=0$, $z=0$; $F_y dy$: $x=cte$, $z=0$; $F_z dz$: $x=cte$, $y=cte$

con este método obtienes $U$ tal que $\vec{F} = -\text{grad}\, U$

(obtienes directamente el potencial)

Ejemplos:

$$\vec{F} = (y^2 - 2xyz^3,\ 3 + 2xy - x^2z^3,\ 6z^3 - 3x^2yz^2)$$

$$V(x,y,z) = V_A - \left[\int_{\substack{y=0\\z=0}}^{\cdot}(y^2 - 2xyz^3)\,dx + \int_{\substack{x=cte\\z=0}}^{\cdot}(3 + 2xy - x^2z^3)\,dy + \int_{\substack{x=cte\\y=cte}}^{\cdot}(6z^3 - 3x^2yz^2)\,dz\right]$$

$$V(x,y,z) = V_A - \left[\int 0\,dx + [3y + xy^2]_0^y + [\tfrac{3}{2}z^4 - x^2yz^3]\right]$$

$$V(x,y,z) = V_A - [3y + xy^2 + \tfrac{3}{2}z^4 - x^2yz^3]$$

---

otro ejemplo:

$$\vec{F} = (6xy + 2z^2,\ 3x^2 + 3z,\ 4xz + 3y) \quad = -\text{grad } V$$

$$V(x,y,z) = V_A - \left[\int_{\substack{(0,0,0)\\y=0\\z=0}}^{(x,0,0)}(6xy + 2z^2)\,dx + \int_{\substack{(x,0,0)\\x=cte\\z=0}}^{(x,y,0)}(3x^2 + 3z)\,dy + \int_{\substack{(x,y,0)\\y=cte\\x=cte}}^{(x,y,z)}(4xz + 3y)\,dz\right]$$

$$= V_A - \left[\int 0\,dx + \int_0^y 3x^2\,dy + \int_0^z 4xz + 3y\,dz\right]$$

$$V(x,y,z) = V_A - [3x^2y + 2xz^2 + 3yz]$$

## F. V. Conservativas Radiales

$\vec{F}(r) = F(r)\,\vec{u}_r$

el origen de potenciales

$$U_B(r) = U_A - \int_{r_A}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= U_A - \int_{r_A}^{r} F\,\vec{u}_r\,d\vec{r}$$

$$\boxed{U_B(r) = U_A - \int_{r_A}^{r} F(r)\,dr}$$

ej $\vec{E} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$

origen de potenciales: $r = \infty \quad V_A = 0$

$$U(r) = V_A - \int_{r_A}^{r} \frac{k}{r^2}\,dr$$

$$= -\int_{\infty}^{r} \frac{k}{r^2}\,dr$$

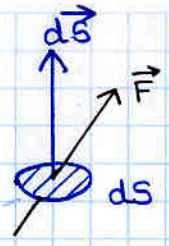
$$= -\left[-k/r\right]_{\infty}^{r}$$

$$= -\left[-k/r + 0\right]$$

$$U(r) = \frac{k}{r}$$

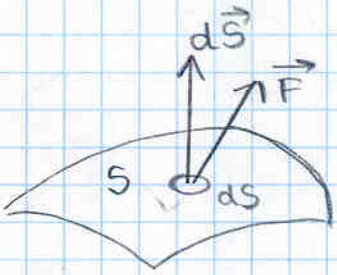
- **Flujo**

↳ Flujo elemental




$$d\Phi = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

↳ Flujo a través de una superficie S




$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Significado Físico

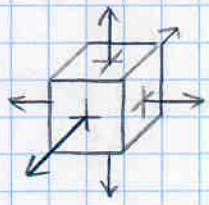
El producto de la componente normal del campo respecto de la superficie, multiplicado por dicha superficie

Si el campo vectorial representa movimiento de masas, el flujo representa el flujo de masa que atraviesa la superficie

ej: campo vectorial velocidad de un fluido. El flujo representa el caudal, volumen de fluido por unidad de tiempo

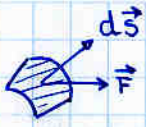
En electromagnetismo, ayuda a entender cosas

Convenio: sentido del vector superficie siempre hacia fuera del volumen

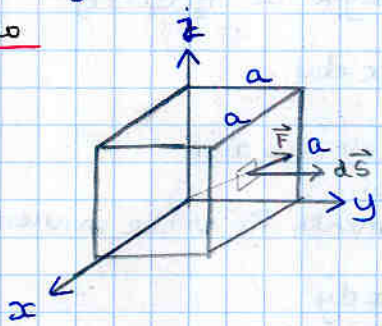


FLUJO

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

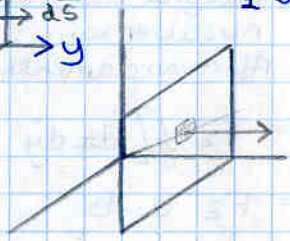



Ejemplo




$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

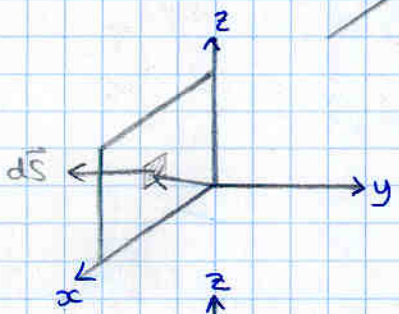
$\Phi$ 6 caras ?



$d\vec{S} = dS\,\vec{j}$

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = y\,dS = a \cdot dS$

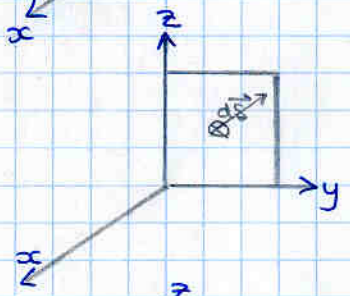
$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = a \int_{S_1} dS = a \cdot a^2 = a^3$




$d\vec{S} = dS(-\vec{j}) = -dS\,\vec{j}$

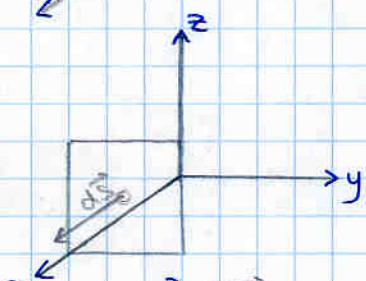
$\vec{F} \cdot d\vec{S} = -y\,dS = 0$

$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$




$d\vec{S} = dS(-\vec{i}) = -dS\,\vec{i}$

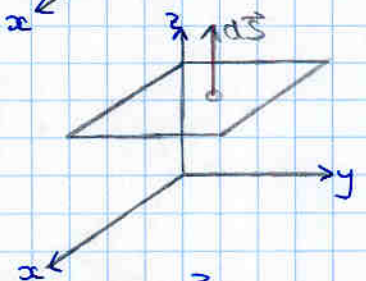
$\vec{F} \cdot d\vec{S} = -x\,dS = 0$




$d\vec{S} = dS\,\vec{i}$

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = x\,dS = a\,dS$

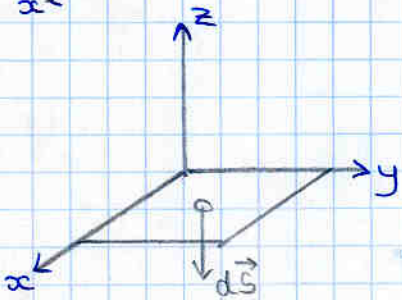
$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = a \int_S dS = a \cdot a^2 = a^3$




$d\vec{S} = dS\,\vec{k}$

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = z\,dS = a\,dS$

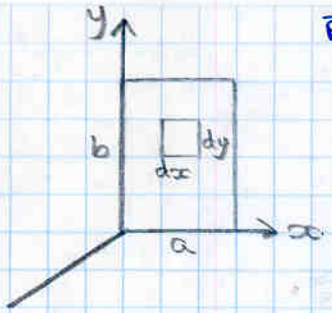
$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = a \int_S dS = a \cdot a^2 = a^3$




$d\vec{S} = dS(-\vec{k})$

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = z\,dS = 0$

$\Phi_{6\,caras} = a^3 + a^3 + a^3 + 0 + 0 + 0 = 3a^3$




$\vec{F}(x,y,z)$

$$d\vec{S} = dx \cdot dy \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{F} \cdot dx\,dy\,\vec{k} = F_z\,dx\,dy$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_0^b \int_0^a F_z\,dx\,dy}$$

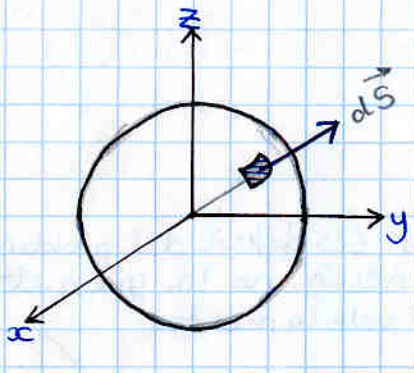
integral doble que aún no sabemos.

Afortunadamente $F_z$ es cte en nuestros ejercicios

$$= F_z \int_0^b \int_0^a dx\,dy$$

$$= F_z \cdot a \cdot b$$

## Flujo a través de superficie esférica radio R centro en O (0,0,0)




$\vec{F} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

pensando

$\vec{F} = \vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{u}_r$

en radial será todo mas facil

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = (r \cdot \vec{u}_r) \cdot (dS \cdot \vec{u}_r)$

$= r \cdot dS$

particularitas ¿cuanto vale r en este dS?

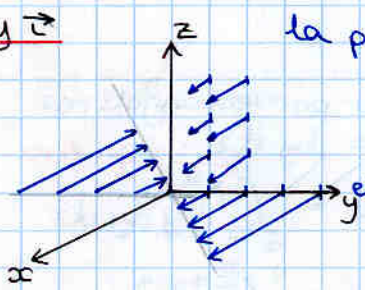
$= R \cdot dS$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S R \cdot dS = R \int_S dS$$

afortunadamente R no cambia y sale fuera

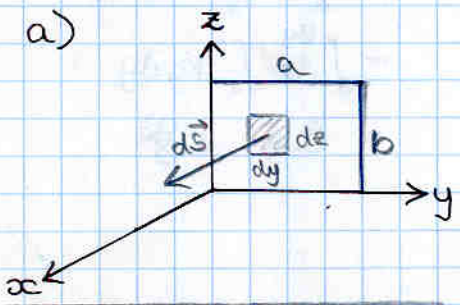
$$\Phi = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

$\vec{F} = Ky\,\vec{i}$ la pinta de la función es:




en todos los planos de z y de x

a)




$d\vec{S} = dS\,\vec{i}$

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = Ky\,dS$ $= K\int_S y\,dS$

$dS = dy\,dz$

$= Ky\,dy\,dz$

$$\Phi = \int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a Ky\,dy\,dz$$

$$= K \underbrace{\int_0^b \int_0^a y\,dy\,dz}$$

esta integral doble es sencilla y se puede separar en 2

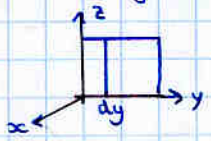
$$= K \int_0^b dz \int_0^a y\,dy$$

$$= Kb \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a$$

$$\Phi = \frac{Kba^2}{2}$$

Cuando se tiene mas habilidad =

como $\vec{F}$ solo depende de y, en lugar de descomponer el rectangulo en cuadraditos lo descompongo en tiras




$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

$d\vec{S} = b\,dy\,\vec{i}$

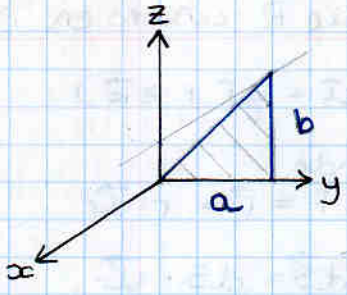
$$\Phi = \int_0^a Kyb\,dy$$

$$= Kb \int_0^a y\,dy$$

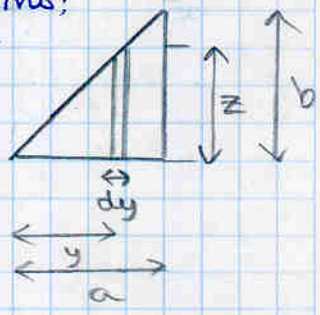
$$= \frac{Kba^2}{2}$$

Ejemplo: $\vec{F} = Ky\,\vec{\imath}$

b)




1. Descomponer la superficie en diferenciales (lo difícil del problema) ¿cómo descomponerla? nos lo dirá la función, no la geometría de la superficie. ¿En qué lugares $\vec{F}$ vale lo mismo?




Hay que encontrar un $dS$ tal que $\vec{F}$ valga lo mismo en ese $dS$

$$d\vec{S} = dy \cdot z\,\vec{\imath}$$

2. $$\Phi = \int_S Kyz\,dy$$

$$= \int_0^a Ky \frac{b}{a} y\,dy$$

$$= K\frac{b}{a}\int_0^a y^2\,dy$$

$$= K\frac{b}{a}\,\frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{Kba^2}{3}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{b}{a}$$

$$z = \frac{b}{a}y$$

se puede hacer por rectangulitos

$$dS = dy\,dz$$

$$\Phi = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{z} \int_0^{a} Ky\,dy\,dz$$ (z genérica)

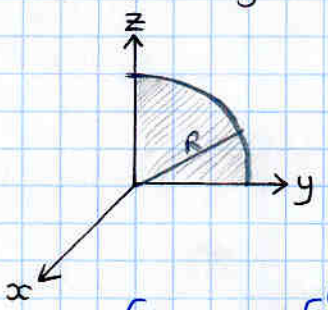
$$= \int_0^{\frac{b}{a}y} \int_0^{a} Ky\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{by}{a}} dz \int_0^{a} Ky\,dy$$

$$= \frac{b}{a}y \cdot K\frac{a^2}{2}$$

ejemplo:

$\vec{F} = Ky\,\vec{\imath}$




$d\vec{S} = dy \cdot z\,\vec{\imath}$

$z = \sqrt{R^2 - y^2}$

$d\vec{S} = \sqrt{R^2 - y^2}\,dy\,\vec{\imath}$

$\vec{F} \cdot d\vec{S} = Ky\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^R Ky\sqrt{R^2-y^2}\,dy = K\int_0^R y\,(R^2-y^2)^{1/2}\,dy$$

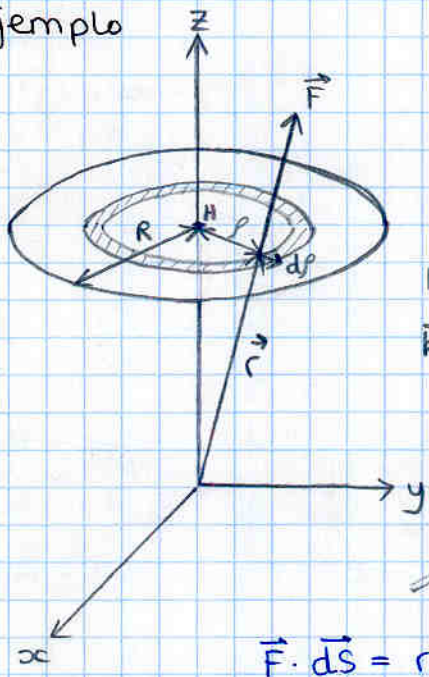
$$= \tfrac{1}{2}K\int_0^R 2y\,(R^2-y^2)^{1/2}\,dy = \tfrac{1}{2}K\left[\tfrac{2}{3}(R^2-y^2)^{3/2}\right]_0^R$$

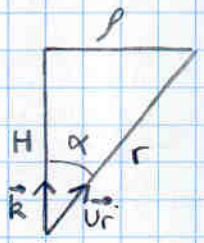
$$= \tfrac{1}{2}K\left(-\tfrac{2}{3}R^3\right) = K\frac{R^3}{2}$$

---

ejemplo

$\vec{F} = r3 \cdot \vec{u}_r$



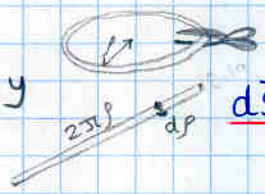




los dS los tomamos como aros de radio ρ y anchura dρ, en cada aro |F| es constante

$dS = \pi(\rho+d\rho)^2 - \pi\rho^2$

$= \pi(\rho^2 + 2\rho\,d\rho + d\rho^2) - \pi\rho^2$ (se desprecia)

$= 2\pi\rho\,d\rho + \pi\rho^2 - \pi\rho^2$




$d\vec{S} = 2\pi\rho\,d\rho\,\vec{k}$

$\vec{F}\cdot d\vec{S} = r^3\,2\pi\rho\,d\rho\,(\vec{k}\cdot\vec{u}_r)$

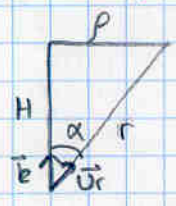
$|\vec{k}|\cdot|\vec{u}_r|\cdot\cos\alpha = 1\cdot 1\cdot\frac{H}{r}$

→ otra forma

$\vec{k}\cdot\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right) = \frac{z}{r} = \frac{H}{r}$

por trigonometría

$\cos\alpha = \frac{H}{r}$




$\vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{H}{r}r^3\,2\pi\rho\,d\rho$

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = H\int_0^R r^2\,2\pi\rho\,d\rho$$

por pitágoras $r^2 = H^2 + \rho^2$

$$= H\int_0^R (H^2+\rho^2)\,2\pi\rho\,d\rho$$

$$= 2\pi H\int_0^R H^2\rho + \rho^3\,d\rho$$

$$= 2\pi H\left[\frac{H^2\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = 2\pi H\left[\frac{H^2R^2}{2} + \frac{R^4}{4}\right]$$

$$= \cancel{2}\pi H\left[\frac{\cancel{2}H^2R^2 + R^4}{\cancel{4}}\right] = \pi H R^2(H^2+R^2)$$

# • Divergencia de $\vec{F}$

$\vec{F}$ f.v.p. $\longrightarrow$ div $\vec{F}$ f.e.p.

## Significado físico

Divergencia en un punto del espacio;
Lo rodeo por un diferencial de volumen
Calculo el flujo a través de esa superficie infinitesimal que limita el volumen.
Divido por el volumen.

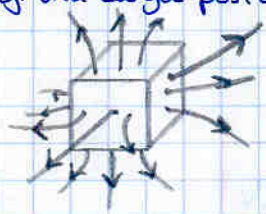
$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\partial V \to 0} \frac{1}{\partial V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{d\Phi}{dV}$$ La divergencia es el flujo por unidad de volumen en un punto.

• **Fuente o manantial**

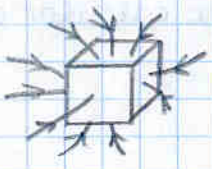
$\Phi > 0 \rightarrow \vec{F}$ 'sale' del volumen $\rightarrow$ div $\vec{F} > 0$

ej. una carga positiva



• **Sumidero**

$\Phi < 0 \rightarrow \vec{F}$ 'entra' al volumen $\rightarrow$ div $\vec{F} < 0$

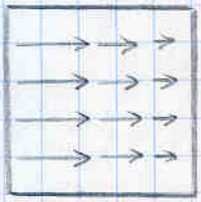


ej. una carga negativa

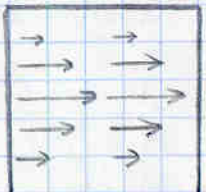
• **Solenoidal**

$\Phi = 0 \rightarrow \vec{F}$ entrando es igual a $\vec{F}$ saliendo $\rightarrow$ div $\vec{F} = 0$

ejercicio / ejemplo:
¿cómo es div $\vec{F}$?

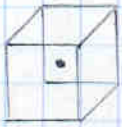


div $\vec{F} < 0$



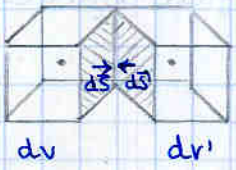
div $\vec{F} = 0$

## • Teorema de la divergencia



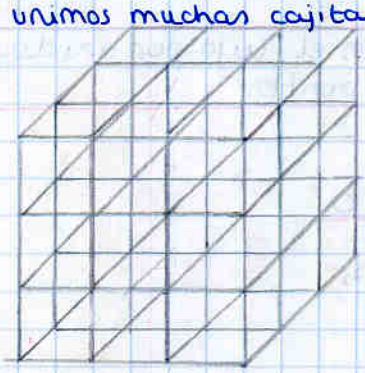

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{d\Phi}{dv}$$

Si unimos mas 'cajitas' dv:




la cara en contacto se anula ya que $d\vec{S} = -d\vec{S}'$, y la suma de sus flujos $\vec{F}\cdot d\vec{S} + \vec{F}\cdot d\vec{S}' = \vec{F}\cdot dS - \vec{F}\cdot dS = 0$

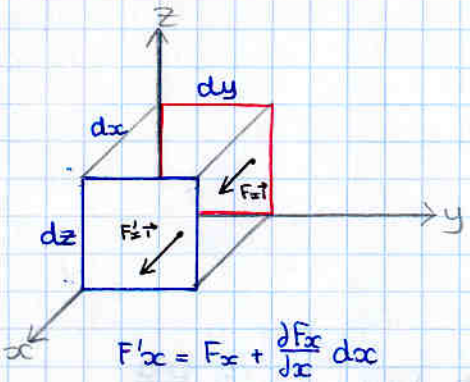
Si unimos muchas cajitas infinitesimales para hacer un volumen



$\Phi_{\text{TOTAL SUPERFICIE CERRADA DEFINIDA POR EL VOLUMEN}} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$

Esto supone una manera alternativa para calcular el flujo.

## · Divergencia en cartesianas




$d\Phi_{\text{cara fija}} = \vec{F} \cdot d\vec{S} = -F'_x\, dz\, dy$

$d\Phi_{\text{cara alta}} = \vec{F}' \cdot d\vec{S}' = F'_x\, dz\, dy$

los sumamos

$d\Phi_x = (F'_x - F_x)\, dz\, dy$

$F'_x = F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$

por lo tanto

$F'_x - F_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$

$d\Phi_x = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx\right) dz\, dy$

$d\Phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dV$

el mismo procedimiento se puede seguir con los otros dos pares de caras

$d\Phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dV$

$d\Phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} dV$

$d\Phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} dV$

de el teorema de la divergencia → $d\Phi_{TOT} = \text{div}\vec{F} \cdot dV = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \cdot dV$

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$ ¡ESCALAR!

se puede escribir utilizando el operador Nabla $\equiv \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

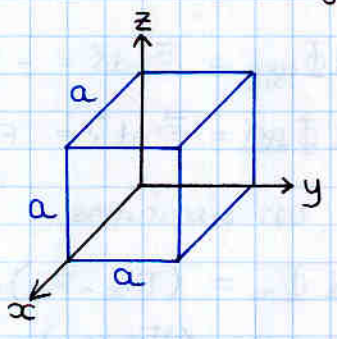
ESCALAR, (no como $\nabla F$ = grad F q es vector.)

ejemplo

Calcular el flujo aplicando el teorema de la divergencia

$$\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

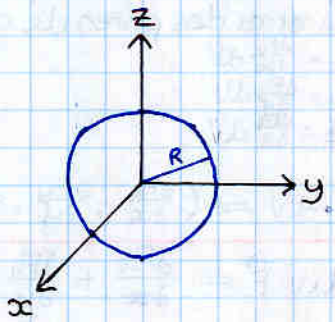
$\Phi_{CUBO}$




$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1+1+1 = 3 \quad \frac{[F]}{L}$$

$$\Phi_{CUBO} = \int_0^V \text{div}\,\vec{F}\, dV = 3\int_0^V dV = 3V = 3a^3$$

$\Phi_{ESFERA}$




$$\Phi_{ESFERA} = \int_0^V \text{div}\,\vec{F} \cdot dV = 3\int_0^V dV = 3\,\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$$

Cuando $\text{div}\,\vec{F} = cte$, calcular el flujo es muy simple

$\vec{F} = y^2z\,\vec{i} + z^2x\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$

$\Phi$ SUP. ESFERICA RADIO R CENTRO EN O

hay que elegir si por cálculo directo $(d\vec{S}, \vec{F}\cdot\vec{dr})$ o por T. divergencia

$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{y} + \frac{\partial F_z}{z} = 0$

$\Phi = \int_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv = 0$

---

ej: $\vec{F} = ax^3\,\vec{i} + ay^3\,\vec{j} + az^3\,\vec{k}$

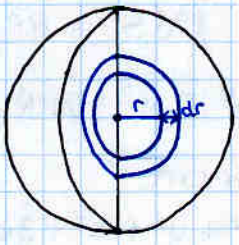
$\Phi$ SUP. ESFÉRICA RADIO R CENTRO EN O

$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3ax^2 + 3ay^2 + 3az^2$

$= 3ar^2$

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint_V 3ar^2\,dv$$

como no sabemos hacer integrales triples, necesitamos un dV que tenga $\operatorname{div}\vec{F}$ cte. puntos a una misma distancia del origen con un espesor dr




$dV = 4\pi\underbrace{(r+dr)^3}_{\text{desarrollando e ignorando potencias de dr}} - 4\pi r^3$

$$\boxed{dV = 4\pi r^2\,dr}$$

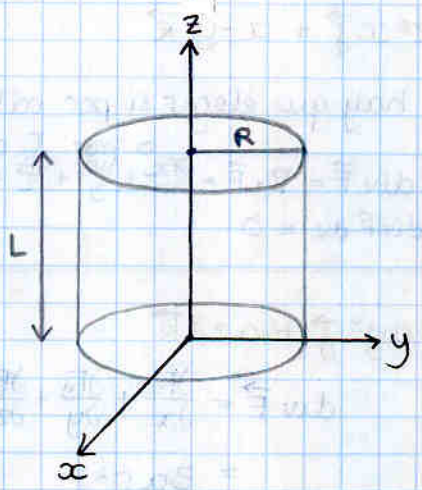
$\Phi = \int_V 3ar^2\,dv = \int_V 3ar^2\,4\pi r^2\,dr = \int_0^R 3ar^3\,4\pi\,dr$

$\Phi = 12\pi a\int_0^R r^3\,dr$

Si se pidiera el flujo de una corteza cambiarían los límites de integración a $R_1$ y $R_2$

ejemplo: $\vec{F} = (x^3 + xy^2)\vec{i} + (yx^2 + y^3)\vec{j}$

$\Phi$ SUP LATERAL CILINDRO RADIO R ALTURA L APOYADO EN $\pi$ XY Y SU EJE COINCIDE CON EJE Z




→ Por cálculo directo:

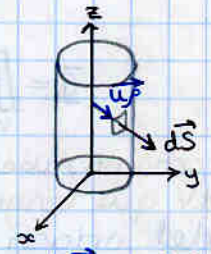
un pequeño arreglo para que $\vec{F}$ quede radial.

$\vec{F} = (x^2+y^2)x\vec{i} + (x^2+y^2)y\vec{j}$

$= (x^2+y^2)(x\vec{i} + y\vec{j})$

$= \rho^2 \vec{\rho}$

$= \rho^3 \vec{u}_\rho$




$d\vec{S} = dS\,\vec{u}_\rho$

$\vec{F}\cdot d\vec{S} = (\rho^3 dS)(\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\rho) = \rho^3 dS = R^3 dS$ ($\rho = R$ ya que estamos hablando de la superficie del cilindro (no el volumen))

$\Phi = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_S R^3 dS = R^3 \int_S dS = R^3 \cdot 2\pi R \cdot L = 2\pi L R^4$

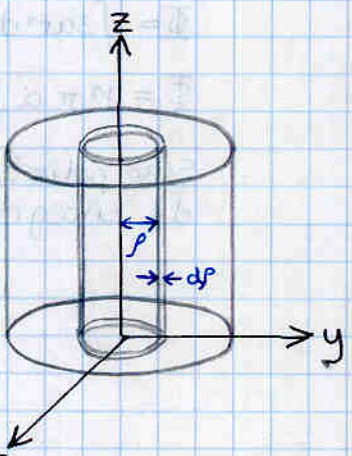
→ Por teorema de la divergencia

$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2 = 4(x^2+y^2) = 4\rho^2$

necesitamos $V \to dV$

¿Qué puntos tienen misma div $\vec{F}$? misma distancia al eje z; para que sea volumen le damos anchura

$$\boxed{dV = L \cdot 2\pi\rho\, d\rho}$$




T. de la divergencia

$\Phi_{\text{SUP CERRADA}} = \int_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV$

$= \int_0^R 4\rho^2 \cdot L \cdot 2\pi\rho\, d\rho = 8\pi L \int_0^R \rho^3 d\rho$

$= 8\pi L \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = 2\pi L R^4$

$\Phi_{\text{SUP LATERAL}} = 2\pi L R^4 - \Phi_{B1} - \Phi_{B2}$

$\Phi_{B1} = \int_{B1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int \vec{F}\cdot dS\cdot \vec{k} = 0$

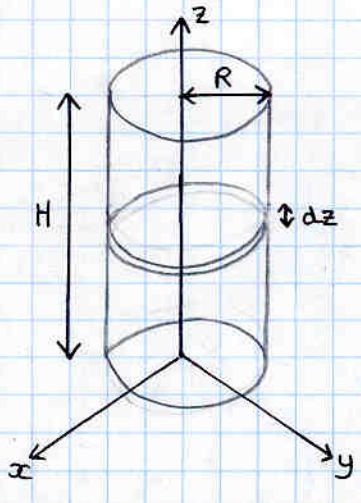
$\Phi_{B2} = 0$

$\Phi = 2\pi L R^4$

La elección de dV es de las partes mas difíciles para calcular el flujo utilizando el teorema de la divergencia. El truco es escoger dV's que tengan la divergencia constante. Éstos son ejemplos típicos:

## CILINDRO

$\operatorname{div}\vec{F} = f(z)$

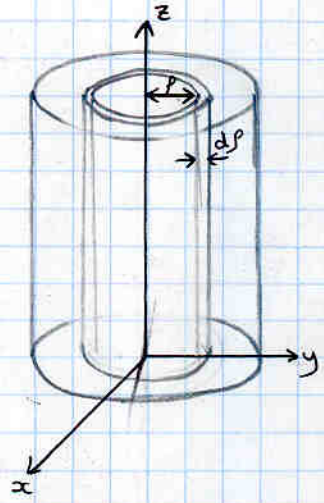



$dV = \pi R^2 dz$

$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$

$= \int_0^H f(z)\,\pi R^2 dz$

$\operatorname{div}\vec{F} = f(\rho)$

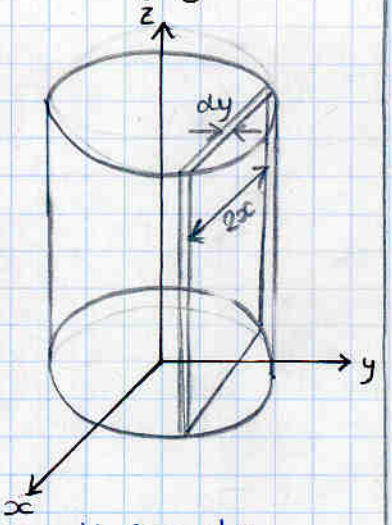



$dV = 2\pi\rho\, d\rho \cdot H$

$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$

$= \int_0^R f(\rho)\, 2\pi\rho\, d\rho\, H$

$\operatorname{div}\vec{F} = f(y)$




$dV = H \cdot 2x \cdot dy \quad (x = \sqrt{R^2 - y^2})$

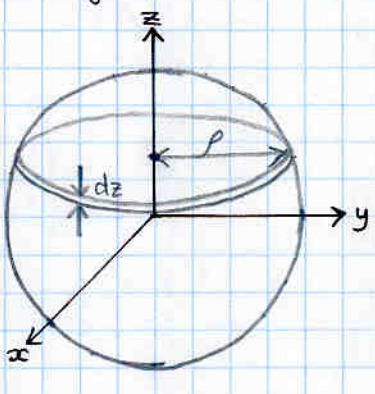
$= 2H\sqrt{R^2 - y^2}\, dy$

$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$

$= \int_{-R}^{R} f(y)\, 2H\sqrt{R^2 - y^2}\, dy$

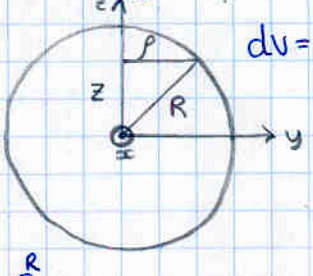
## ESFERA

$\operatorname{div}\vec{F} = f(z)$



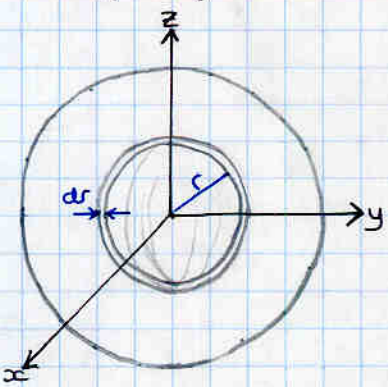

$dV = \pi\rho^2\, dz \quad (\rho^2 + z^2 = R^2)$

$dV = \pi(R^2 - z^2)dz$




$\Phi = \int_{-R}^{R} f(z)\,\pi(R^2 - z^2)\, dz$

$\operatorname{div}\vec{F} = f(r)$




$dV = \frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$\boxed{dV = 4\pi r^2\, dr}$

$\Phi = \iiint_R \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$

$= \int_0 f(r)\cdot 4\pi r^2\, dr$

## • Rotacional de $\vec{F}$

$U_{jep} \rightarrow \text{grad } U_{jvp}$

$\vec{F}_{jvp} \rightarrow \text{div } \vec{F}_{jep}$, $\text{rot } \vec{F}_{jvp}$

### – Dirección

→ tomamos un $d\vec{S}$ en un punto

→ calculamos la circulación de su contorno

→ la dirección de $d\vec{S}$ en la cual la circulación es máxima es la del rotacional

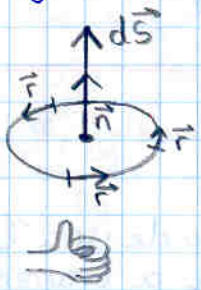
$C = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

– La dirección del rotacional es la de $d\vec{S}$ para la cual la circulación del contorno de dicho dS es máxima.

### – Sentido

Depende de como calculemos la circulación

↳ regla de la mano derecha.



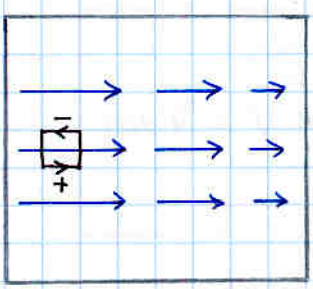
Cuidado: si el módulo de la circulación da negativa entonces $\text{rot } \vec{F} = 0 \cdot -\vec{n}$

### – Módulo

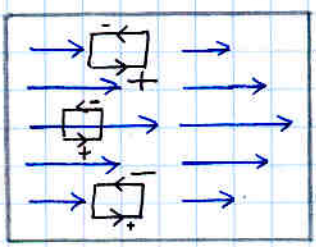
$$|\text{rot } \vec{F}| = \lim_{S_i \to 0} \frac{\left(\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}\right)_{MAXIMA}}{S_i} = \frac{dC}{dS}$$

$S_i \to 0$: superficie infinitesimal

**Ejemplo**



$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

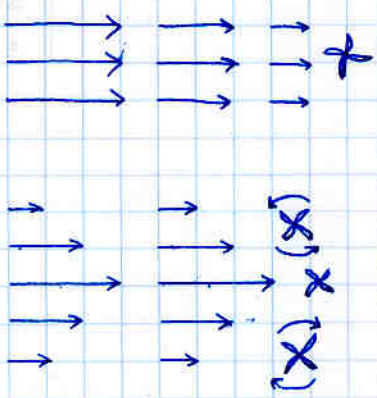


$\text{rot } \vec{F} > \vec{0}$

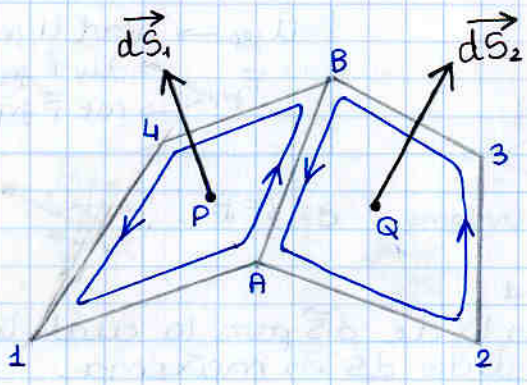
$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

$\text{rot } \vec{F} < \vec{0}$

Representación con partículas cuando $\text{rot } \vec{F} = 0$, si pones un molinillo éste no gira



- Circulación neta entre dos elementos contiguos




$$\text{rot}\,\vec{F}(P)\cdot d\vec{S}_1 = C_1^A + C_A^B + C_B^4 + C_4^1$$
$$\text{rot}\,\vec{F}(Q)\cdot d\vec{S}_2 = C_A^2 + C_2^3 + C_3^B + C_B^A$$

como $C_A^B = -C_B^A$

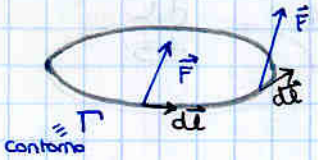
$$\text{rot}\,\vec{F}(P)\cdot d\vec{S}_1 + \text{rot}\,\vec{F}(Q)\cdot d\vec{S}_2 = C_1^A + C_A^2 + C_2^3 + C_3^B + C_B^4 + C_4^1$$
= circulación del contorno exterior

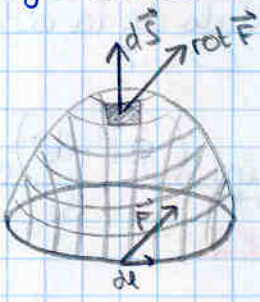
La circulación neta en el tramo común AB es nula. Sólo permanece la circulación en el contorno exterior.

$$\text{rot}\,\vec{F}(P)\cdot d\vec{S}_1 + \text{rot}\,\vec{F}(Q)\cdot d\vec{S}_2 = \oint_{\text{contorno exterior}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

- Teorema de Stokes

"La circulación del campo vectorial a lo largo de una línea cerrada es igual al flujo de su rotacional a través de cualquier superficie cuyo contorno coincida con el de dicha línea"




$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_{S} \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

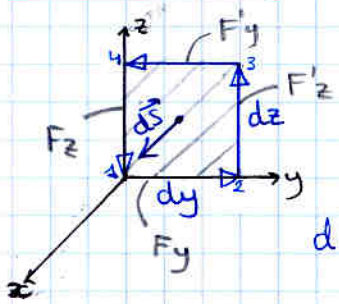
## • El rotacional en cartesianas. Deducción

$$\text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = dC$$
$$= (\text{rot}\,\vec{F})_x (d\vec{S})_x + (\text{rot}\,\vec{F})_y (d\vec{S})_y + (\text{rot}\,\vec{F})_z (d\vec{S})_z$$

para obtener las componentes x, y, z de rot $\vec{F}$ se puede coger un $d\vec{S}$ con componente solo en x, y o z; de manera que, si $d\vec{S} = (dS_x, 0, 0)$ $\quad (\text{rot}\,\vec{F})_x (dS) = dC$

pudiendo obtener por separado las componentes de rot $\vec{F}$ tomando dichos $d\vec{S}$.

**Para $(\text{rot}\,\vec{F})_x$**




$$dC = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$dC_{41}^{2} = \vec{F}\cdot dy\,\vec{j} = Fy\,dy$$
$$dC_{34}^{4} = \vec{F}'\cdot(-dy)\vec{j} = -F'y\,dy$$
$$dC_{23}^{3} = F'z\cdot(dz)\vec{k} = F'z\,dz$$
$$dC_{14}^{1} = Fz\cdot(-dz)\vec{k} = -Fz\,dz$$

$$F'z = Fz + \frac{\partial Fz}{\partial y}dy$$

$$F'y = Fy + \frac{\partial Fy}{\partial z}dz$$

$$dC_{TOT} = \underbrace{Fy\,dy + -F'y\,dy}_{(-\frac{\partial Fy}{\partial z}dz)\,dy} + \underbrace{F'z\,dz + -Fz\,dz}_{(\frac{\partial Fz}{\partial y}dy)\,dz}$$

$$dC = \left(\frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z}\right)dy\,dz = (\text{rot}\,F)_x \cdot \underbrace{dS_x}_{dy\,dz}$$

$$(\text{rot}\,F_x) = \frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z}$$

Se procede de igual manera con $(\text{rot}\,\vec{F})_y$ y con $(\text{rot}\,\vec{F})_z$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y}\right)\vec{k}$$

recuerda que $\vec{j}$ tiene el signo cambiado y por lo tanto hace bc − ad

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

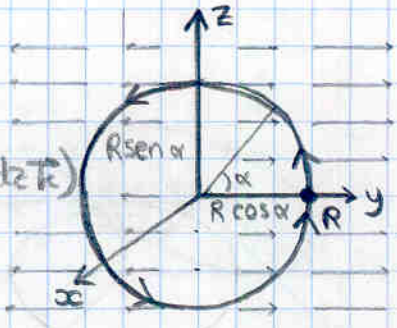
ejemplo $\vec{F} = ax^2y\,\vec{i} + b(y^2+xz)\,\vec{j} + cy^2 \operatorname{sen} x\,\vec{k}$

Se pide circulación de la circunferencia $x=0$ $\quad y^2+z^2=R^2$

a) Cálculo directo

como $x=0$

$\vec{F}$ queda: $\vec{F} = by^2\vec{j}$




$$C = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad by^2\vec{j}\cdot(dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k})$$

$$= \oint by^2\,dy$$

$$= \int_R^R by^2\,dy = 0 \;//$$

también se podría hacer sustituyendo $\quad y = R\cos\alpha$

$dy = -R\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha$

e integrando entre 0 y $2\pi$

b) Stokes

$$C = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = (2cy\operatorname{sen}x - bx)\,\vec{i} + (-cy^2\cos x)\,\vec{j} + (bz - ax^2)\,\vec{k}$$

en $x=0$ ← Esto hay que hacerlo DESPUES de calcular el rotacional

$$\operatorname{rot}\vec{F} = (-cy^2)\,\vec{j} + (bz)\,\vec{k}$$

$$d\vec{S} = dS\,\vec{i}$$

$$C = \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0$$

ejemplo: $\vec{F} = az\,\vec{i} + bx\,\vec{j} + cy\,\vec{k}$

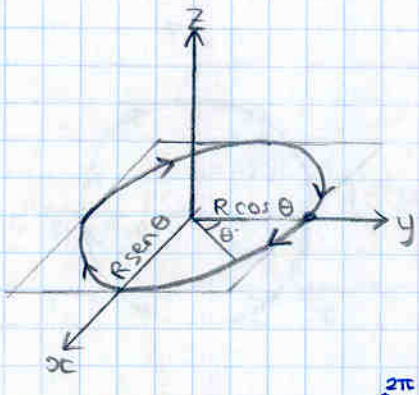
$x(t) \to dx = \frac{dx(t)}{dt}\,dt$

$y(t) \to dy = \frac{dy(t)}{dt}\,dt$

$z(t) \to dz = \frac{dz(t)}{dt}\,dt$

Circulación de la circunferencia radio R, $z=0$, centro O

a) Cálculo Directo




$$C = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + \underbrace{dz\,\vec{k}}_{=0}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$

$$= \oint (az\,\vec{i} + bx\,\vec{j} + cy\,\vec{k})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j})$$

$$= \oint az\cdot dx + bx\cdot dy$$

$(z=0)$

$$\boxed{C = \oint bx\,dy} \leftarrow \begin{cases} x = R\,\text{sen}\,\theta \\ y = R\cos\theta \\ dy = -R\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$C = b\int_0^{2\pi} R\,\text{sen}\,\theta\,(-R\,\text{sen}\,\theta\,d\theta)$$

$$= -bR^2\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= -bR^2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= -bR^2\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$C = -bR^2\pi \quad \text{calculada en sentido horario}$$

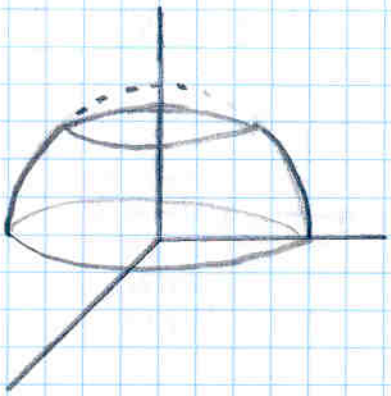
b) Stokes

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (c\,\vec{i} + a\,\vec{j} + b\,\vec{k})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\vec{F} &= c\,\vec{i} + a\,\vec{j} + b\,\vec{k} \\ d\vec{S} &= dS\cdot\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = b\,dS$$

$$C = \int_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_S b\,dS = b\pi r^2 \quad \text{calculada en sentido antihorario}$$

Ejercicio $\vec{F} = y^2\,\vec{i} + (yz - x^2)\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$



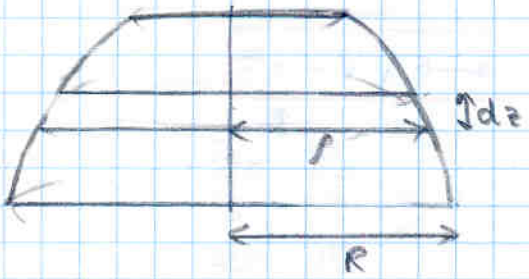
tiene buena pinta por el teorema de la divergencia

$$\operatorname{div}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)$$

¡ESCALAR!

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = 0 + z + 2z = 3z$$

$dv$? para que sea constante: planos paralelos a $z = 0$




$$dv = \pi\rho^2\,dz$$

$$\rho = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$dv = \pi(R^2 - z^2)\,dz$$

- Cuando F.V.P $\Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$

$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{\Delta} V$$

$$\vec{F} = -\nabla V \longrightarrow \text{div}\,\vec{F} = -\Delta V$$

↑ deriva de pot — ↑ op Laplaciano

Un nuevo amigo:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Operador Laplaciano**
operador escalar que actua sobre escalares, el resultado es escalar

$$\text{rot}\,\vec{F} = \text{rot}(-\nabla V) = \nabla \times (-\nabla V) = 0 \quad \text{SIEMPRE}$$

$$\vec{F} = -\nabla V \longleftrightarrow \text{rot}\,\vec{F} = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

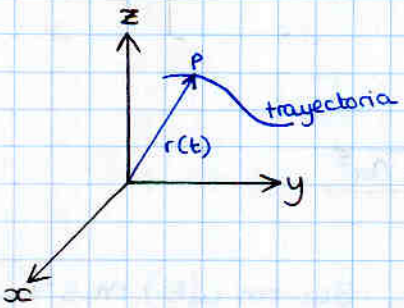
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$$

# LECCION 5. CINEMATICA DEL PUNTO

Objeto: Estudio del movimiento del punto material sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Punto material: Volumen cero, no hay rotación sobre su centro de masas

Estudio del "movimiento absoluto" variación con el tiempo de la posición de un punto respecto a un sistema de referencia fijo.




Vector posición de un punto $P(x,y,z)$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Como la posición varía con el tiempo

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Función vectorial de variable escalar

- **Velocidad de $P(x,y,z)$**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \equiv \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

es siempre tangente a la trayectoria

→ En el triedro intrínseco

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{T}$$

El módulo de la velocidad se llama celeridad

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- **Aceleración de $P(x,y,z)$**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

→ En el triedro intrínseco

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}\vec{N}$$

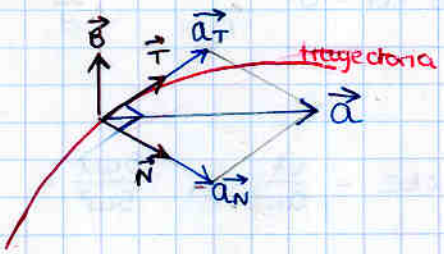
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|\vec{T})}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\cdot\vec{T} + |\vec{v}|\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N} \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{N}\cdot|\vec{v}|$$

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\cdot\vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}\vec{N}$$




- $\vec{a}$ está contenido en el plano formado por $\vec{N}$ y $\vec{T}$ (osculador)
- Tiene 2 componentes

· aceleración tangencial

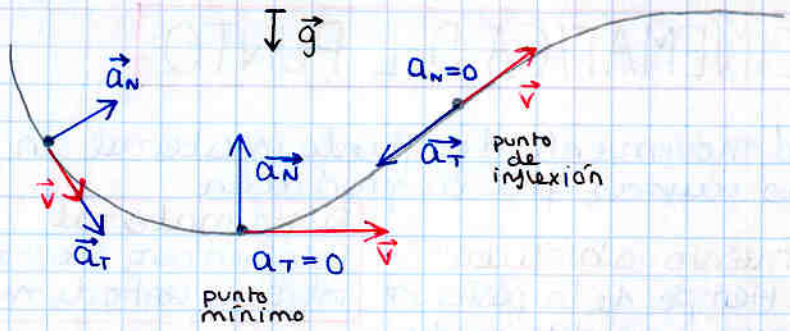
$$\vec{a}_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{T}$$

· aceleración normal

$$\vec{a}_N = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}\vec{N}$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_T|^2 + |\vec{a}_N|^2$$

## ejemplo de componentes de la aceleración




Ejercicio: calcular componentes de la aceleración dado

$$\vec{r}: \begin{cases} x = 5\cos \omega t \\ y = 4 \operatorname{sen} \omega t \\ z = 3 \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow{|\vec{a}|} a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

$$\xrightarrow{|\vec{v}|} |\vec{a}_T| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-5\omega \operatorname{sen} \omega t,\ 4\omega \cos \omega t,\ 3\omega \cos \omega t)\ m \cdot s^{-1}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(5\omega \operatorname{sen} \omega t)^2 + (4\omega \cos \omega t)^2 + (3\omega \cos \omega t)^2}$$
$$= \sqrt{25\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + (16\omega^2 + 9\omega^2)(\cos^2 \omega t)}$$
$$= \sqrt{25\omega^2 (\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}$$
$$= 5\omega\ m \cdot s^{-1}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0\ m \cdot s^{-2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-5\omega^2 \cos \omega t,\ -4\omega^2 \operatorname{sen} \omega t,\ -3\omega^2 \operatorname{sen} \omega t)\ m \cdot s^{-2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(25\omega^4)(\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t)}$$
$$= 5\omega^2\ m \cdot s^{-2}$$

$$|a_N| = \sqrt{a^2 - a_T^2} \qquad \text{como } a_T = 0$$
$$= a$$
$$a_N = 5\omega^2\ m \cdot s^{-2}$$

como $|\vec{a}_N| = cte$, $|\vec{v}| = cte$ $\rightarrow$ $\rho = cte = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(5\omega)^2}{5\omega^2} = 5\ m$

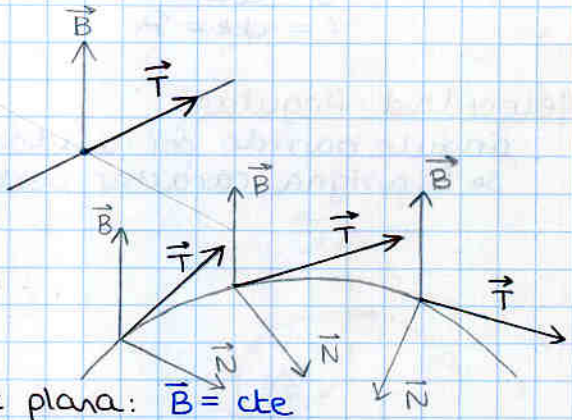
- **Clasificación de movimientos**

↳ Según trayectoria

Rectilínea

$\vec{T} = cte$

$\left|\frac{1}{\rho}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \rightarrow \rho = \infty$

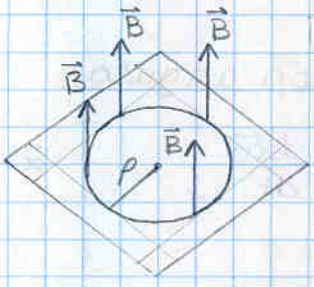



Curvilínea

$\vec{T} \neq cte$

↳ Trayectoria plana: $\vec{B} = cte$

↳ circular: $\rho = cte$




↳ Según relación entre arco recorrido y tiempo

Uniforme

$\frac{ds}{dt} = cte$

Variado

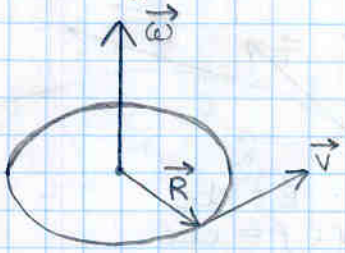
$\frac{ds}{dt} = f(t)$

↳ si $a_T = cte$ → Uniformemente variado

## Movimiento circular

- La trayectoria es una circunferencia radio R en un plano
  $\vec{B} = cte$
  $\rho = cte = R$

- **Velocidad Angular**
  ángulo barrido por unidad de tiempo.
  Se le asigna carácter vectorial ⊥ al π de la circunferencia




$$|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt} \quad rad \cdot s^{-1} \quad [\omega] = T^{-1}$$

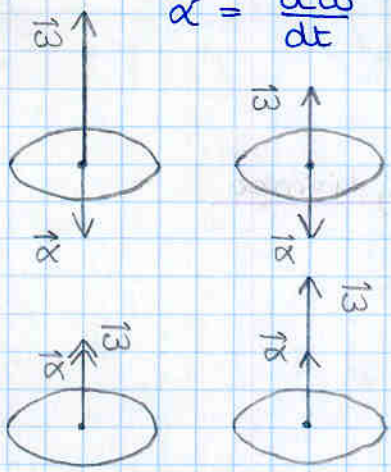
Relación entre $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$

$$v = \omega R$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

- **Aceleración angular**

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

ej:




$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \cdot \vec{u}_\omega)}{dt} \quad \vec{u} \text{ no cambia}$$
$$= \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{u}_\omega$$

- dirección de $\vec{\omega}$
- sentido depende de si $\omega$ crece o decrece.

Relación entre $\vec{a}$ y $\vec{\alpha}$

$$a_T = \alpha \cdot R \qquad a_N = \omega^2 \cdot R$$
$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{R} \qquad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

aceleración en términos de $\vec{\alpha}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\alpha}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{R}}_{\text{dirección } \vec{T} \ (\vec{a}_T)} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{dirección } \vec{N} \ (\vec{a}_N)}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha$$
$$a_N = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

## Movimiento circular uniforme

$$a_T = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \omega = cte$$

T (periodo): tiempo que se tarda en dar una vuelta

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

f (frecuencia): Número de vueltas por segundo

$$f = \frac{1}{T}$$

## PROBLEMAS DE CINEMÁTICA

**DATO:** $\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow |\vec{v}(t)| \longrightarrow a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow |\vec{a}(t)| \longrightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

**DATO:** $\vec{a}$

$\vec{a}(t)$

$t=0$ $\quad \vec{v} = \vec{v}_0$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t).dt$$

$t=0$ $\quad \vec{r} = \vec{r}_0$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t).dt$$

$\vec{a}(v)$

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\int \frac{dv}{a(v)} = \int dt$$

$t=0$ $\quad \vec{v} = \vec{v}_0$

$\vec{v}(t)$

Ejercicio:

Datos:

- movimiento sobre OX
- $\vec{a}$ opuesta a $\vec{v}$

$$a = -c\sqrt{v}$$

- $t=0 \rightarrow x=0 \rightarrow v=v_0$

Se pide:

$t_{v=0}$? $x_{v=0}$?

$$\vec{v} = v\vec{i}$$

$$\vec{a} = -c\sqrt{v}\,\vec{i} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{i}$$

$$\frac{dv}{dt} = -c\sqrt{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v}}\,dv = -c\,dt$$

3 formas de hacerlo

integral definida, v genérico

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^{1/2}}\,dv = \int_0^t -c\,dt$$

$$\left[\frac{\sqrt{v}}{1/2}\right]_{v_0}^{v} = \left[-ct\right]_0^t$$

$$2\sqrt{v} - 2\sqrt{v_0} = -ct$$

$$\rightarrow v(t) = \left(-\frac{ct}{2} + \sqrt{v_0}\right)^2$$

$v=0 \rightarrow t_{v=0} = \frac{2\sqrt{v_0}}{c}$

$v_0$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{1}{v^{1/2}}\,dv = \int_0^{t_{v=0}} -c\,dt$$

$$\left[\frac{\sqrt{v}}{1/2}\right]_{v_0}^{0} = \left[-ct\right]_0^{t_{v=0}}$$

$$-2\sqrt{v_0} = -ct_{v=0}$$

$$\rightarrow t_{v=0} = \frac{2\sqrt{v_0}}{c}$$

con este método, aunq el más rápido, no se obtiene v(t)

integral indefinida

$$\int \frac{1}{v^{1/2}}\,dv = \int -c\,dt$$

$$2\sqrt{v} = -ct + cte$$

utilizando condiciones iniciales $t=0$ $v=v_0$

$$2\sqrt{v_0} = 0 + cte$$

$$cte = 2\sqrt{v_0}$$

$$2\sqrt{v} = -ct + 2\sqrt{v_0}$$

$$\rightarrow v(t) = \left(\frac{-ct}{2} + \sqrt{v_0}\right)^2$$

$v=0 \rightarrow t_{v=0} = \frac{2\sqrt{v_0}}{c}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \left(\sqrt{v_0} - \frac{ct}{2}\right)^2$$

$$dx = \left[\sqrt{v_0} - \frac{ct}{2}\right]^2 dt$$

las mismas 3 formas que antes, esta vez hago solo una

$$\int_0^{t_{v=0}} \left(\sqrt{v_0} - \frac{ct}{2}\right)^2 dt = \int_0^{x_{v=0}} dx$$

$$\int_0^{t_{v=0}} \left[v_0 - \frac{\sqrt{v_0}\,ct}{2} - \frac{\sqrt{v_0}\,ct}{2} + \frac{c^2t^2}{4}\right] dt = \int_0^{x_{v=0}} dx$$

$$\int_0^{t_{v=0}} \left(v_0 - \sqrt{v_0}\,ct + \frac{c^2t^2}{4}\right) dt = \int_0^{x_{v=0}} dx$$

$$\left[v_0 t + \frac{\sqrt{v_0}\,c}{2}t^2 + \frac{c^2}{12}t^3\right]_0^{t_{v=0}} = \left[x\right]_0^{x_{v=0}}$$

$$\left(t_{v=0}v_0 - \frac{\sqrt{v_0}\,c\,t_{v=0}^2}{2} + \frac{c^2\,t_{v=0}^3}{12}\right) = x_{v=0}$$

$$x_{v=0} = \frac{c^2\left(\frac{2\sqrt{v_0}}{c}\right)^3}{12} - \frac{\sqrt{v_0}\,c\left(\frac{2\sqrt{v_0}}{c}\right)^2}{2} + v_0\left(\frac{2\sqrt{v_0}}{c}\right)$$

$$= \frac{c^{\cancel{2}}\cdot 8\cdot v_0\sqrt{v_0}}{12\cdot c^{\cancel{3}}} - \frac{\sqrt{v_0}\,c^{\cancel{2}}\cdot 4\cdot v_0}{2\,c^{\cancel{2}}} + \frac{2}{c}v_0\sqrt{v_0}$$

$$= \frac{2}{3c}v_0\sqrt{v_0} - \frac{2}{c}v_0\sqrt{v_0} + \frac{2}{c}v_0\sqrt{v_0}$$

$$= \left(\frac{2}{3c} - \frac{2}{c} + \frac{?}{c}\right)v_0\sqrt{v_0}$$

$$= \frac{2}{3c}v_0\sqrt{v_0}$$

Ejercicio

Datos:

- Movimiento retardado circular radio $R$
- $|a_T| = |a_N|$
- condiciones iniciales: $t=0 \rightarrow v = v_0$

Se pide:

$v(t)$, $s(t)$, $a_T$, $a_N$

$$|a_T| = |a_N|$$

$$\left|\frac{d|v|}{dt}\right| = \left|\frac{|v|^2}{R}\right|$$

$$-\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{al ser retardado, esto es negativo}} = \frac{v^2}{R}$$

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{dt}{R}$$

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}\,dv = \int_0^t \frac{1}{R}\,dt$$

$$-\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = \left[\frac{t}{R}\right]_0^t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{R}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + \frac{1}{v_0}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{v_0 t + R}{v_0 R}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{v_0 R}{v_0 t + R}}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{v_0 t + R}{v_0 R}} = \frac{t}{R} + \frac{1}{v_0}$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$= \int_0^t \frac{v_0 t + R}{v_0 \cdot R}\,dt$$

$$= \int_0^t \frac{t}{R} + \frac{1}{v_0}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2R} + \frac{t}{v_0}\right]_0^t$$

$$s(t) = \frac{t^2}{2R} + \frac{t}{v_0}$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$s(t) = \int_0^t \frac{v_0 R}{v_0 t + R}\,dt$$

$$= R \int_0^t \frac{v_0}{v_0 t + R}\,dt$$

$$= R\left[\ln(v_0 t + R)\right]_0^t$$

$$= R\left(\ln(v_0 t + R) - \ln(R)\right)$$

$$\boxed{s(t) = R \ln\left(\frac{v_0 t + R}{R}\right)}$$

Ejercicio

Datos

$\vec{v} = c\cdot\vec{i} + b\cdot x\cdot\vec{j}$ — c, b, cts. $t=0 \rightarrow O(0,0,0)$

Se pide

$\vec{r}(t)$, $a_T$, $a_N$

$V_x = c \longrightarrow x = \int c\,dt = c\cdot t + \cancel{cte}^{\,0}$ (cond. iniciales)

$V_y = b\cdot x \longrightarrow y = \int b\cdot x\cdot dt$

$= \int b\cdot c\cdot t\cdot dt$

$y = \frac{bc}{2}t^2 + \cancel{cte}^{\,0}$ (cond. iniciales)

$V_z = 0 \longrightarrow z = \cancel{cte}^{\,0}$

$$\boxed{\vec{r}(t) = ct\,\vec{i} + \frac{bc}{2}t^2\,\vec{j}}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt}$$

$|\vec{v}| = \sqrt{c^2 + (bx)^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{c^2 + (bct)^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{c^2 + b^2c^2t^2}$

$= c\sqrt{1+b^2t^2}$

$= \frac{d}{dt}\left(c\sqrt{1+b^2t^2}\right)$

$= c\cdot\frac{d}{dt}(1+b^2t^2)^{1/2}$

$= c\cdot\frac{1}{2}\cdot 2b^2t\cdot(1+b^2t^2)^{-1/2}$

$$\boxed{a_T = \frac{cb^2t}{\sqrt{1+b^2t^2}}}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{c^2 + b^2c^2t^2}{R} = \frac{c^2(1+b^2t^2)}{R} \qquad R?$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (0\,\vec{i} + b\cdot c\,\vec{j}) = bc\,\vec{j}$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{(bc)^2 - \left(\frac{cb^2t}{\sqrt{1+b^2t^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{b^2c^2 - \frac{c^2b^4t^2}{1+b^2t^2}}$$

$$= \sqrt{b^2c^2\left(1 - \frac{b^2t^2}{1+b^2t^2}\right)}$$

$$\boxed{a_N = bc\sqrt{1 - \frac{b^2t^2}{1+b^2t^2}}}$$

$$= bc\sqrt{1 - \frac{1+b^2t^2-1}{1+b^2t^2}}$$

$$= bc\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{1+b^2t^2}\right)}$$

$$= bc\sqrt{\frac{1}{1+b^2t^2}}$$

$$\boxed{a_N = \frac{bc}{\sqrt{1+b^2t^2}}}\ \checkmark$$

Radio

$$a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{bc}{\sqrt{1+b^2t^2}}$$

$$\frac{c^2(1+b^2t^2)}{R} = \frac{bc}{\sqrt{(1+b^2t^2)}}$$

$$\frac{c(1+b^2t^2)^{3/2}}{b} = R$$

$$\boxed{\rho = \frac{c}{b}(1+b^2t^2)^{3/2}}$$

# LECCION 6. DINÁMICA DEL PUNTO

## • AXIOMAS DE LA MECÁNICA CLÁSICA

### 1. Ley de la inercia

Toda partícula libre de cualquier influencia conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.

### 2. Ecuación Fundamental de la Dinámica

Toda partícula sobre la que actua una fuerza $\vec{F}$ se mueve de forma que su aceleración es proporcional a la fuerza.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

↳ m: masa: constante positiva que cuantifica la cantidad de materia que constituye la partícula.
- es una magnitud fundamental

$[m] = M$ unidad s.i. = kg

### 3. Ley de acción y reacción

Sean dos puntos materiales A y B aislados.
La fuerza que A ejerce sobre B y la que B ejerce sobre A son iguales en módulo y dirección, de sentidos contrarios.

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

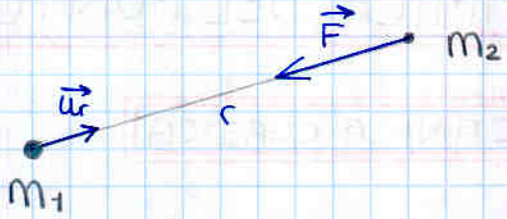
↳ Fuerza: dimensiones $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$
unidad en s.i. $kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$ (Newton)

## • SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES O DE GALILEO

- Cualquier sistema de referencia en el cual la velocidad de un punto absolutamente aislado en el espacio es constante.
- Un sistema en el cual son válidos los axiomas de la mecánica clásica.

# LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

Sean:




la fuerza atractiva ejercida por $m_1$ sobre $m_2$ es:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\vec{u_r}$$

Si $M_T$ es la masa de la tierra y $R_T$ su radio.
La fuerza con que la tierra atrae a una masa $m$ en su superficie vale

$$\vec{F} = -\frac{G M_T}{R_T^2} m\ \vec{u_r} = \vec{g}\cdot m$$

# · ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL

## · Punto libre: 3 grados de libertad

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$F_x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \dot{x} = \int \frac{F_x}{m}\,dt \longrightarrow x = x(t)$$

$$F_y = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \longrightarrow \dot{y} = \int \frac{F_y}{m}\,dt \longrightarrow y = y(t)$$

$$F_z = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \longrightarrow \dot{z} = \int \frac{F_z}{m}\,dt \longrightarrow z = z(t)$$

necesarias 6 ctes de integración

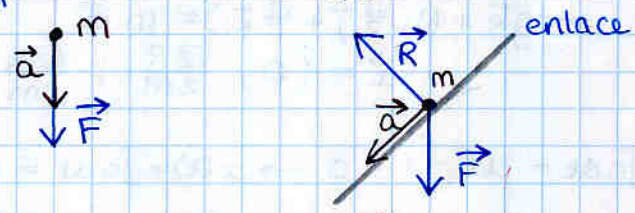
$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$

$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

## · Punto ligado

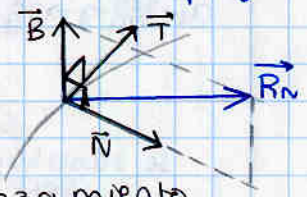
Enlace: condición que se impone a un sistema disminuyendo sus grados de libertad

Fuerza de enlace $\vec{R}$: el enlace ejerce una fuerza sobre el punto de forma que la trayectoria se modifica siendo compatible con el enlace.




Componente normal. $\vec{R_N}$: reacción normal

- en una superficie: $R_N$ perpendicular a la superficie
- en una curva: $\vec{R_N} = \alpha\vec{N} + \beta\vec{B}$




Componente tangencial: $\vec{R_T}$: fuerza de rozamiento.

- sentido contrario a vector velocidad, (opuesto al movimiento)

seco: $R_T = \mu R_N$

Viscoso: $R_T = R_T(v)$

Perfecto: $R_T = 0$

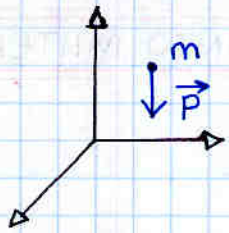
## · Ecuaciones del movimiento

$$\Sigma\vec{F} + \vec{R} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

La trayectoria resultado de la ecuación debe coincidir con la ecuación de la curva si la ligadura es curvilínea o verificar la ecuac. de la superficie si se trata de una superficie

## Ejemplos

**Punto libre:** Datos: $P(1,2,9)$ $\vec{v}_0 = (1,2,3)$ sobre m actúa el peso




$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$
$$-m \cdot g \cdot \vec{k} = m \cdot \vec{a}$$
$$-g\,\vec{k} = \vec{a}$$
$$\vec{a} = (0, 0, -g)\ m \cdot s^{-2}$$

$a_x = 0 \longrightarrow v_x = cte_1 = 1 \longrightarrow x(t) = \int 1\,dt = t + cte = t + 1$ ($\vec{v}_0 = (1,2,3)$; $P(1,2,9)$)

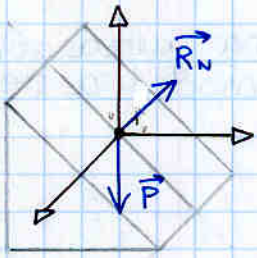
$a_y = 0 \longrightarrow v_x = cte = 2 \longrightarrow y(t) = \int 2\,dt = 2t + cte = 2t + 2$ ($\vec{v}_0 = (1,2,3)$; $P(1,2,9)$)

$a_z = -g \longrightarrow v_z = \int -g\,dt = -gt + cte = -gt + 3$ ($\vec{v}_0 = (1,2,3)$)

$$\longrightarrow z(t) = \int -gt + 3\,dt = -\tfrac{1}{2}gt^2 + 3t + cte$$ $P(1,2,9)$
$$= -\tfrac{1}{2}gt^2 + 3t + 9$$

**Punto ligado:** Datos $P(0,0,0)$ $\vec{v}_0 = (0,0,0)$

plano: $y + z = 0$ Rozamiento




$\vec{P} = -g\vec{k}$ $\vec{R_N} = R \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right)$ unitario en dirección $(0,1,1)$

$$\Sigma \vec{F} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$
$$-mg\vec{k} + R\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = m \cdot \vec{a}$$
$$\vec{a} = \left(0, \frac{\sqrt{2}R}{2m}, \frac{\sqrt{2}R}{2m} - g\right) m \cdot s^{-2}$$

$a_x = 0 \longrightarrow v_x = \int 0\,dt = cte$ cond. inic. $= 0 \longrightarrow x(t) = \int 0\,dt = cte = 0$

$a_y = \frac{\sqrt{2}R}{2m} \longrightarrow v_y = \int \frac{\sqrt{2}R}{2m}\,dt = \frac{\sqrt{2}Rt}{2m} + cte \longrightarrow y(t) = \int \frac{\sqrt{2}Rt}{2m}\,dt = \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} + cte$

$a_z = \frac{\sqrt{2}R}{2m} - g \longrightarrow v_y = \int \frac{\sqrt{2}R}{2m} - g\,dt = \frac{\sqrt{2}Rt}{2m} - gt + cte \longrightarrow z(t) = \int \frac{\sqrt{2}Rt}{2m} - gt\,dt = \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} - \frac{gt^2}{2} + cte$

$$\vec{r}(t) = \left(0, \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m}, \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} - \frac{gt^2}{2}\right) m$$

se sustituye en el plano:

$$\frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} + \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} - \frac{gt^2}{2} = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}Rt^2}{2m} - \frac{gt^2}{2} = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}Rt^2}{2m} - \frac{mgt^2}{2m} = 0$$
$$\sqrt{2}Rt^2 - mgt^2 = 0$$
$$t^2(\sqrt{2}R - mg) = 0$$
$$\sqrt{2}R = mg$$
$$R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} = \frac{\sqrt{2}\frac{mg}{\sqrt{2}}t^2}{4m} = \frac{1}{4}gt^2$$
$$z(t) = \frac{\sqrt{2}Rt^2}{4m} - \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{4}gt^2 - \frac{gt^2}{2} = -\frac{1}{4}gt^2$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(0, \tfrac{1}{4}gt^2, -\tfrac{1}{4}gt^2\right)}$$

se podría sustituir R en $\vec{v}$ y en $\vec{a}$, pero es más sencillo derivar

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left(0, \tfrac{1}{2}gt, -\tfrac{1}{2}gt\right)}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left(0, \tfrac{1}{2}g, -\tfrac{1}{2}g\right)}$$

## · CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$[p] = M \cdot L \cdot T^{-1}$
unidad: $kg\,m\,s^{-1}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$$

La resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada respecto al tiempo de su cantidad de movimiento.

- Impulso: de una fuerza que actúa durante un tiempo $\Delta t$

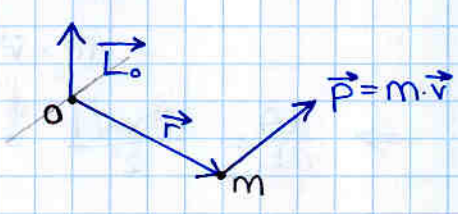
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$
$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

$$\vec{I} = \int_{t_A}^{t_B} \Sigma \vec{F} \cdot dt = \vec{p}_B - \vec{p}_A$$

El impulso de las fuerzas sobre una partícula es igual al incremento de la cantidad de movimiento.

## · MOMENTO CINETICO

Momento cinético de una partícula respecto de un punto O: momento respecto de O del vector cantidad de movimiento de la partícula




$$\vec{L_o} = \vec{r} \times \vec{p}$$

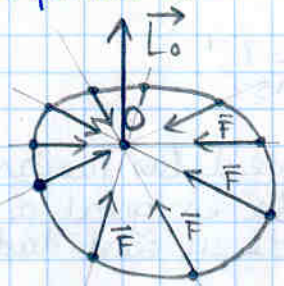
Teorema del momento cinético:

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \vec{M_o}$$

La derivada respecto al tiempo del momento cinético de una partícula respecto a un punto O fijo, es igual al momento respecto de O de las fuerzas que actuan sobre la partícula.

## Caso Particular: fuerzas centrales

Cuando las líneas de acción de las fuerzas concurren a un mismo punto O.




en este caso $\vec{L_o} = \vec{r} \times \vec{p}$

Pero

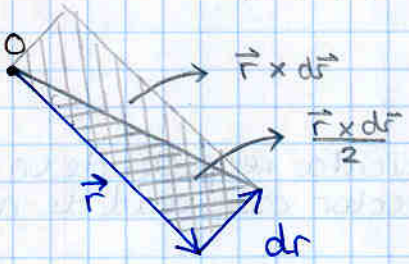
$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{r \,//\, F} = \vec{0}$$

$\boxed{\vec{L_o} = cte}$ dirección y módulo

$\vec{L_o}$ cte $\Rightarrow$ **trayectoria plana**

## Ley de las áreas

$$\vec{L_o} = cte \Rightarrow |\vec{r} \times \vec{p}| = cte$$
$$|\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = cte$$
$$|\vec{r} \times \vec{v}| = cte$$




$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2}$$

$$dA = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}\, dt|}{2} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{2} = cte$$

$|\vec{r} \times \vec{v}| = cte$

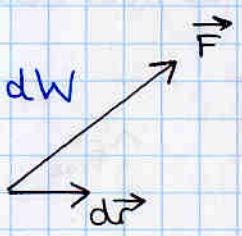
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = cte.}$$

## • TRABAJO

• Trabajo elemental realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el desplazamiento $d\vec{r}$

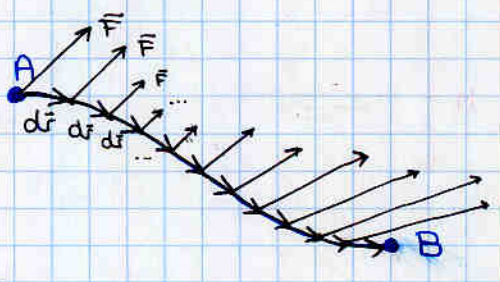
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$




• Trabajo entre A y B a lo largo de la curva C es la suma de los infinitos trabajos elementales.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$




= la circulación de la f.v.p. fuerza.

Dimensiones: $[W] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
Unidades: $N \cdot m = J$ (julio)

Si $\vec{F}$ es conservativa (deriva de potencial) el trabajo no depende de la trayectoria.

## • POTENCIA

Trabajo realizado (por una fuerza) por unidad de tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Dimensiones: $[P] = M \cdot L^2 \cdot T^3$
Unidades: $J/s = W$ (watio)

## • ENERGIA CINÉTICA

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad (dT = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v})$$

Dimensiones: $[T] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ (mismas que trabajo)
Unidades: J (julio)

## • TEOREMA DE LA ENERGIA CINÉTICA → SIEMPRE SE CUMPLE

$$dW = dT$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = dT$$

$$dT = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

- Fuerzas ⊥ a trayectoria ⇒ $\Delta T = 0$
- si $W > 0$ → velocidad aumenta
  si $W < 0$ → velocidad disminuye

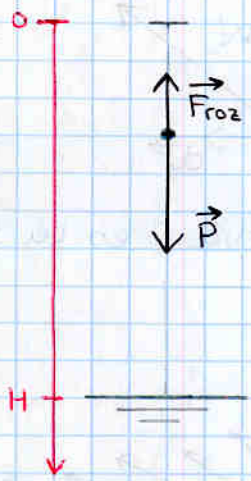
Ejercicio

Datos: caida libre, masa m, altura H, $\vec{v}_0 = \vec{0}$, con rozamiento del aire $|\vec{F}_{roz}| = bv^2$

Se pide: velocidad final

Se puede hacer por $\Sigma \vec{F} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$

Pero mas sencillo por el teorema de la energía cinética.




$$\vec{P} = mg\vec{k} \qquad \vec{F}_{roz} = -bv^2\vec{k}$$

$$dW = dT$$

$$\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$(mg - bv^2)\vec{k} \cdot d\vec{r} = m \cdot v \cdot dv$$

$$(mg - bv^2)\, dz = mv\, dv$$

$$dz = \frac{mv}{(mg - bv^2)} dv$$

$$\int_0^H dz = \int_0^{v_f} \frac{mv}{mg - bv^2} dv$$

$$H = \frac{m}{-2b} \int_0^{v_f} \frac{-2bv}{mg - bv^2} dv$$

$$= \frac{m}{-2b} \left[ \ln(mg - bv^2) \right]_0^{v_f}$$

$$H = \frac{m}{-2b} \left[ \ln\left( \frac{mg - bv_f^2}{mg} \right) \right]$$

$$\frac{-2bH}{m} = \ln\left( \frac{mg - bv_f^2}{mg} \right)$$

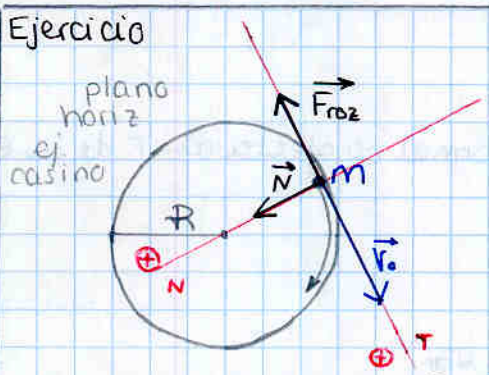
$$e^{-\frac{2bH}{m}} = \frac{mg - bv_f^2}{mg}$$

$$mg\, e^{-\frac{2bH}{m}} = mg - bv_f^2$$

$$bv_f^2 = mg\left(1 - e^{-\frac{2bH}{m}}\right)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{2bH}{m}}\right)}$$

Ejercicio




se pide $s(t)$ $v_{2\pi}$ datos: rozamiento seco

1er método: $\Sigma \vec{F} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$

T $\quad -F_{roz} = m \cdot a_T \qquad F_{roz} = \mu N = -m \cdot a_T$

N $\quad N = m \cdot a_N \qquad = \mu m \cdot a_N = -m \cdot a_T$

$$\mu a_N = -a_T$$

$$\frac{\mu v^2}{R} = -\frac{dv}{dt}$$

→ $v(t) \rightarrow s(t) \rightarrow s(t_{2\pi}) = 2\pi R \rightarrow t_{2\pi}$ $\quad v(t_{2\pi})$

$$\int_0^t \frac{\mu}{R}\,dt = -\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}\,dv$$

$$\frac{\mu t}{R} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}$$

$$v(t) = \frac{r v_0}{\mu t v_0 + r}$$

$$s(t) = \int_0^t \frac{r v_0}{\mu t v_0 + r}\,dt$$

$$= \frac{r}{\mu} \int_0^t \frac{\mu v_0}{\mu v_0 t + r}\,dt$$

$$= \frac{r}{\mu} \left[\ln(\mu v_0 t + r)\right]_0^t$$

$$s(t) = \frac{r}{\mu} \ln \frac{\mu v_0 t + r}{r}$$

$$v(t_{2\pi}) = \frac{r v_0}{\mu\left(\frac{r(e^{2\pi\mu}-1)}{\mu v_0}\right) v_0 + r}$$

$$= \frac{v_0}{e^{2\pi\mu} - 1 + 1}$$

$$v(t_{2\pi}) = v_0 e^{-2\pi\mu}$$

$$s(2\pi) = \frac{r}{\mu} \ln\left(\frac{\mu v_0 t_{2\pi} + r}{r}\right) = 2\pi r$$

$$\mu 2\pi = \ln\left(\frac{\mu v_0 t_{2\pi} + r}{r}\right)$$

$$r e^{\mu 2\pi} = r + \mu v_0 t_{2\pi}$$

$$t_{2\pi} = \frac{r(e^{2\pi\mu} - 1)}{\mu v_0}$$

2° método. Teorema de la energía cinética.

$$dW = dT$$
$$\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot v \cdot dv$$

$\vec{N} \perp \vec{v} \rightarrow \Delta T = 0$ la Normal no afecta al T. de la E. C.

$$\vec{F_{roz}} \cdot d\vec{r} = m \cdot v \cdot dv$$
$$-F_{roz}\, ds = mv\, dv$$

ver pág anterior

$$-\mu \frac{mv^2}{R} ds = mv\, dv$$

$$-\frac{\mu}{R} ds = \frac{1}{v} dv$$

$\rightarrow v_{2\pi}$

$\rightarrow s(r) \rightarrow v(s) \rightarrow s(t)$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\mu}{R} ds = -\int_{v_0}^{v_{2\pi}} \frac{1}{v} dv$$

$$\left[\frac{\mu s}{R}\right]_0^{2\pi R} = \left[-\ln v\right]_{v_0}^{v_{2\pi}}$$

$$2\pi\mu = \ln \frac{v_0}{v_{2\pi}}$$

$$e^{2\pi\mu} = \frac{v_0}{v_{2\pi}}$$

$$\boxed{v_{2\pi} = v_0\, e^{-2\pi\mu}}$$

$$\int_0^{s} \frac{\mu}{R} ds = -\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v} dv$$

$$\left[\frac{\mu s}{R}\right]_0^{s} = \left[-\ln v\right]_{v_0}^{v}$$

$$\frac{\mu s}{R} = \ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$$

$$\boxed{s(v) = \frac{R}{\mu} \ln \frac{v_0}{v}}$$

$$e^{\frac{\mu s}{R}} = \frac{v_0}{v}$$

$$\boxed{v(s) = v_0\, e^{-\frac{\mu s}{R}}}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{\mu s}{R}} = \frac{ds}{dt}$$

$$v_0\, dt = e^{\frac{\mu s}{R}} ds$$

$$\int_0^{t} v_0\, dt = \int_0^{s} e^{\frac{\mu s}{R}} ds$$

$$\left[v_0 t\right]_0^{t} = \left[\frac{1}{\mu/R} e^{\frac{\mu s}{R}}\right]_0^{s}$$

$$v_0 t = \frac{R}{\mu}\left(e^{\frac{\mu s}{R}} - 1\right)$$

$$\frac{\mu \cdot v_0 t}{R} = e^{\frac{\mu s}{R}} - 1$$

$$\ln\left(\frac{\mu v_0 t}{R} + 1\right) = \frac{\mu s}{R}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{R}{\mu} \ln\left(\frac{\mu v_0 t}{R} + 1\right)}$$

## · FUERZAS CONSERVATIVAS

Cuando una fuerza es conservativa, (deriva de potencial) el potencial del cual deriva tiene dimensiones de energía y se llama energía potencial.

$$\vec{F} = -\text{grad}\, U$$

↳ Energía potencial

La circulación de $\vec{F}$ entre A y B.

$$W_{A-B} = C_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B \text{grad}\, U \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B$$

$$W_{AB} = U_A - U_B$$

$W_{AB} = -\int_A^B dU$

$\int_A^B dW = -\int_A^B dU$

$dW = -dU$

El trabajo realizado por la fuerza conservativa es independiente del camino, sólo depende de la energía potencial inicial y final.

### · Conservación de la energía mecánica

Cuando sólo actuan fuerzas conservativas

$$dW = -dU = dT$$
$$-dU = dT$$
$$d(T+U) = 0$$
$$T + U = \text{cte}$$

$$T + U = \text{cte}$$

no se cumple si existe rozamiento.

### · Equilibrio y energía potencial

Equilibrio = $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

$\vec{F} = 0$

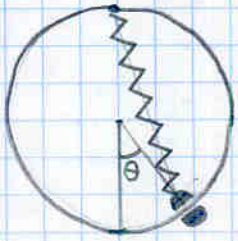
$-\nabla U = 0$

ej. en este ej. el equilibrio se da cuando $F_x = 0$

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2U}{dx}$ → $= 0$ : equilibrio indiferente
→ $> 0$ : equilibrio estable (mín rel)
→ $< 0$ : equilibrio inestable (máx rel)

ej: la masa se desliza sobre el aro sin rozamiento

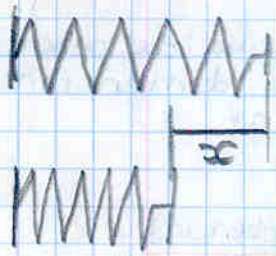



el equilibrio se da cuando

$$\frac{dU}{d\theta} = 0$$

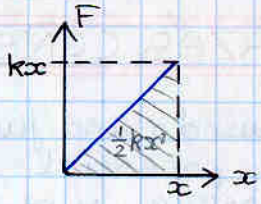
- **Algunos casos específicos de energía potencial**

  - **Elástica**




$F = kx$

$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$




donde $x$ es la distancia que se ha comprimido o estirado el muelle

  - **Gravitatoria**

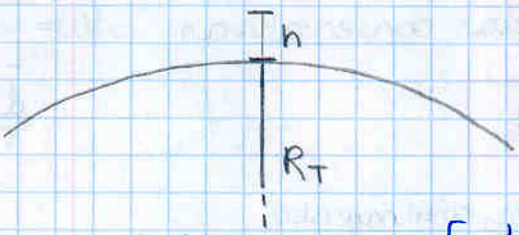
$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u_r}$

$\vec{F} = -\text{grad}\ U$

$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\boxed{U = -G\frac{Mm}{r}}$

  - **Gravitatoria en la superficie terrestre**




$$\left.\begin{aligned} U_{R_T+h} &= -\frac{GMm}{R_T+h} \\ U_{R_T} &= -\frac{GMm}{R_T} \end{aligned}\right\} \Delta U = U_{R_T+h} - U_{R_T}$$

$$\Delta U = GM_T m\left[-\frac{1}{R_T+h} + \frac{1}{R_T}\right]$$

$$= GM_T m\left[\frac{h}{(R_T+h)R_T}\right]$$

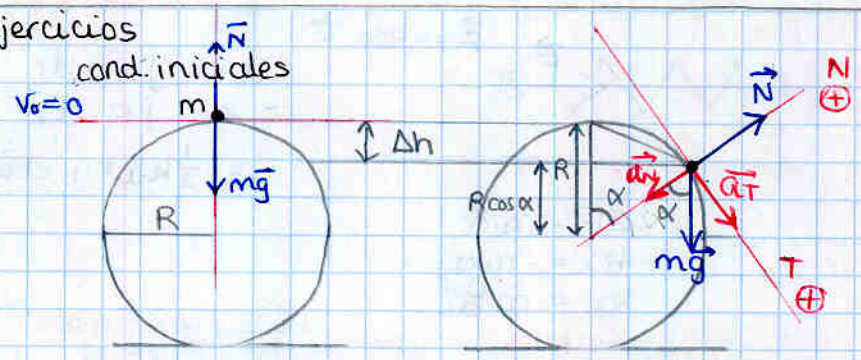
$$= \frac{G M_T}{R_T(R_T+h)} \cdot m \cdot h$$

si $h << R_T$

$$= \underbrace{\frac{GM_T}{R_T^2}}_{g} \cdot m \cdot h$$

$$\boxed{\Delta U = mgh}$$

Ejercicios




se pide: ángulo $\alpha$ en que se desprende

$$\Sigma\vec{F} + \vec{R} = m\cdot\vec{a}$$

[T] $mg\,\text{sen}\,\alpha = m\,a_T = m\,\frac{dV}{dt}$

$g\,\text{sen}\,\alpha = \frac{dV}{dt}$ ⇒ no sirve para sacar V

(tb proyectar $a_N$)

[N] $N - mg\cos\alpha = -m\cdot a_N = -m\frac{V^2}{R}$

cuando se desprende, $\vec{N} = \vec{0}$

$$mg\cos\alpha = m\,\frac{V^2}{R}$$

como sacar v? conservación de la energía mecánica

$$T_0 + U_0 = T + U$$
$$0 + U_0 = T + U$$
$$U_0 - U = T$$
$$mgh = \tfrac{1}{2}mV^2$$
$$V^2 = 2gh$$
$$V^2 = 2g(R - R\cos\alpha)$$
$$V^2 = 2gR(1-\cos\alpha)$$

$$mg\cos\alpha = m\,\frac{2gR(1-\cos\alpha)}{R}$$

$$\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)$$
$$\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = 2/3$$

$$\alpha = 0.84\ \text{rad}$$

ejercicio — muelle longitud inicial nula

$\vec{F} = -kx\,\vec{i}$

¡cacamba, $\vec{F}$ es conservativa!

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int F\cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 + \cancel{cte}^{\vec{}} \qquad x=0 \to U=0$$

$$\Sigma \vec{F} = m\cdot\vec{a}$$
$$-kx = -m a_T$$
$$kx = m\frac{dv}{dt}$$

¡cáspita! $\boxed{kx = m\frac{d^2x}{dt^2}}$ sabremos hacerlo

Conservación de la energía mecánica:
sea $E = cte$ = energía total

$$E = T + U$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$2E = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kx^2$$
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}} = \int dt$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2E}{m}\right)\left(1 - \frac{k}{2E}x^2\right)}} = \int dt$$
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)^2}} = \int dt$$
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{\frac{k}{2E}}}\int \frac{\sqrt{k/2E}\,dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)^2}} = \int dt$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \text{arcsen } u$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)\right] + C_1 = t$$
$$\text{arc sen}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2$$
$$x\sqrt{\frac{k}{2E}} = \text{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + C_2\right)$$
$$\boxed{x(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{k}}}_{A}\ \text{sen}\left(t\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega} + \varphi\right)}$$

$$x(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi)$$
$$v(t) = A\omega\ \text{sos}(\omega t + \varphi)$$
$$= A\omega\sqrt{1-\sin^2(\omega t+\varphi)}$$
$$= \omega\sqrt{A^2(1-\sin^2(\omega t+\varphi))}$$
$$= \omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t+\varphi)}$$
$$= \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$a(t) = -A\omega^2\ \text{sen}(\omega t + \varphi)$$
$$a = -\omega^2 x$$

# Movimiento Rectilíneo

$$\vec{F} = F \cdot \vec{\imath}$$

## a) F(t)

$$F(t) = m \cdot a = m \frac{dv}{dt}$$

$$\int F(t)\,dt = \int m\,dv$$

$\int m\,dv \rightarrow v(t)$

$\int v(t)\,dt \rightarrow x(t)$

## b) F(v)  ej. rzo. viscoso

$$F(v) = m \cdot a = m \frac{dv}{dt}$$

$$\int dt = \int \frac{m}{F(v)}\,dv$$

$\int \frac{m}{F(v)}\,dv \rightarrow t(v) \rightarrow v(t)$

$\int v(t)\,dt \rightarrow x(t)$

## c) F(x)  ej. muelle

$$F(x) = m \cdot a = m \frac{dv}{dt}$$

$$F(x) = m \frac{d^2x}{dt}$$

AUN no sabemos !!

alternativa: si $F(x) \rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \exists\, U$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$

cuando se trata de movimiento rectilíneo donde $\vec{F}$ sólo depende de x, entonces $rot\,\vec{F} = 0$

$$U = -\int F(x)\,dx$$

$$T + U = E$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left[E - U(x)\right]\frac{2}{m}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left[E - U(x)\right]\frac{2}{m}}} = \int dt \rightarrow$$

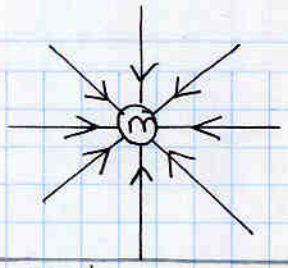
se lleva hacia $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \text{arc sen } u$

# Lección 7
## Electrostática

1. Introducción. Carga eléctrica
2. Ley de Coulomb
3. Campo eléctrico
4. Potencial electrostático
5. Dipolo eléctrico
6. Teorema de Gauss
7. Teorema de gauss en forma diferencial: Ecuaciones de Poisson y Laplace

ANEXO:

# Campo gravitatorio

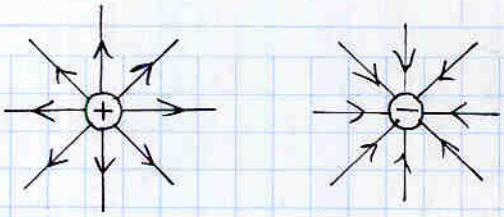



Campo gravitatorio

| Una masa M crea: | Se añade una masa m |
|---|---|
| Campo: $\vec{E} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$ | Fuerza $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$ |
| $[N/kg] \equiv [m/s^2]$ | $[N]$ |
| $\vec{F} = m\cdot\vec{E}$ | |
| $\vec{E} = -\text{grad}\, V$ ; $\text{rot}\,\vec{E} = 0$ | $\vec{F} = -\text{grad}\, U$ ; $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ |
| $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$ | $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$ |
| $V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$ | $U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ |
| Potencial Gravitatorio | Energía Potencial |
| $V = -G\frac{M}{r} + cte$ ; $V(\infty) = 0$ | $U = -G\frac{Mm}{r} + cte$ ; $U(\infty) = 0$ |
| $U = mV$ | |
| $[J/kg] \equiv [V]$ | $[J]$ |
| $V_B - V_A = \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ | $U_B - U_A = \int_A^B dU = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W_{AB}$ |
| | $W_{AB} = U_A - U_B = m(V_A - V_B)$ no depende del camino |

Campo Gravitatorio

# Campo Eléctrico



Una carga Q crea:

**Campo eléctrico**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

$[N/C] \equiv [V/m]$

$\text{rot}\,\vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\text{grad}\,V$

$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$

$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$

**Potencial eléctrico**

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + cte$$

$[J/C] \equiv [V]$

$\vec{F} = q\cdot\vec{E}$

$U = qV$

Se añade una carga q

**Fuerza eléctrica**

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r$$

$[N]$

$\vec{F} = -\text{grad}\,U$

$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$

**Energía Potencial**

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} + cte$$

$[J]$

$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dW$

$U_B - U_A = \int_A^B dU = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W_{AB}$

$$W_{AB} = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

no depende del camino

Nota:

$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dW$ y $dW = dT$

$= -dqV$

$$dW = -dU = dT$$

el trabajo realizado por un campo sobre una carga conlleva un decremento de su energía potencial y un aumento de su energía cinética

# TEMA 7. ELECTROSTÁTICA

## · Carga eléctrica

- Propiedad de la materia.
- 2 tipos: positiva y negativa; mismo signo se repelen, distinto signo se atraen.
- No es magnitud fundamental $[q] = I \cdot T$
- Unidad: C culombio

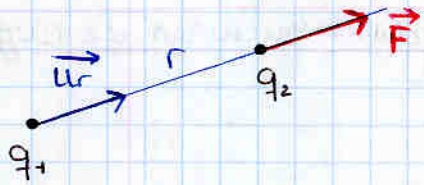
Propiedades:
- Cuantización: $Q = \pm n \cdot e \quad n \in \mathbb{N}$
- Conservación: la carga total del universo es constante.

## · Electrostática

- Cargas en reposo y campos que no dependen del tiempo

## · Ley de Coulomb

sólo cargas puntuales




$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u_r}$$

K no es cte. universal depende del medio.

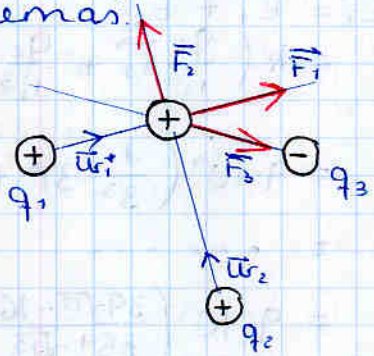
En el vacío y en S.I.

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ unidades}$$

$\varepsilon_0$ ↳ permitividad del vacío

## · Principio de Superposición

En un sistema de cargas en reposo, la interacción entre dos cualesquiera de ellas es la misma, estén o no las demás.



## Campo eléctrico

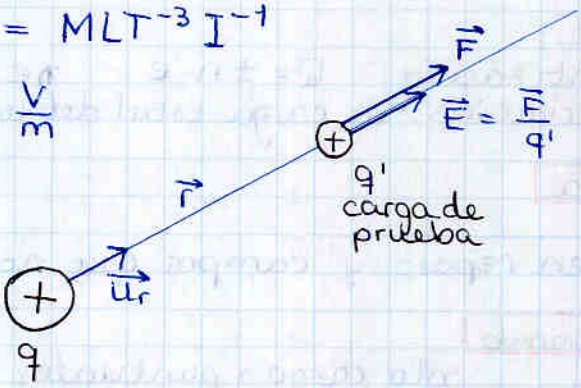
- Región donde aparecen fuerzas electrostáticas sobre cargas.

Se define: Intensidad de Campo Eléctrico como Fuerza por unidad de carga (positiva)

Es una función vectorial de punto.

$$[E] = [F][q]^{-1} = MLT^{-3}I^{-1}$$

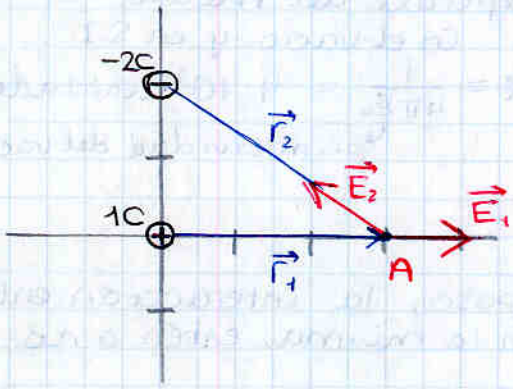
$$\frac{N}{C} \text{ o } \frac{V}{m}$$




## Cálculo del campo creado por distribuciones de cargas

En general; ver hoja impresa.

## Casos particulares




$\vec{r}_1 = (3,0)\,m \qquad \vec{r}_2 = (3,-2)\,m$

$|\vec{r}_1| = 3m \qquad |\vec{r}_2| = \sqrt{13}$

$$\vec{E}_1 = k\frac{q_1}{r_1^2}\left(\vec{u}_{r_1}\right) = k\frac{q_1}{r_1^2}\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1}\right) = k\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1$$

$$\vec{E}_2 = k\frac{q_2}{r_2^2}\left(\vec{u}_{r_2}\right) = k\frac{q_2}{r_2^2}\left(\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right) = k\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$= k\left(\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2\right)$$

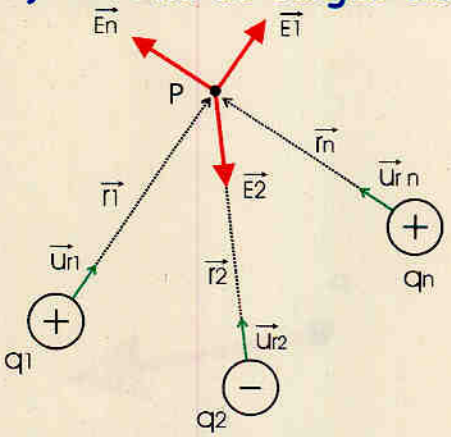
$$= 9\cdot10^9\left(\frac{1}{3^3}3\vec{i} + \frac{-2}{\sqrt{13}^3}(3\vec{i}-2\vec{j})\right)$$

$$= \dots\dots$$

$$= 9\cdot10^9\left(\frac{39\sqrt{13}-162}{351\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{4}{13\sqrt{13}}\vec{j}\right)$$

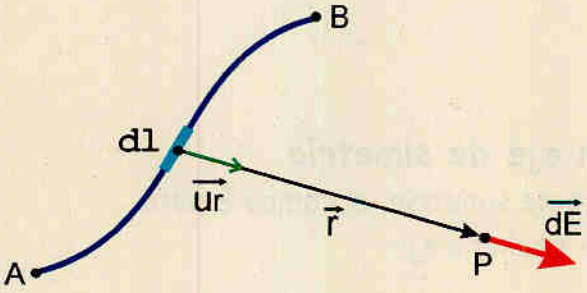
## Cálculo del campo creado por distribuciones de carga

### a) Sistema de cargas discretas




$$\vec{E}_{total} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = K \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{ri}$$

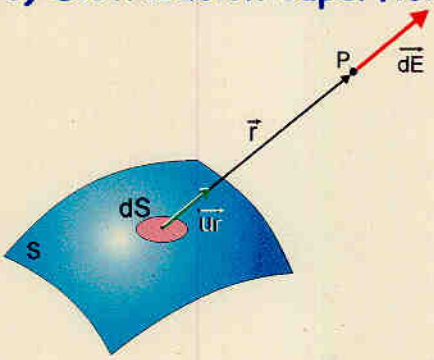
### b) Distribución lineal




$$\lambda = \frac{dq}{dl} \ (densidad\ lineal\ [C/m])$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_r$$

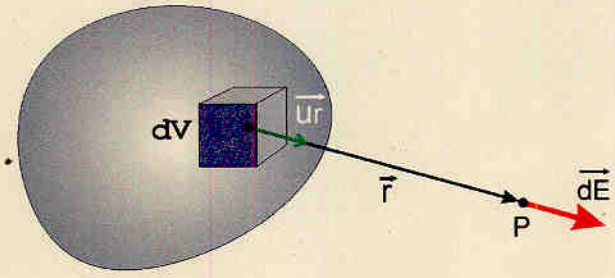
### c) Distribución superficial




$$\sigma = \frac{dq}{ds} \ (densidad\ superficial\ [C/m^2])$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}_r$$

### d) Distribución volumétrica

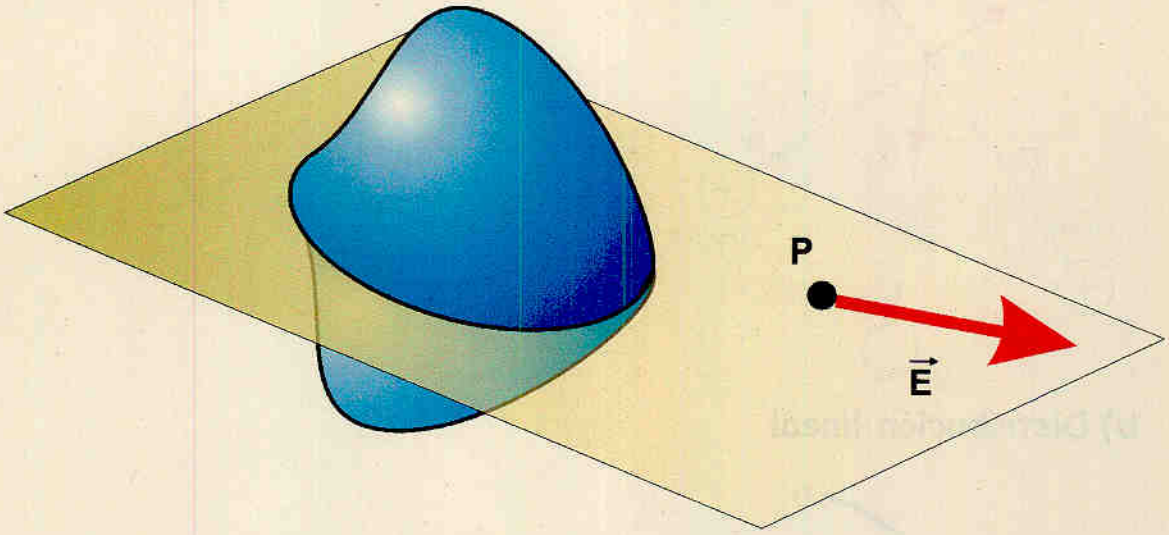



$$\rho = \frac{dq}{dv} \ (densidad\ volumétrica\ [C/m^3])$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}_r$$

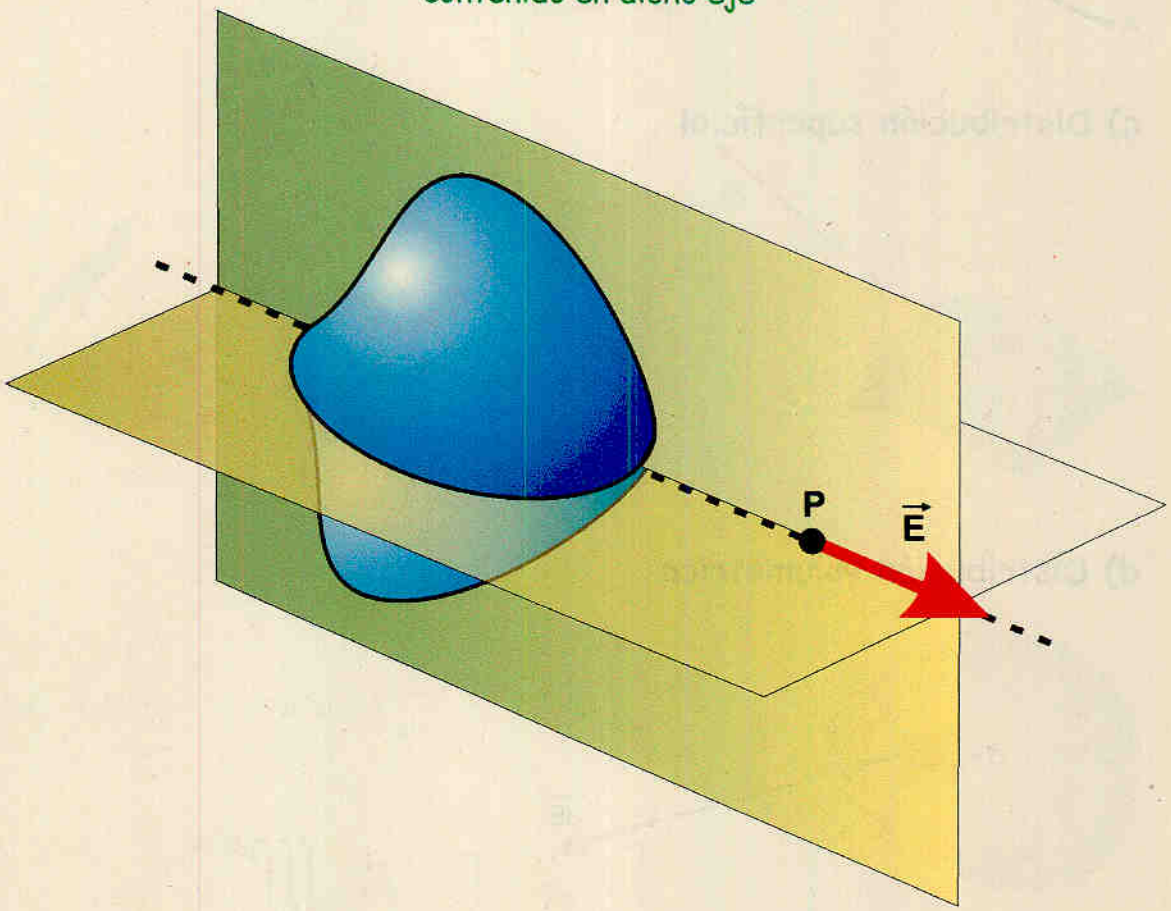
## e) Distribución de carga con un plano de simetría

En cualquier punto P del plano de simetría, el campo E está contenido en dicho plano

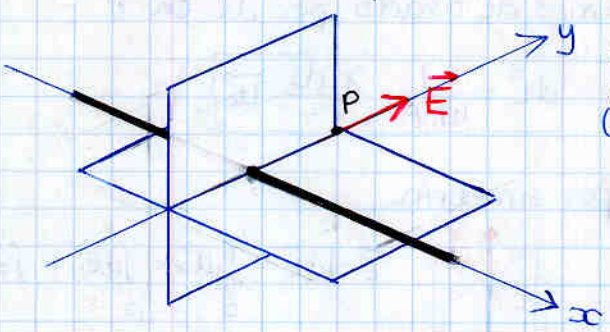



## f) Distribución de carga con un eje de simetría

En cualquier punto P del eje de simetría, el campo E está contenido en dicho eje

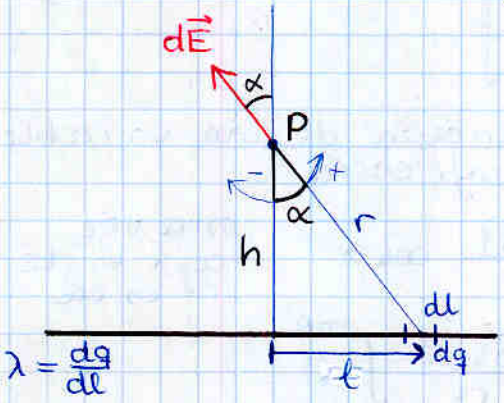


## · Campo producido por un hilo rectilíneo




si el punto P está en el plano de simetría del hilo. (o en cualquier punto si el hilo es infinito)
⇒ las componentes $E_x$ se anulan. El campo total está en la dirección del eje y.

Calcular el campo en el punto P.




campo dE creado por dl en P:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

$$dq = \lambda \cdot dl$$

$$\boxed{dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}} \quad ①$$

$d\vec{E} \rightarrow dE_x \rightarrow \int d\vec{E}_x = 0$

$d\vec{E} \rightarrow dE_y \rightarrow \int d\vec{E}_y = \vec{E}$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int (d\vec{E}_x + d\vec{E}_y) = \cancel{\int d\vec{E}_x}^{\,0} + \int d\vec{E}_y$$

$$\boxed{E = \int dE_y} \quad ②$$

para poder hacer $\int dE_y$ necesitamos obtener $dE_y$ en función de una sola variable que podamos integrar a lo largo de todo el hilo.

$$\boxed{dE_y = dE\cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\cos\alpha \left\langle \begin{matrix} \alpha \\ r \\ dl \end{matrix} \right\}$$ 3 variables. Hay que escribirlo en función de una

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{h}{\cos\alpha}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\ell}{h} \Rightarrow \ell = h\,tg\,\alpha \Rightarrow \boxed{dl = h\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha}$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\left(h\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha\right)}{\left(\frac{h}{\cos\alpha}\right)^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\alpha}{h}\cos\alpha$$

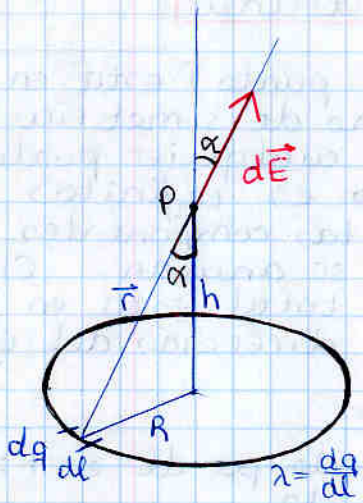
$$E = \int_{-\alpha_f}^{\alpha_f}\frac{\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 h}d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\int_{-\alpha_f}^{\alpha_f}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\cdot\left[\text{sen}\,\alpha\right]_{-\alpha_f}^{\alpha_f}}$$

en el caso de hilo infinito, $\alpha_f = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}}$$

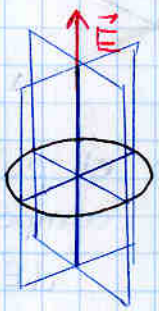
# · Campo producida por una circunferencia




campo dE creado por dl en P.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\vec{u_r}$$

por simetría:




$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int d\vec{E_x} + \int d\vec{E_y} + \int d\vec{E_z}$$

(0 y 0)

$$\vec{E} = \int dE_z \cdot \vec{k}$$

necesitamos obtener $dE_z$, en función de una variable, e integrar para toda la circunferencia

$$dE_z = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\cos\alpha$$

esta vez $\cos\alpha$ es cte, $r^2$ es cte

$$E = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos\alpha}{r^2}\, dl = \frac{\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{2\pi R} dl$$

($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos\alpha}{r^2}$ es cte)

$$E = \frac{2\pi R\,\lambda\cos\alpha}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

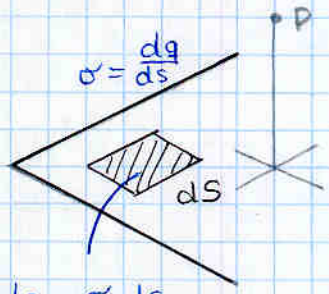
$$\cos\alpha = \frac{h}{r}$$

$$r^2 = h^2 + R^2$$

$$E = \frac{R\lambda h}{2\varepsilon_0 r^3} \qquad r^3 = (h^2+R^2)^{3/2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{R\lambda h}{2\varepsilon_0 (h^2+R^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

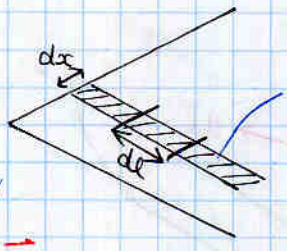
## · Campo producido por un plano infinito




integrando elementos $dS$ obtendríamos una integral doble que AÚN no sabemos hacer.

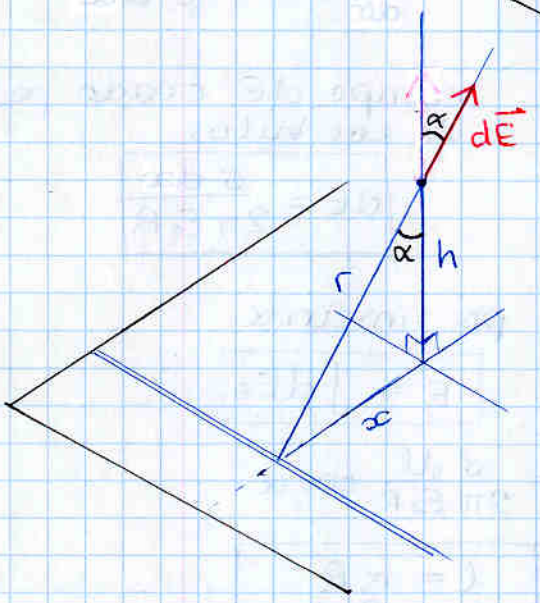
Podemos descomponer el plano en hilos

$dq = \sigma\, dS$
$= \sigma\, dx\, dy$




$dq = \sigma\, dS$
$dq = \sigma\, dx \cdot dl$
$(dq = \lambda\, dl)$

$\boxed{\lambda = \sigma\, dx}$




empezamos como siempre:
$dE$ creado por uno de los hilos $\infty$
(fórmula ya calculada sustituyendo $\lambda = \sigma\, dx$) $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}$ $\underline{h = r}$

$$\boxed{dE = \frac{\sigma\, dx}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

por simetría

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \underbrace{d\vec{E}_x}_{0} + \int \underbrace{d\vec{E}_y}_{0} + \int d\vec{E}_z$$

$$\boxed{E = \int dE_z}$$

$$\boxed{dE_z = dE\cos\alpha} = \frac{\sigma\, dx}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\alpha \quad \left.\begin{matrix} dx \\ \cos\alpha \end{matrix}\right\}$$ necesitamos una sola variable

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} \qquad r^2 = h^2 + x^2$$

$$dE_z = \frac{\sigma\, dx \left(\frac{h}{r}\right)}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma\, dx\, h}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma\, dx\, h}{2\pi\varepsilon_0 (h^2 + x^2)}$$

$$E = \int dE_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma\, dx\, h}{2\pi\varepsilon_0 (h^2 + x^2)} = \frac{\sigma h}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^2 + x^2}$$

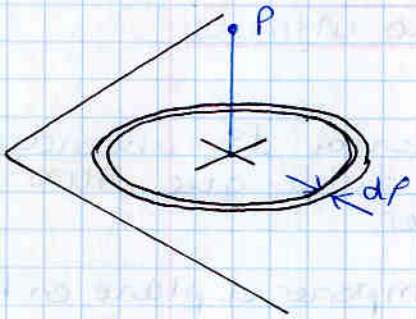
Pura matemática; sabiendo $\int \frac{u'}{1+u^2}\, du = \operatorname{arctg} u$

$$= \frac{\sigma h}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^2\left(1 + \frac{x^2}{h^2}\right)} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right)} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{h}\, dx}{1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{h}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sigma\pi}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}}$$

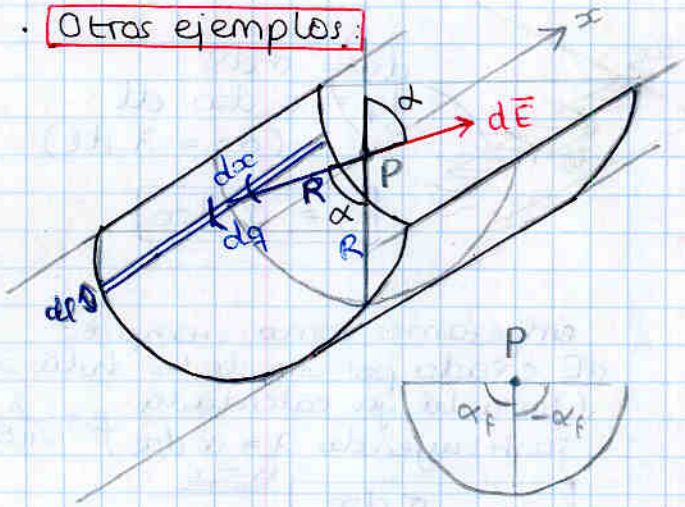
otra forma habría sido descomponiendo el plano en hilos circulares




$$dq = \sigma\, dl\, d\rho$$

$$\frac{dq}{dl} = \lambda = \sigma\, d\rho$$

- **Otros ejemplos:**




$$dq = \sigma\, dl\, dx$$

$$\frac{dq}{dx} = \lambda = \sigma\, d\ell$$

campo $dE$ creado por uno de los hilos

$$\boxed{dE = \frac{\sigma\, d\ell}{2\pi \varepsilon_0 R}}$$




por simetría

$$\boxed{E = \int dE_z}$$

$$dE_z = dE \cos\alpha = \frac{\sigma\, dl}{2\pi \varepsilon_0 R} \cos\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ell &= \alpha R \\ dl &= R\, d\alpha \end{aligned}}$$

$$dE_z = \frac{\sigma \cancel{R} \cos\alpha\, d\alpha}{2\pi \varepsilon_0 \cancel{R}}$$

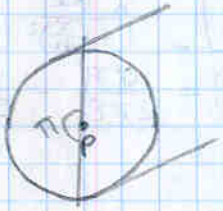
$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE_z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \cos\alpha\, d\alpha}{2\pi \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0} \operatorname{sen}\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0} \left[\operatorname{sen}\alpha\right]_{-\alpha_f}^{\alpha_f}}$$

en el ejemplo de la figura, $\alpha_f = \frac{\pi}{2}$

$$E = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0} 2 \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0}}$$

en el caso de un tubo $\alpha_f = \pi$




$$E = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0} (0 - 0)$$

$$E = 0$$

## Potencial Electrostático

El campo E creado por una carga puntual q.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

es un campo central y deriva de potencial

$$E = -\text{grad}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r} + C\right]$$

el potencial creado por q en un punto P

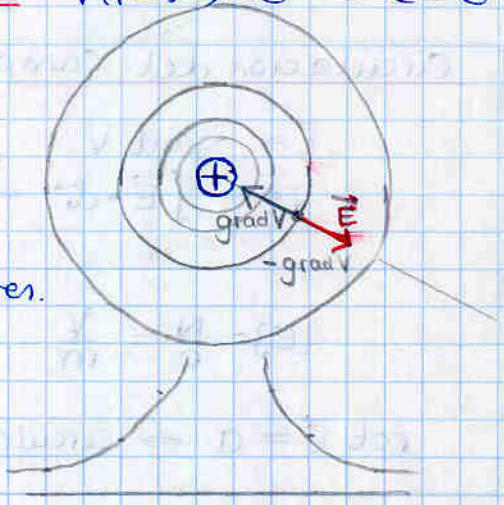
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C$$

Si no existen cargas en el $\infty$. $V(r=\infty)=0 \rightarrow C=0$

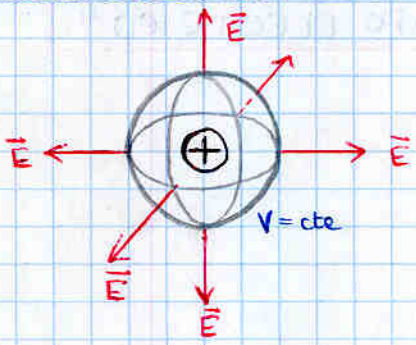
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

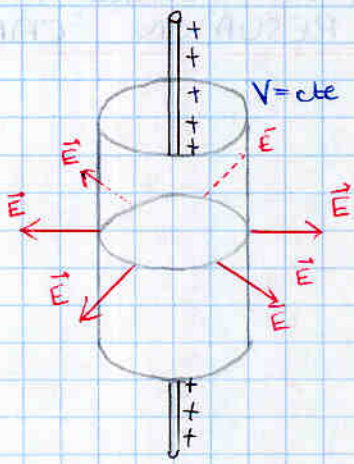
es una f.e.p.

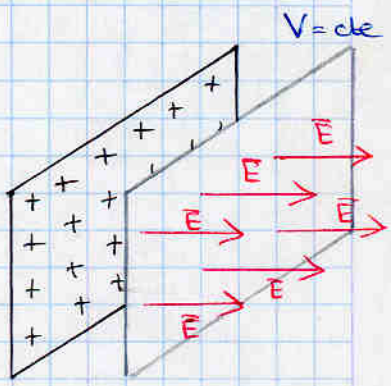
tiene superficies isoescalares.




El campo eléctrico es perpendicular a las superficies isoescalares



## · Relación entre potencial, trabajo, y energía potencial

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \cdot dV = -d(qV) = -dU$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{dW = -dU = -d(qV)}$$

$$\boxed{U = qV}$$

$$dW = -dU$$

$$\boxed{W_{AB} = -\int_A^B dU = U_A - U_B = q(V_A - V_B)}$$

una forma de explicar el potencial.

Trabajo de una carga q para ir de A a B por unidad de carga

### Circulación del campo eléctrico = potencial

$$\vec{E} = -\text{grad } V \qquad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = C_A^B$$

$$V \quad \frac{N}{C} \quad m$$

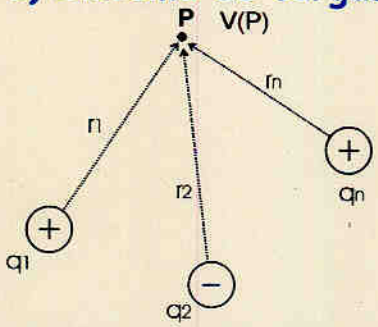
$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$ unidades del campo eléctrico

$\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow$ circulación no depende del camino

TODO ESTO ESTÁ MÁS CLARO Y ESQUEMATIZADO EN LA TABLA-RESUMEN "CAMPO ELÉCTRICO" ⟹

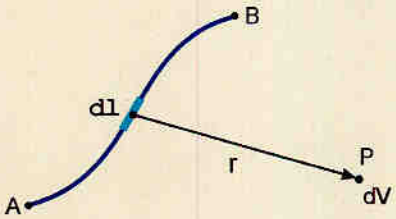
## Cálculo del potencial creado por distribuciones de carga

### a) Sistema de cargas discretas




$$V(P)=\sum_{i=1}^{n}V_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

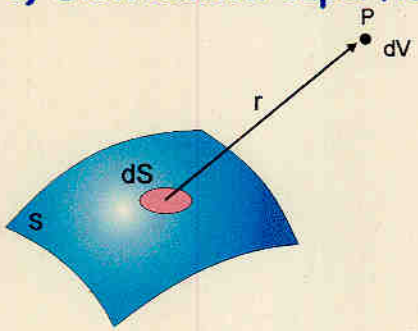
### b) Distribución lineal




$$\lambda=\frac{dq}{dl}\ (densidad\ lineal\ [C/m])$$

$$V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{r}$$

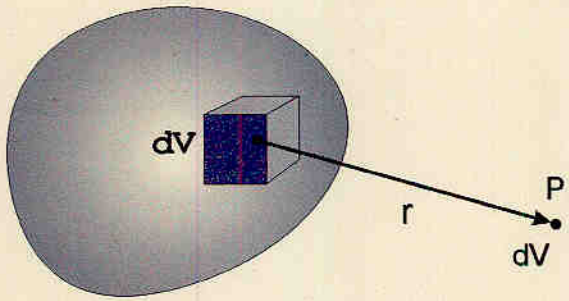
### c) Distribución superficial




$$\sigma=\frac{dq}{ds}\ (densidad\ \sup erficial\ [C/m^2])$$

$$V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma ds}{r}$$

### d) Distribución volumétrica



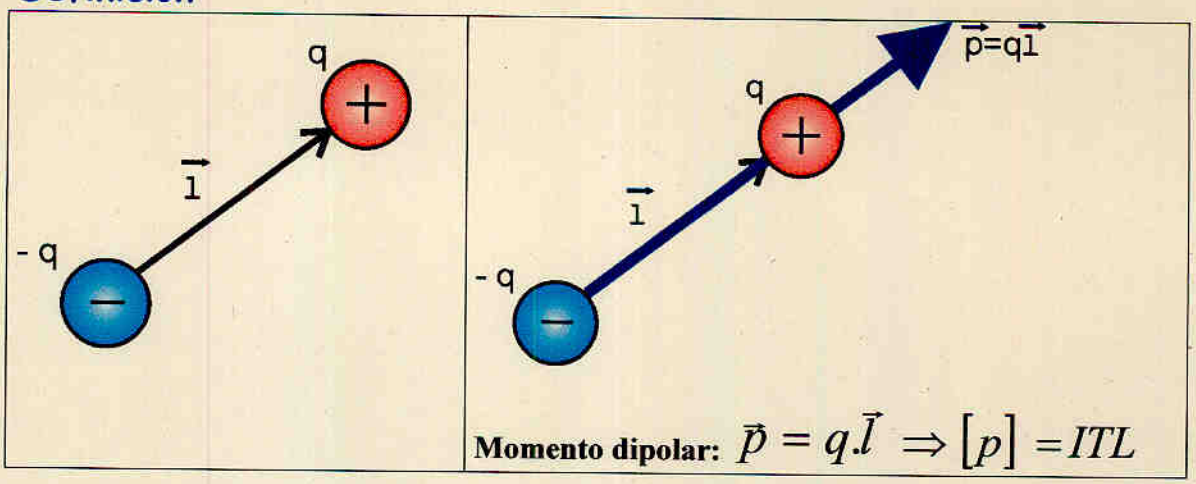

$$\rho=\frac{dq}{dv}\ (densidad\ volumétrica\ [C/m^3])$$

$$V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho dv}{r}$$

Todo lo anterior solo es aplicable cuando NO existen cargas en el infinito

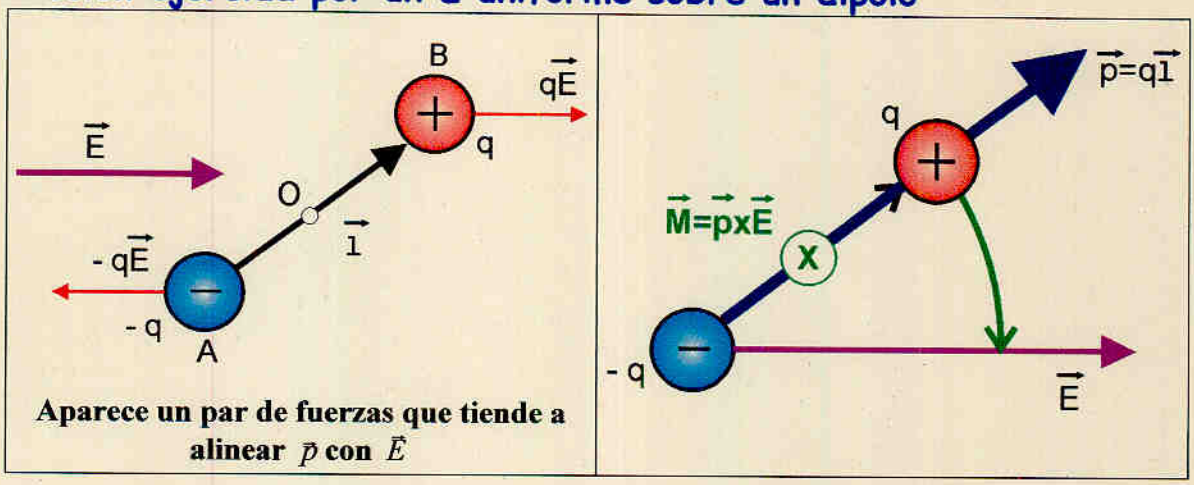
# Dipolo eléctrico

## Definición



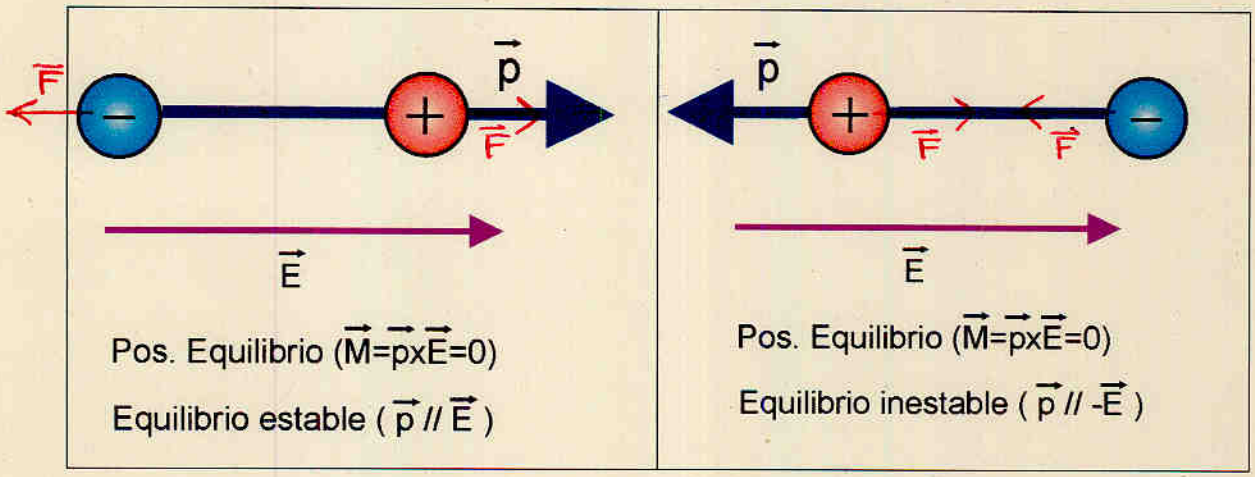

**Momento dipolar:** $\vec{p} = q.\vec{l} \Rightarrow [p] = ITL$

## Acción ejercida por un E uniforme sobre un dipolo




**Aparece un par de fuerzas que tiende a alinear $\vec{p}$ con $\vec{E}$**

## Posiciones de equilibrio

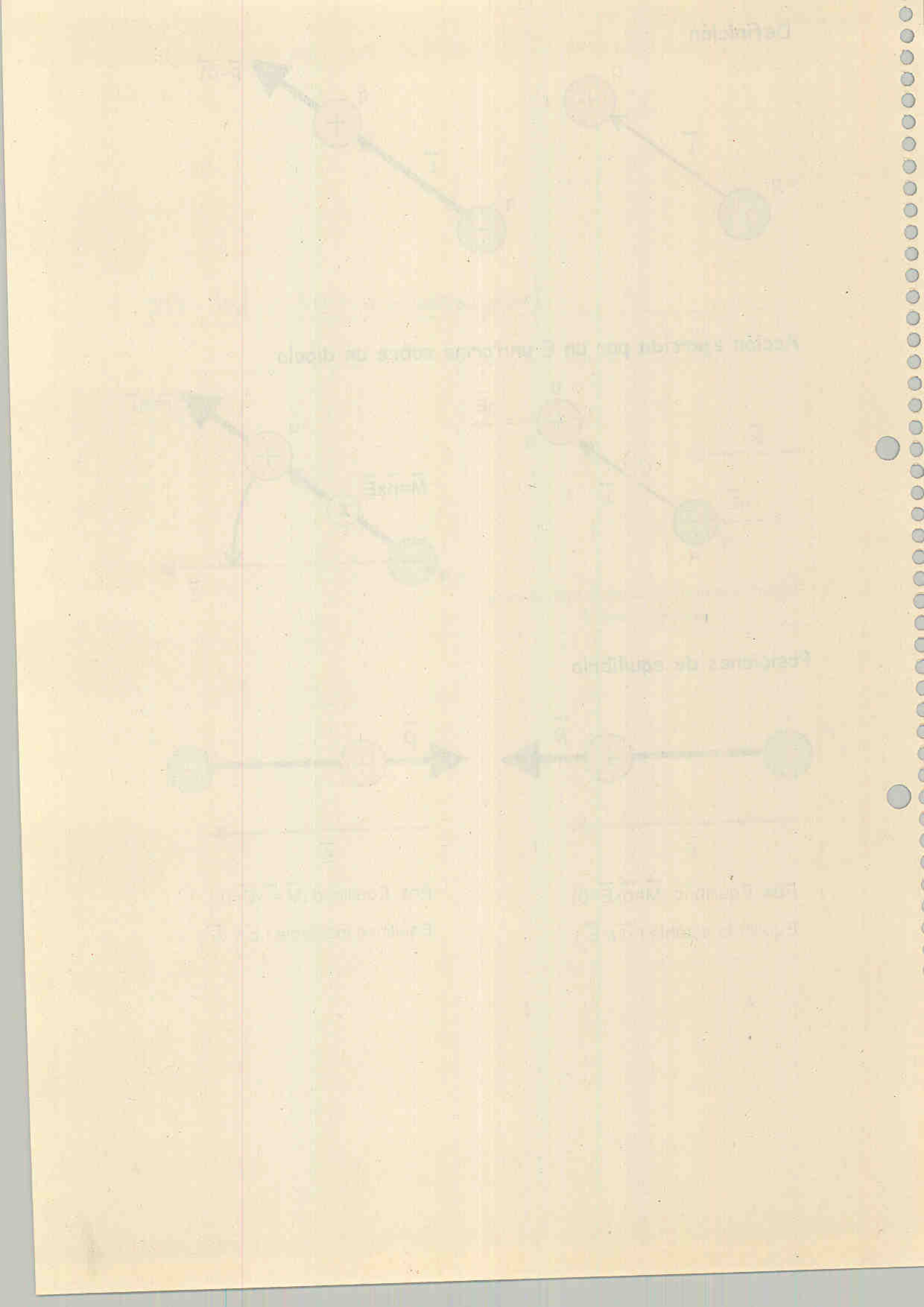



Pos. Equilibrio ($\vec{M}=\vec{p}x\vec{E}=0$)

Equilibrio estable ( $\vec{p}$ // $\vec{E}$ )

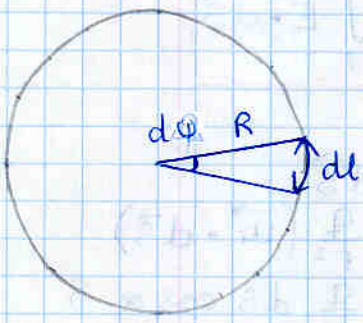
Pos. Equilibrio ($\vec{M}=\vec{p}x\vec{E}=0$)

Equilibrio inestable ( $\vec{p}$ // $-\vec{E}$ )



# Ángulos sólidos

## a) ángulo plano

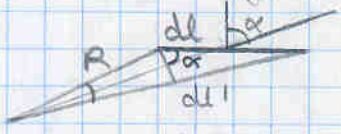



$$d\varphi = \frac{dl}{R}$$

unidad: radianes

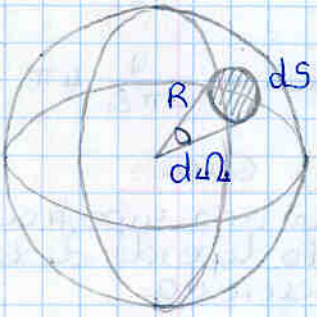
circunferencia completa:
$\varphi = 2\pi$ radianes

si dl es oblicuo frente a R




$$d\Omega = \frac{dl'}{R} = \frac{dl\cos\alpha}{R}$$

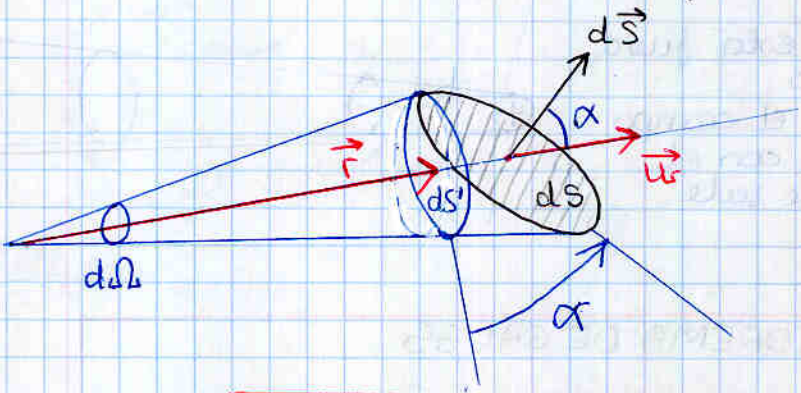
## b) ángulo sólido




$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

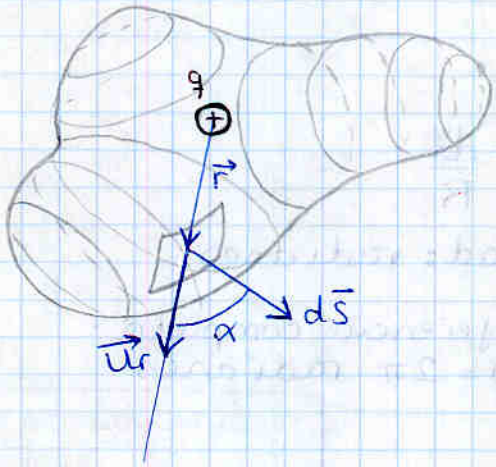
unidad: estéreo-radianes

si dS es oblicuo frente a r




$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

# • Flujo a través de una superficie cerrada




Flujo del campo eléctrico a través de la superficie cerrada.

$$\Phi_{sc} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

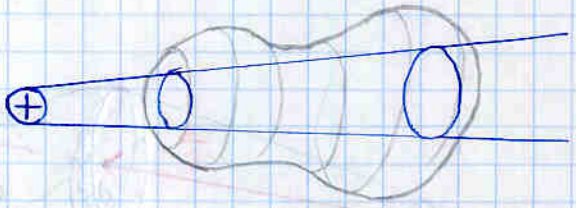
$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} (\vec{u}_r \cdot d\vec{S}) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos\alpha \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \boxed{\frac{dS\cos\alpha}{r^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \end{aligned}$$

$$\Phi_{s.c.} = \int_{s.c.} d\Phi = \int_{s.c.} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{s.c.} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi$$

$$\Phi_{s.c.} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

← Teorema de Gauss: el flujo de una superficie cerrada sólo depende de la carga encerrada

si la carga está fuera, $\Phi_{s.c.} = 0$.
se cancela el campo que entra con el campo que sale.



SI GA IMPORTANTE!!!

## TEOREMA DE GAUSS

$$\Phi_{s.c.} \equiv \iint_{s.c.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Utilidad del T. de Gauss

si se toman superficies cerradas en las cuales el campo es constante y paralelo a $dS$

$$\vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = |E|\,|dS|$$

$$\iint_{s.c.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{s.c.} E\,dS \underset{\text{si } E \text{ en cte}}{=} E \iint_{s.c.} dS = \boxed{E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

$|E|$ es cte en todo $S$
$\vec{E} \parallel d\vec{S}$ en todo $S$

## • Teorema de Gauss en forma diferencial

Sea una region con distribución continua de carga de densidad volumetrica $\rho$.

definición divergencia: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{d\Phi}{dv}$

T. de Gauss: $d\Phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\, dv}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

La divergencia de E en el punto P es igual a la densidad volumetrica de carga partido $\varepsilon_0$

Se puede razonar lógicamente:

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dv}\left(=\operatorname{div}\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

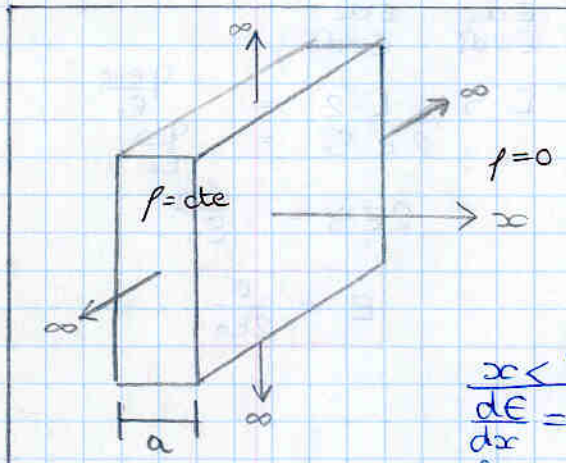
## • Ecuación de poisson

$$\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}(-\nabla V) = \nabla\cdot(-\nabla V) = -\Delta V$$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

## • Ecuación de Laplace

$$\boxed{\Delta V = 0}$$ en aquella region del espacio donde la densidad de carga es nula




calcular E(x)

por simetria, E sólo depende de x

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}^{\,0} + \frac{\partial E}{\partial z}^{\,0}$

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{dE}{dx}$

**$x < a/2$**

$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\int dE = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx$

$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x + cte$

si tomamos $E(x=0) = 0$

$cte = 0$,

$$\boxed{E(x < a/2) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}}$$

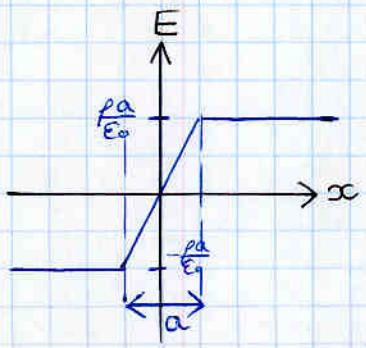
**$x > a/2$**

$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

$E = cte'$

$E(x = \frac{a}{2}) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0} + cte$

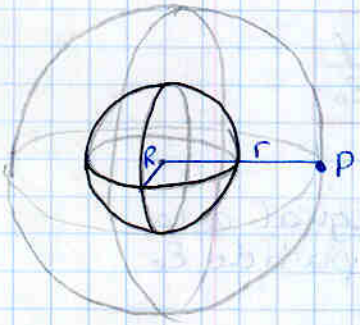
$$\boxed{E(x > a/2) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}}$$



## • Problemas utilizando el Teorema de Gauss

Si $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ $\forall$ S.C.
$E$ cte $\forall$ S.C. $\Longrightarrow E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$

### • Esfera cargada




$E(r > R)$

$$E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{S \varepsilon_0} \qquad q_{enc} = \rho \cdot V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad S = 4\pi r^2$$

$$E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}$$

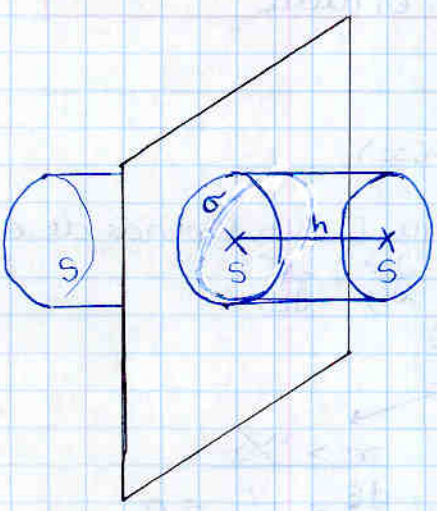
$E(r < R)$

$$E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{S \varepsilon_0} \qquad q_{enc} = \rho \cdot V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$$

$$E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

### • Plano Infinito




$$\Phi_{S.C.} = \underbrace{\Phi_{S.L.}}_{0} + \Phi_{B1.} + \Phi_{B2.} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$\Phi_{B1.}$: E cte, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ — $\Phi_{B2.}$: E cte, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$

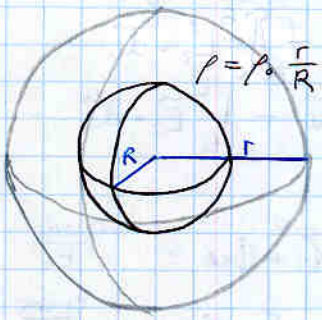
$$= E \cdot S + E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$2 E S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$2 E S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

- Esfera no cargada uniformemente $\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$




$E(r>R)$

$$E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{S\,\varepsilon_0}$$

$\rho$ · dV cartesiana / esférica

$$q_{enc} = \int_0^R \left(\rho_0 \frac{r}{R}\right)\left(4\pi r^2\, dr\right)$$

$$= \int_0^R \frac{\rho_0 4\pi r^3}{R}\, dr$$

$$= \left[\frac{\rho_0 \pi r^4}{R}\right]_0^R$$

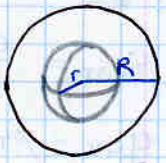
$$= \rho_0 \pi R^3$$

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\rho_0 \pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varepsilon_0}$$

$$= \frac{3\rho_0 R^3}{4 r^3 \varepsilon_0}$$

$E(r<R)$




$$E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{S\varepsilon_0}$$

$\rho$ · dV

$$q_{enc} = \int_0^r \left(\rho_0 \frac{r}{R}\right)\left(4\pi r^2 dr\right)$$

$$= \left[\frac{\rho_0 \pi r^4}{R}\right]_0^r$$

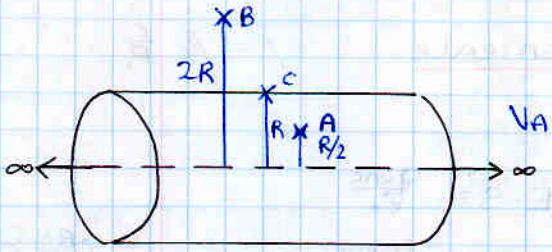
$$= \frac{\rho_0 \pi r^4}{R}$$

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\frac{\rho_0 \pi r^4}{R}}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varepsilon_0}$$

$$= \frac{3\rho_0 r}{4R\varepsilon_0}$$

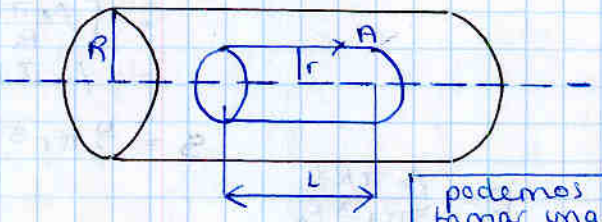
# · T. de Gauss para la ddp en un cilindro




se pide $V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q}$

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B)$$
$$= \int_C^A dV + \int_B^C dV$$
$$= -\int_C^A \vec{E_1}\cdot\vec{dr} - \int_B^C \vec{E_2}\cdot\vec{dr}$$

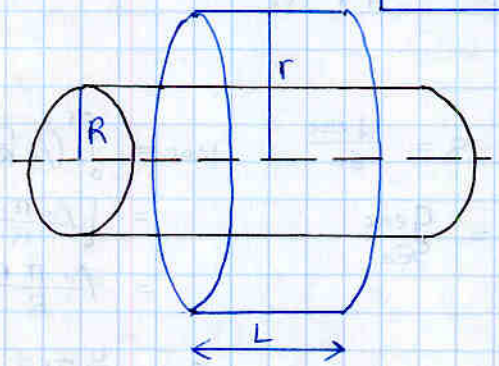
- para $r < R$




podemos tomar una longitud L que luego se cancela

$$\Phi_{SC} = \Phi_{B1}^{\,0} + \Phi_{B2}^{\,0} + \Phi_{SL} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$
$$E \cdot S_{LAT} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0 S_{LAT}} \qquad q_{enc} = \rho \pi r^2 L \qquad S_{LAT} = 2\pi r L$$
$$\boxed{E(r<R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}}$$

- para $r > R$




$$\Phi_{SC} = \Phi_{B1}^{\,0} + \Phi_{B2}^{\,0} + \Phi_{SL} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$
$$E \cdot S_{LAT} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0 S_{LAT}} \qquad q_{enc} = \rho \pi R^2 L \qquad S_{LAT} = 2\pi r L$$
$$\boxed{E(r>R) = \frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}}$$

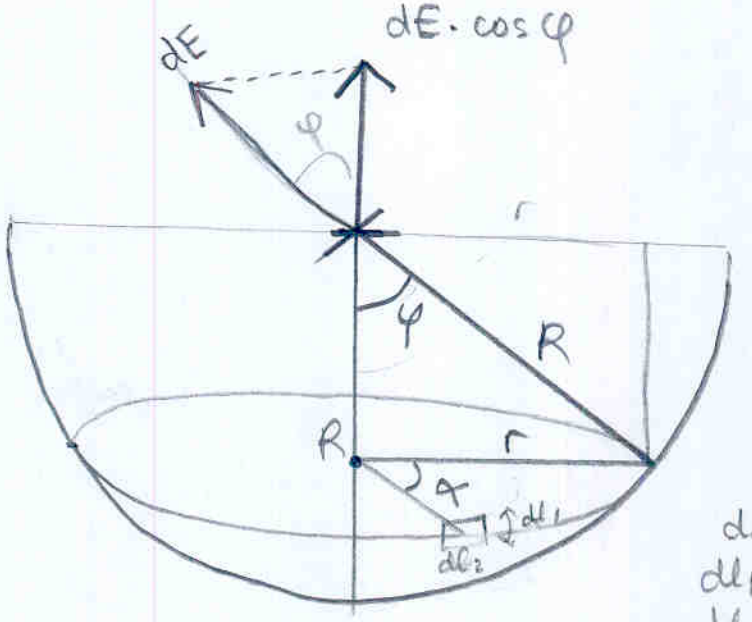
$$V_A - V_B = -\int_C^A \vec{E_1}\cdot\vec{dr} - \int_B^C \vec{E_2}\cdot\vec{dr}$$
$(E_1 // dr)$ $(E_2 // dr)$

$$= -\int_C^A \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr - \int_B^C \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr$$
$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_C^A r\,dr - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int_B^C \frac{1}{r} dr$$
$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_C^A - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_B^C$$
$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\left(\frac{A^2}{2} - \frac{C^2}{2}\right) + R^2 \ln\frac{C}{B}\right)$$

$A = R/2$
$C = R$
$B = 2R$

$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{8} - \frac{R^2}{2} + R^2 \ln\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln 2\right)$$
$$= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{3}{8} + \ln 2\right)$$

18.




$dS = dl_1\, dl_2$

$dl_1 = R\, d\varphi$

$dl_2 = r\, d\alpha = R \operatorname{sen}\varphi\, d\alpha$

$$\boxed{dS = R^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\alpha\, d\varphi}$$

$$\boxed{dq = \sigma\, dS}$$

$$E_z = \iint dE \cos\varphi \quad \text{(cos: la proyección de los dE)}$$

$$= \iint \frac{k\, dq}{R^2} \cos\varphi \qquad dE = k \cdot \frac{dq}{R^2}$$

$$= \frac{k\sigma}{R^2} \iint R^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\alpha\, d\varphi \cos\varphi$$

$$= k\sigma \iint \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\alpha\, d\varphi$$

$$= k\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi \underbrace{\int_0^{2\pi} d\alpha}_{2\pi}$$

$$= k\sigma\, 2\pi \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi k\sigma \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{E = \pi R \sigma} \checkmark$$

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sin} x \cos x$

$\frac{d}{d\varphi}(\operatorname{sen}\varphi)^2 = 2\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$

$$V = \iint dV = \iint \frac{k\, dq}{R} = \iint \underbrace{\frac{k\sigma}{R}}_{dc} dS = \frac{k\sigma}{R} \iint dS = \frac{k\sigma}{R} S$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$S = 2\pi R^2$

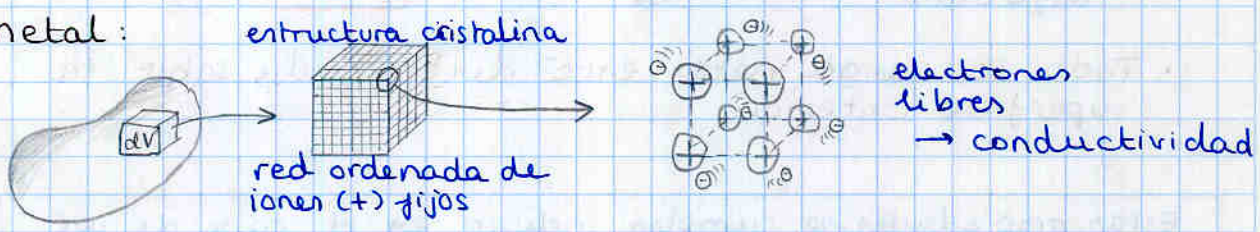
# LECCION 8. CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO

## · Conductores y dieléctricos. Metales

**Conductor:** posee cargas libres (o portadores) susceptibles de ser puestas en movimiento bajo la acción de un campo eléctrico.
Esto permite la circulación de corriente eléctrica a su través. ej (metales, soluciones acuosas de sales y ácidos)

**Dieléctrico:** sustancia incapaz de conducir la corriente eléctrica porque no posee cargas libres.
ej (aire seco, plasticos, resina, porcelana...)

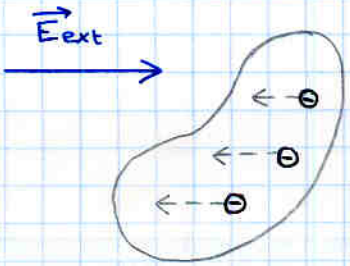
**Metal:**



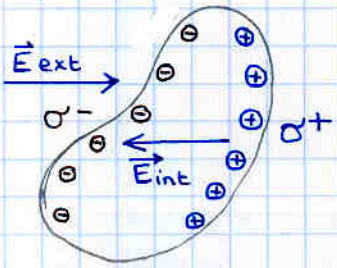

En condiciones normales
- electricamente neutro
  ↳ cada átomo neutro aporta un ion positivo fijo y un electron móvil.
  Se crea una especie de "gas de electrones" que baña todo el cristal.

Exceso de electrones → metal cargado negativamente
Carencia de electrones → metal cargado positivamente

## · Equilibrio de un conductor




sobre un conductor metálico aplicamos un campo eléctrico. Los electrones libres se moverán en sentido contrario al mismo




Los electrones alcanzar la superficie → densidad superficial de carga $\sigma^-$
En la superficie opuesta aparece una densidad superficial de carga $\sigma^+$ (debe mantenerse la neutralidad)

Ambas densidades superficiales crean un campo $\vec{E}_{int}$ opuesto al $\vec{E}_{ext}$.
Una vez alcanzado el equilibrio, la distribución espacial y los valores de las densidades de carga alcanzan la cuantía justamente necesaria para que el campo resultante sea nulo.

# · Propiedades de un conductor en equilibrio

- campo eléctrico interior es nulo.

$$\vec{E} = 0$$

- Potencial en el interior es constante:

puesto que $\vec{E} = -\text{grad}\,V = 0 \Rightarrow \boxed{V = cte}$

↳ la superficie del conductor es equipotencial

- La densidad volumétrica de carga $\rho$ en el interior es nula.

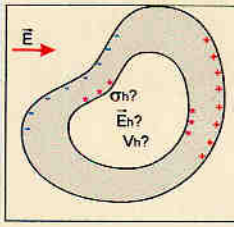
$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = 0$$

T. de Gauss diferencial $\quad \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$

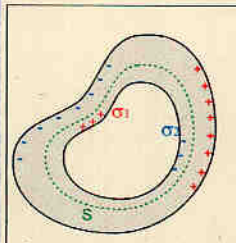
- Toda la carga neta está distribuida sobre la superficie exterior.

Estas propiedades se cumplen incluso en el caso de un conductor con una cavidad en su interior

Razonemos por reducción al absurdo:



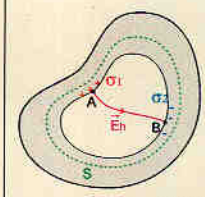

Supongamos que en la superficie interior del hueco aparece una densidad de carga $\sigma_h$




Aplicando el teorema de Gauss a una superficie cerrada S que contenga al hueco y trazada en el seno del material conductor, se obtiene que la **carga neta** en la superficie del hueco debe ser **nula**.

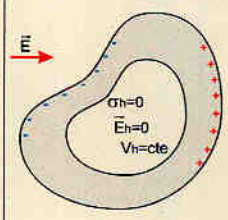
$$0 = \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

(Nótese que E=0 en S)




$V_A - V_B = 0 \rightarrow \vec{E}_h = 0 \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $V_h = V_A = V_B = cte$

Si existiesen σ's de signos contrarios, existirían líneas de campo como la mostrada. En ese caso la circulación del campo entre A y B sería estrictamente positiva.
Sin embargo $V_A = V_B$ (sup. Equipot.)
Por tanto, el campo $E_h$ debe ser idénticamente nulo a lo largo de toda la supuesta línea de campo.



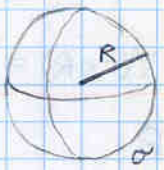

Concluimos por tanto que:
En la pared del hueco la densidad de carga es nula.
En el interior del hueco, el campo es nulo.
De donde, el potencial en todo el hueco es cte. e igual al potencial del conductor.

Nota: En una región del espacio desprovista de carga, el potencial no puede alcanzar un máximo ni un mínimo relativo.

ejercicio: conductor cargado en equilibrio

Datos:

Esfera conductora radio R
carga Q




Se pide: E(r)
V(r)
σ

E(r)

$r < R$

Por T. de Gauss

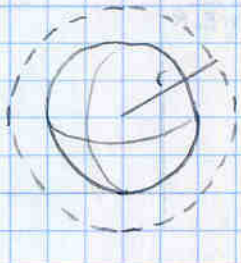
$$\iint_{s.c.} \vec{E}\, dS = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$q_{enc} = 0$

$E(r<R) = 0$

$r > R$

Por T. de Gauss



$$\iint_{s.c.} \vec{E}\, dS = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

por geometría
$E = cte \ \forall s.c.$
$\vec{E} \parallel d\vec{S} \ \forall s.c.$

$$E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{S\,\varepsilon_0} \qquad q_{enc} = Q \quad S = 4\pi r^2$$

$$\boxed{E(r>R) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

## V(r)

$r \leq R$

$$V = -\int E\, dr$$

$$= -\int 0\, dr$$

$$\boxed{V(r \leq R) = \text{cte}}$$

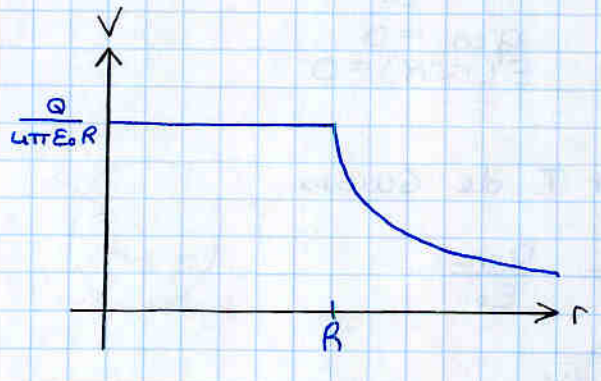
$r \geq R$

$$V = -\int E\, dr$$

$$\boxed{V(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{\text{cte}}^{\,0}}$$

suponiendo que no hay cargas en el infinito.

$$V(r=R) = V(r)_{r \to R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$




## σ

$$Q = \iint_{\text{SUP. ESFERA}} \sigma\, dS$$

$$= \sigma \iint dS$$

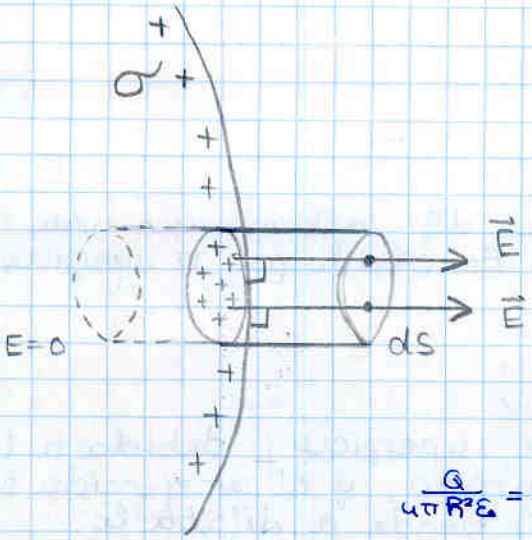
$$= \sigma\, 4\pi R^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

## · Teorema de Coulomb

Relaciona la densidad superficial de carga de un conductor y el campo E en un punto infinitamente próximo a su superficie.

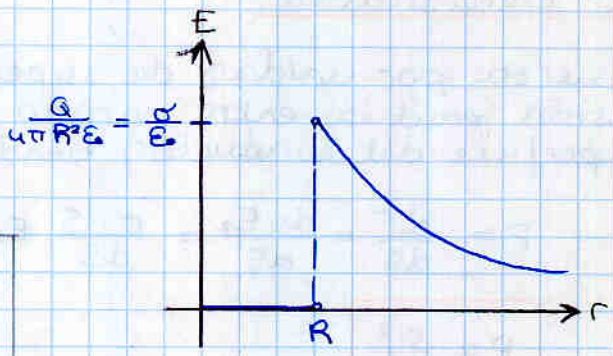
Apliquemos el T. de Gauss a un cilindro de sección dS con una base en un punto P infinitamente próximo a la superficie del conductor, y la otra base en el interior del conductor.

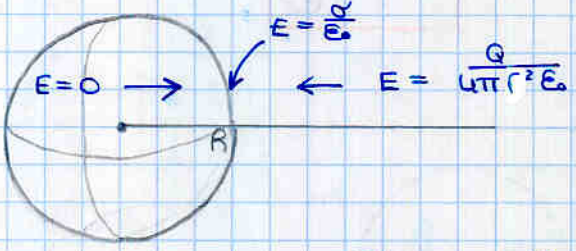



$$E \cdot dS = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot dS = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_n}$$




$$E(r)_{r\to R} = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

### Presión electrostática

En el punto infinitamente próximo a la superficie actuán dos campos eléctricos: el creado por las cargas dq de dS

dS se puede considerar un plano infinito.

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

y el creado por las cargas que no estan en dS.

es una forma de repartir el campo en el punto próximo entre la sup cerrada y el resto del conductor

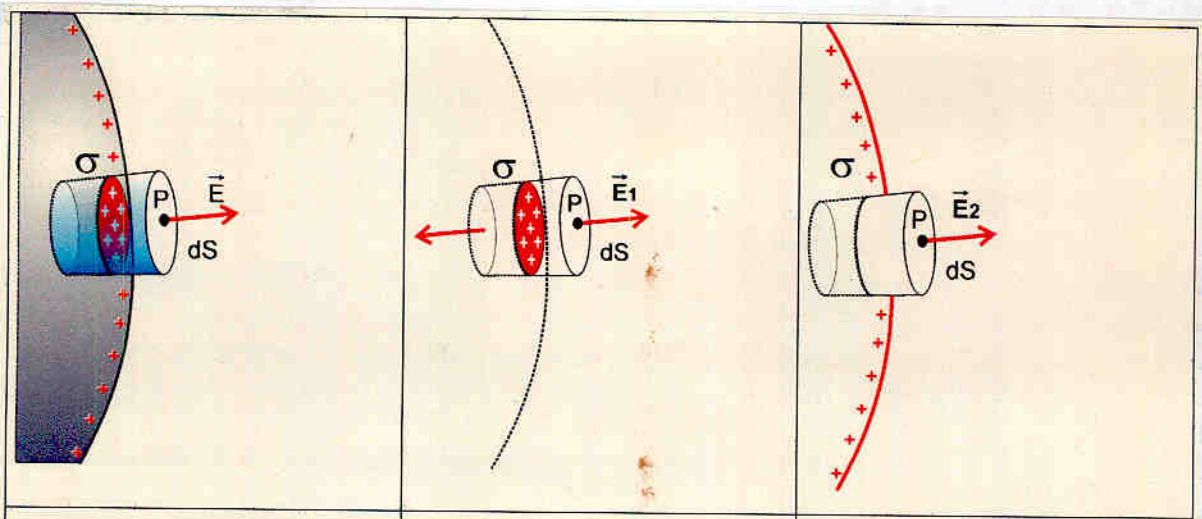
Del teorema de Coulomb sabemos el campo total en P

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

que por el teorema de superposición

$$E = E_1 + E_2 \qquad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + E_2$$

$$\vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_n}$$




| | | |
|---|---|---|
| $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_n$ | $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_n$ | $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_n$ |

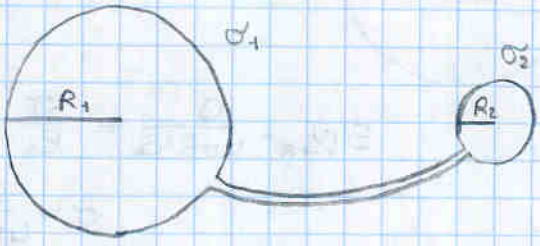
Sobre la carga dq situada en dS actua pues una fuerza debida al campo $E_2$ creado por la superficie del conductor

Presión electrostática:

La fuerza por unidad de superficie, debida a la repulsión mutua entre cargas, y al ser ejercida sobre la superficie del conductor, tiende a dilatarlo.

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{dq\,E_2}{dS} = \frac{\sigma\,dS}{dS}\,E_2 = \sigma E_2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$




la carga se reparte de la siguiente forma.
(en un ej lo demostraremos)

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}Q \qquad Q_1 > Q_2$$

$$Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}Q \quad \text{lineal}$$

la presión electrostática es mayor en radios pequeños.

en cuanto a $\sigma$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \text{cuadrático}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \qquad \sigma_2 > \sigma_1$$

## Fenómenos de influencia electrostática.

Un conductor cargado puede hacer aparecer sobre otro una carga superficial. A este fenómeno lo llamamos influencia electrostática.

### Elementos correspondientes:

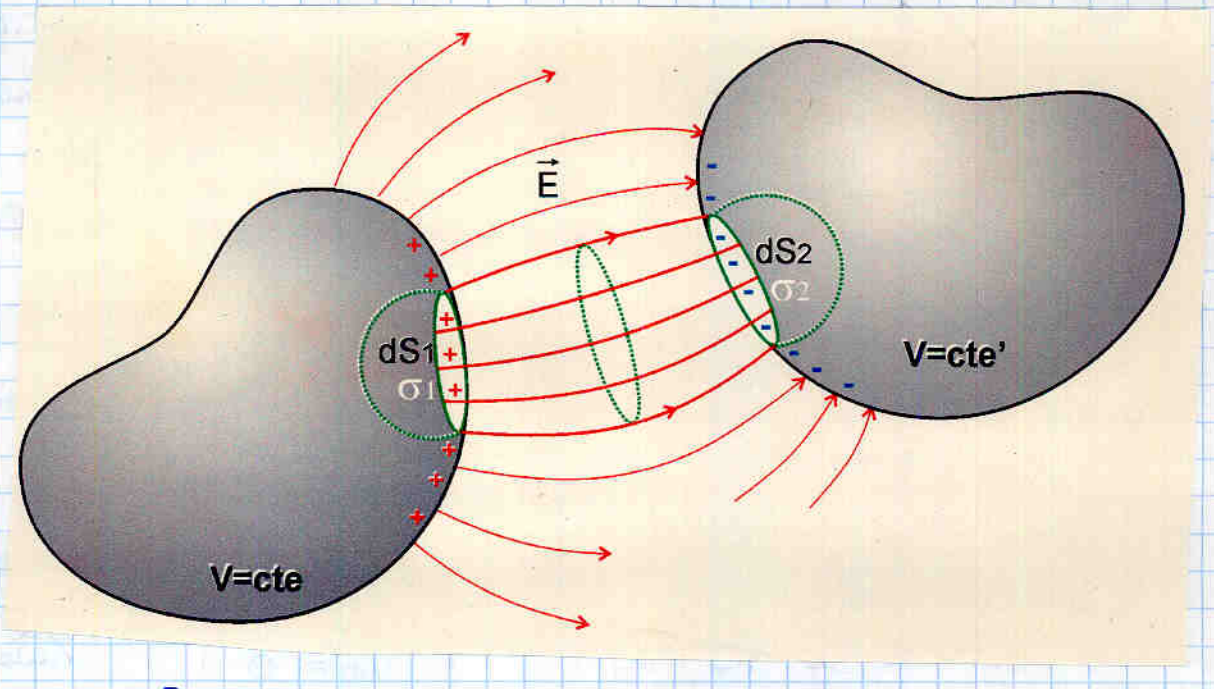
Considerando un elemento $dS_1$ en un conductor, con una carga $dq_1$, si se sigue el manojo de líneas de campo que parten de él es posible que dichas líneas delimiten otra superficie $dS_2$ con una carga $dq_2$ en otro conductor.

se cumple:

$$dq_1 = -dq_2$$

$$\sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 dS_2$$

Para demostrarlo basta aplicar el T. de Gauss a la siguiente superficie cerrada, la cual no es atravesado por líneas de campo y el flujo es por tanto cero.




como $\Phi = 0$, la carga encerrada también lo es.

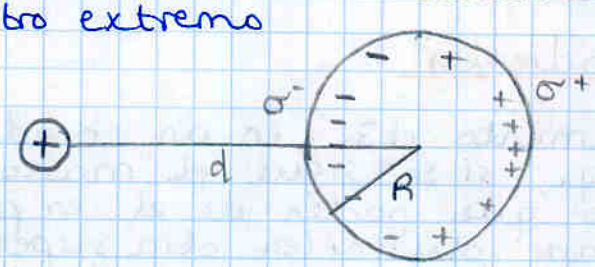
No todos los dS que cojamos tienen un $dS_2$ correspondiente → Influencia parcial

ejercicio:

una carga puntual $+q$ cerca de un conductor (inicialmente descargado)

Por influencia aparecen cargas negativas en la superficie del conductor cercana a la carga

Para mantener la neutralidad aparecen cargas en el otro extremo




se pide: el potencial en la esfera.

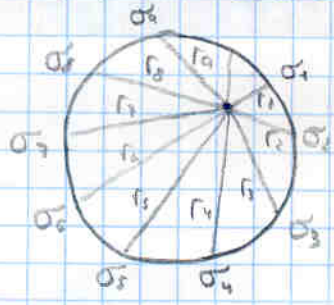
$$V_{esfera} = V_q + V_\sigma$$

$$V_q \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}$$

$$V_\sigma \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$ ← las cargas de la esfera; ← la distancia a cada carga

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, dS}{r}$$

AGH! $\sigma$ no es CTE! y no sabemos como varía!




y ENCIMA r va variando

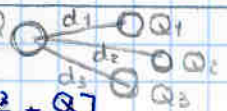
en caso de que $Q_{NETA} \neq 0$ (no estaba inicialmente descargado)

$$V_{esfera} = V_q + V_\sigma$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dq$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

imagina lo siguiente




$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2} + \frac{Q_3}{d_3} + \frac{Q}{R}\right]$$ FACIL!!

IDEA!

El pot. en la esfera es independiente del punto que escojamos.

si eligimos el centro:

$$r = cte = R$$

$$\frac{1}{R}\int dq = 0$$ puesto que la carga neta es nula!

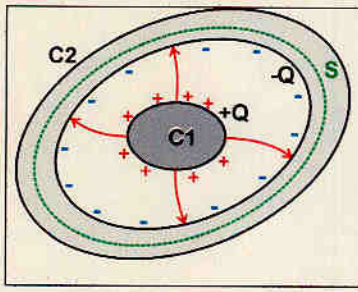
¡ $V_\sigma = 0$ !

$$\boxed{V_{esfera} = V_q}$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}}$$

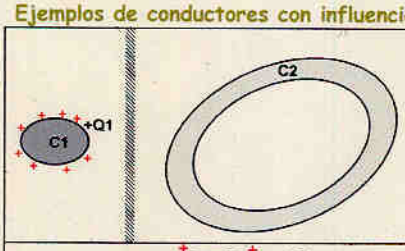
el potencial de TODO el conductor es el mismo que el que aparecería en el punto del espacio donde se encuentra el centro del conductor si no hubiera conductor

# Influencia total

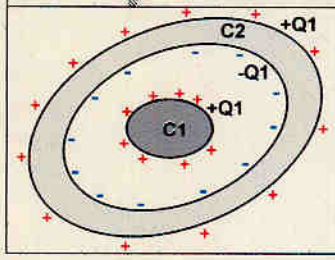



Cuando uno de los conductores envuelve por completo al otro decimos que existe **influencia total** entre ambos.
Esto implica que la carga, -Q que aparece por influencia en la superficie expuesta del conductor $C_2$, es igual y de signo con-trario a la del conductor $C_1$.
Para demostrarlo basta con aplicar el teorema de Gauss a la superficie cerrada S

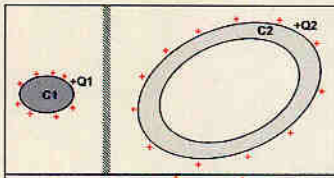
## Ejemplos de conductores con influencia total



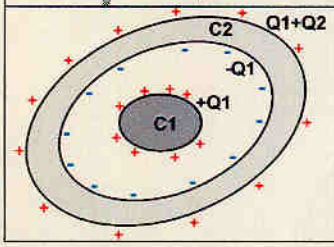

Conductor $C_2$: inicialmente neutro
Conductor $C_1$: cargado



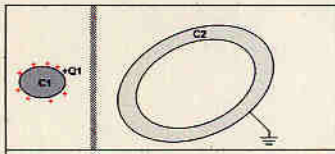

Por influencia total, aparece $-Q_1$ en la superficie interior del conductor 2.
Pero en la superficie exterior del conductor $C_2$ debe aparecer $+Q_1$ para mantener la neutralidad, dado que ha permanecido aislado.



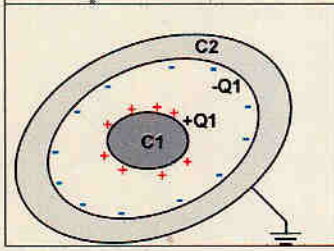

Conductor $C_2$: inicialmente cargado
Conductor $C_1$: cargado




Por influencia total, aparece $-Q_1$ en la superficie interior del conductor 2.
En la superficie exterior del con-ductor $C_2$ debe aparecer $Q_1+Q_2$ para mantener la carga inicial, puesto que ha permanecido aislado.



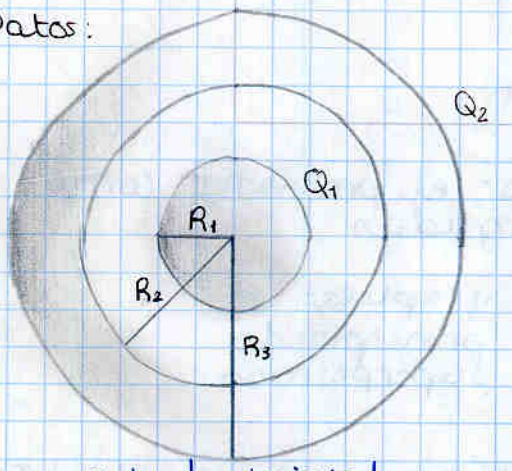

Conductor $C_2$: inicialmente neutro y conectado a tierra (V=0)
Conductor $C_1$: cargado




Por influencia total, aparece $-Q_1$ en la superficie interior del conductor 2.
En la superficie exterior del con-ductor $C_2$ no aparece carga, puesto que V=0 en todo el espacio exterior a dicho conductor, -> E=0-> $\sigma_{2ext}$=0-> $Q_{2ext}$=0. Observese que $C_2$ no conserva la neutralidad, porque no ha permane-cido aislado.

Ejercicio

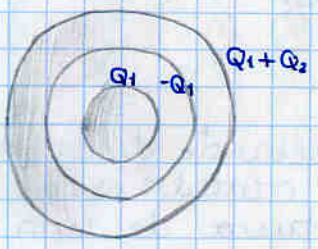
Datos:




estado inicial

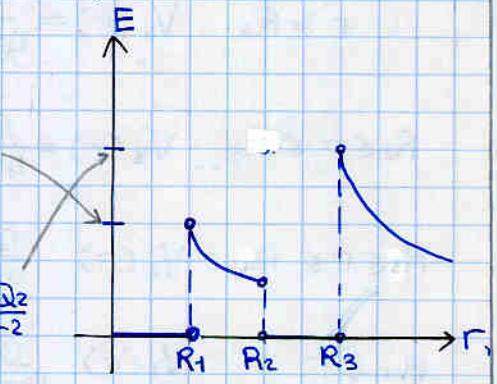
Se pide:
- Distrib cargas
- $V_1$
- $V_2$
- $E(r)$
- $V(r)$

a) Distribución de cargas:




b) $E(r)$ por Gauss (hay 4 zonas)

| | | |
|---|---|---|
| $r < R_1$ | $Q_{enc} = 0$ | $E = 0$ |
| $R_1 < r < R_2$ | $Q_{enc} = Q_1$ | $E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ |
| $R_2 < r < R_3$ | $Q_{enc} = Q_1 - Q_1 = 0$ | $E = 0$ |
| $R_3 < r$ | $Q_{enc} = Q_1 + Q_2$ | $E = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ |




c) $V(r) = -\int E\,dr$

| | |
|---|---|
| $r \leq R_1$ | $V_1 = cte_1$ |
| $R_1 \leq r \leq R_2$ | $V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte_2$ |
| $R_2 \leq r \leq R_3$ | $V_3 = cte_3$ |
| $R_3 \leq r$ | $V_4 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte_4$ |

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_1+Q_2}{R_3} - \frac{Q_1}{R_2}\right]$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1+Q_2}{R_3} - \frac{Q_1}{R_2}\right]$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1+Q_2}{R_3}\right]$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1+Q_2}{r}\right]$$

- faltan las constantes. Sabiendo que $V_4(\infty) = 0$ y que el potencial es continuo las vamos encontrando de fuera a dentro.

$V_4(r=\infty) = 0 \rightarrow cte_4 = 0$

$V_3 = V_4(R_3) \rightarrow cte_3 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

$V_2(R_2) = V_3 \rightarrow cte_2 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$V_1 = V_2(R_1) \rightarrow cte_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

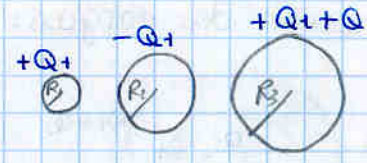
Truco para el problema anterior

1º Hay que saberse el pot de una esfera:

$$V(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (\text{cte})$$

el truco consiste en considerar el problema como 3 superficies esféricas cargadas




y aplicar el principio de superposición.

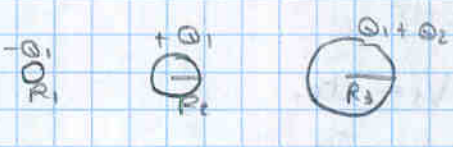
empezando desde fuera hacia dentro y aplicando la fórmula del recuadro rojo de arriba segun nos encontremos dentro o fuera de una superficie esférica.

$r \geq R_3 \quad V_4(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$R_2 \leq r \leq R_3 \quad V_3(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

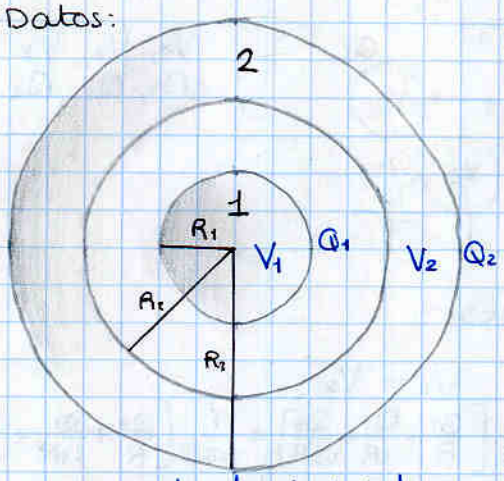
$R_1 \leq r \leq R_2 \quad V_2(r) \quad \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

$R_1 \geq r \quad V_1(r) \quad \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$



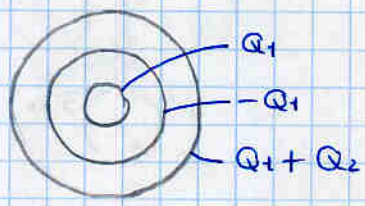
ejercicio

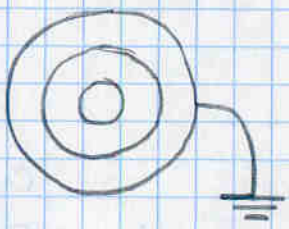
- Datos:




estado inicial

- Distrib. carga



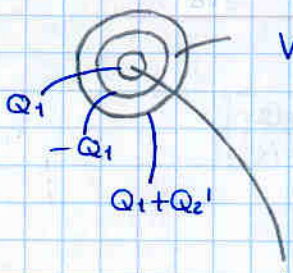
- 1°. Conectamos 2 a tierra:

Conductor 2: $V_2 \to 0$, $Q_2 \to Q_2'$?

Conductor 1: mantiene la carga por estar aislado. $Q_1 \to Q_1$

Cambia su potencial $V_1 \to V_1'$?

Por principio de superposición:



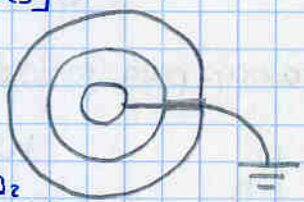

$$V_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{r} - \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1+Q_2'}{R_3}\right] = 0$$

$$Q_1 + Q_2' = 0$$

carga sup ext = 0

carga neta de 2: $-Q_1$

$$V_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{0}{R_3}\right]$$



- 2° Conectamos 1 a tierra

cond 1: $V_1 \to 0$, $Q_1 \to Q_1'$?

cond 2: $Q_2 \to Q_2$, $V_2 \to V_2'$?

Por principio de superposición

$$V_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1'}{R_1} - \frac{Q_1'}{R_2} + \frac{Q_1'+Q_2}{R_3}\right] = 0$$

$$Q_1'\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] + \frac{Q_2}{R_3} = 0$$

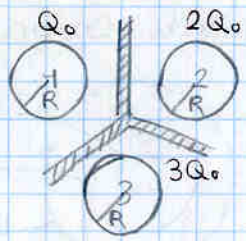
$$Q_1' = -\frac{Q_2/R_3}{\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right]}$$

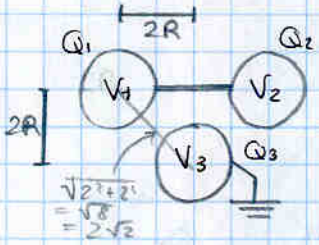
$$V_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1'}{r} - \frac{Q_1'}{r} + \frac{Q_1'+Q_2}{R_3}\right]$$

Ejercicio de examen

NOTA: Suponer que la carga de los conductores se distribuye uniformemente sobre su superficie y luego:

Datos: estado inicial




se pide: $V_1, V_2, V_3$ $Q_1, Q_2, Q_3$

a) Carga de cada conductor:

$C_1$ conectado a $C_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{Q_1}{R}+\frac{Q_2}{4R}+\frac{Q_3}{\sqrt{8}R}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_2}{R}+\frac{Q_1}{4R}+\frac{Q_3}{\sqrt{8}R}\right]$$

$$Q_2 = Q_1$$

además $Q_1 + Q_2 = Q_0 + 2Q_0$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_0+2Q_0}{2}$$

$C_1$: $\underline{Q_1 = \frac{3}{2}Q_0}$

$C_2$: $\underline{Q_2 = \frac{3}{2}Q_0}$

$C_3$: $V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{3}{2}Q_0}{2\sqrt{2}R}+\frac{\frac{3}{2}Q_0}{2\sqrt{2}R}+\frac{Q_3}{R}\right]=0$ por estar conectado a tierra

$$\frac{3Q_0}{2\sqrt{2}R}+\frac{Q_3}{R}=0$$

$$\underline{Q_3 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}Q_0}$$

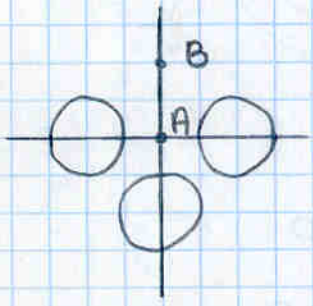
b) Potencial de cada conductor:

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{3}{2}Q_0}{R}+\frac{\frac{3}{2}Q_0}{4R}-\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}Q_0}{2\sqrt{2}R}\right]$$

$$= \frac{3Q_0}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V_3 = 0$$

c) Trabajo para trasladar carga puntual q desde A (0,0,0) a B(0,0,2R)




$$W_{AB} = q(V_A - V_B)$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{3}{2}Q_0}{2R}+\frac{\frac{3}{2}Q_0}{2R}-\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}Q_0}{2R}\right]=\frac{3Q_0}{16\pi\varepsilon_0 R}\left[1+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{3Q_0}{16\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{3}{2}Q_0}{2\sqrt{2}R}+\frac{\frac{3}{2}Q_0}{2\sqrt{2}R}-\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}Q_0}{4R}\right]=\frac{3Q_0}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R}\left[1+1-\frac{1}{2}\right]$$

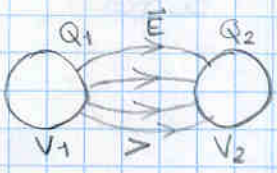
$$= \frac{3Q_0}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) = q\left(\frac{3Q_0}{16\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{3Q_0}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

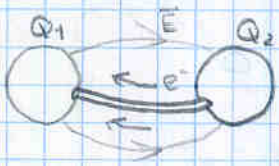
$\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{3Q_0 q}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R}\left(2\sqrt{2}-1-\frac{3}{2}\right)=\frac{3Q_0 q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{5}{4\sqrt{2}}\right)$$

# Conexión de conductores




la ddp entre 2 conductores crea un campo eléctrico

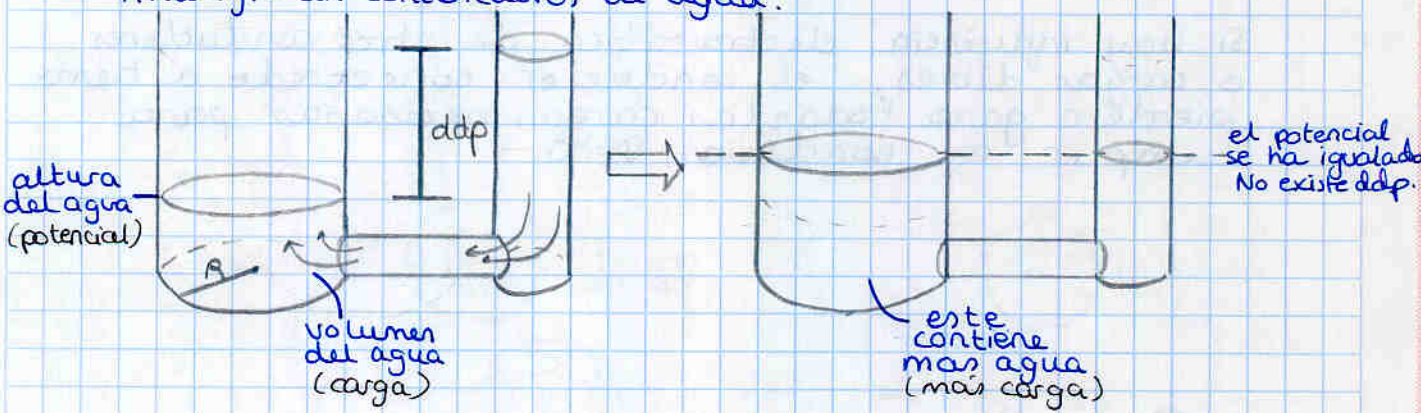



el campo eléctrico provoca movimiento de cargas

Este movimiento continua hasta que no haya diferencia de potencial.

Al conectar 2 conductores, se produce un movimiento de cargas hasta que se iguala el potencial. Esto NO significa que los dos acaben con la misma carga

Analogía con contenedores de agua.




ejemplo

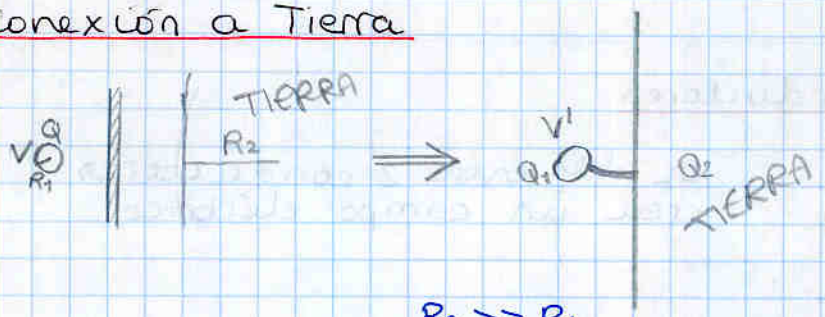
$$\left.\begin{array}{l} V \longrightarrow V' \\ 0 \longrightarrow V' \\ Q \longrightarrow Q_1 \\ 0 \longrightarrow Q_2 \end{array}\right\} \quad Q = Q_1 + Q_2$$

$$\left.\begin{array}{l} V' = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ V' = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V' \\ Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V' \end{array}\right| + \quad Q = 4\pi\varepsilon_0 V' (R_1 + R_2) \longrightarrow \boxed{V' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}}$$

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V' \qquad Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V'$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q \qquad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q}$$

# Conexión a Tierra




la conexión a tierra se simboliza como

$R_2 >> R_1$

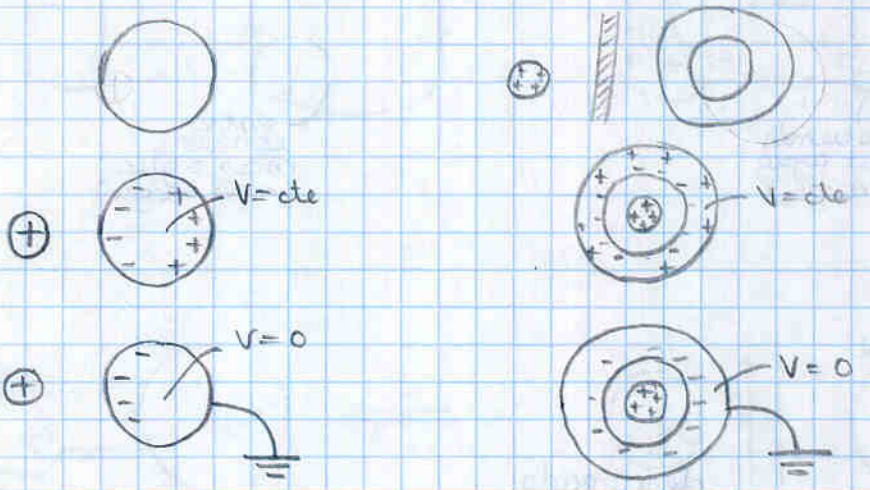
$$V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_2 + R_1)} = 0$$

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0$$

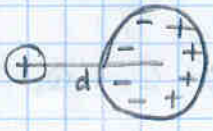
en este ejemplo la carga final del conductor se va, pero esto no siempre es así:
lo que siempre se cumple es

**Al conectar un conductor a tierra, $V = 0$**

Si hay influencia electrostática de otros conductores o cargas libres, el conductor conectado a tierra pierde o gana todas las cargas necesarias para cumplir la condición $V = 0$

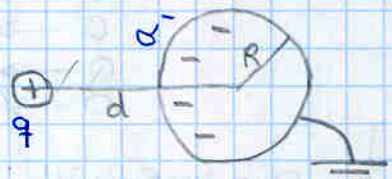



ejemplo: calcular la carga de la esfera




$V = V_{ptos\ esfera} = V_{centro} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

(ej. anterior)




elegimos un punto cómodo ya que V cte ∀ ptos esfera

$V = V_{ptos\ esfera} = 0$
$= V_{centro} = 0$
$V_q + V_{\sigma^-} = 0$

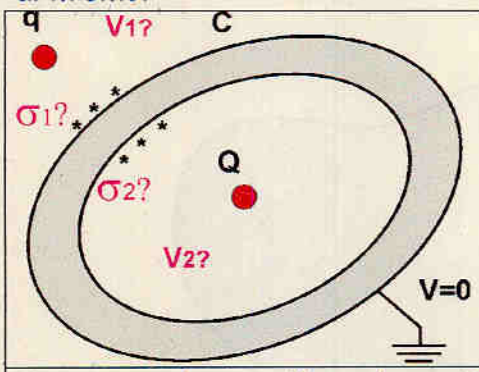
$$V_{\sigma^-} = -V_q$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int \sigma\, dS = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

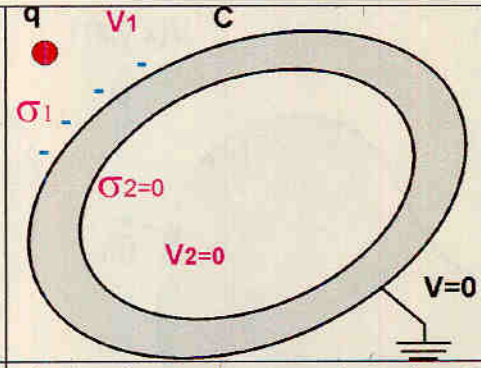
$$\frac{Q_{NETA}}{R} = -\frac{q}{d} \longrightarrow Q = -\frac{q}{d}R$$

## Pantalla eléctrica

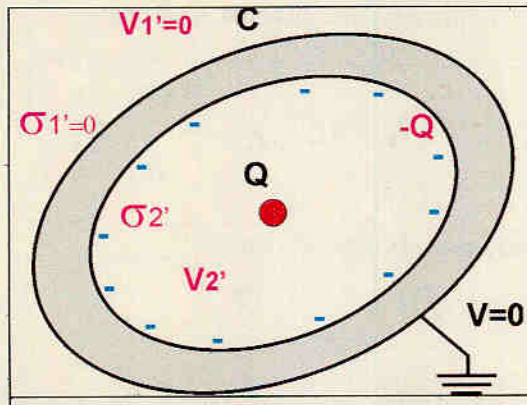
Un conductor hueco conectado a tierra (V=0) constituye lo que se llama una pantalla eléctrica, puesto que divide al espacio en dos regiones eléctricamente independientes. A saber, la cavidad interior al conductor y el espacio exterior al mismo.



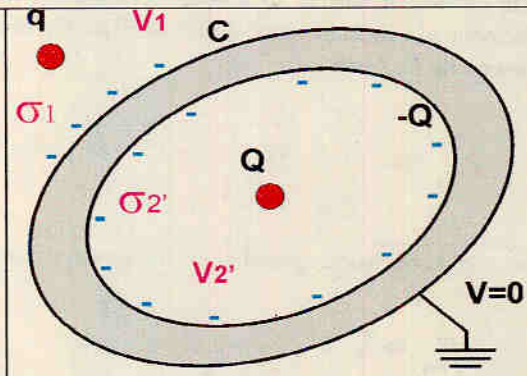

Veamos de quién dependen las densidades de carga y los potenciales que aparecen en el interior y exterior de la pantalla. Para ello aplicaremos el principio de superposición.




a) Anulamos la carga interior Q=0.
Esto implica (según 8.2) $\sigma_2=0$ y $V_2=0$.
El efecto producido por la carga exterior q, se limita al espacio exterior a la pantalla.




b)Anulamos la carga exterior q=0...
... Esto implica que el potencial en la región exterior al conductor $V'_1=0$, puesto que se trata de una región sin cargas cuyas condiciones de contorno son V=0 tanto en la superficie exterior del conductor como en el infinito (Véase nota 1).
Por lo tanto E=0 en el exterior, lo que implica $\sigma'_1=0$.
El efecto producido por la carga interior Q, se limita al espacio interior a la pantalla.




a) Sumamos las soluciones a)+b)...
... Resultando que:

- La densidad de carga, $\sigma'_2$ en la superficie interior y el potencial $V'_2$ en la región interior solo dependen de la carga interior Q.
- La densidad de carga, $\sigma_1$ en la superficie exterior y el potencial $V_1$ en la región exterior solo dependen de la carga exterior q.

## Sistema de conductores en equilibrio.

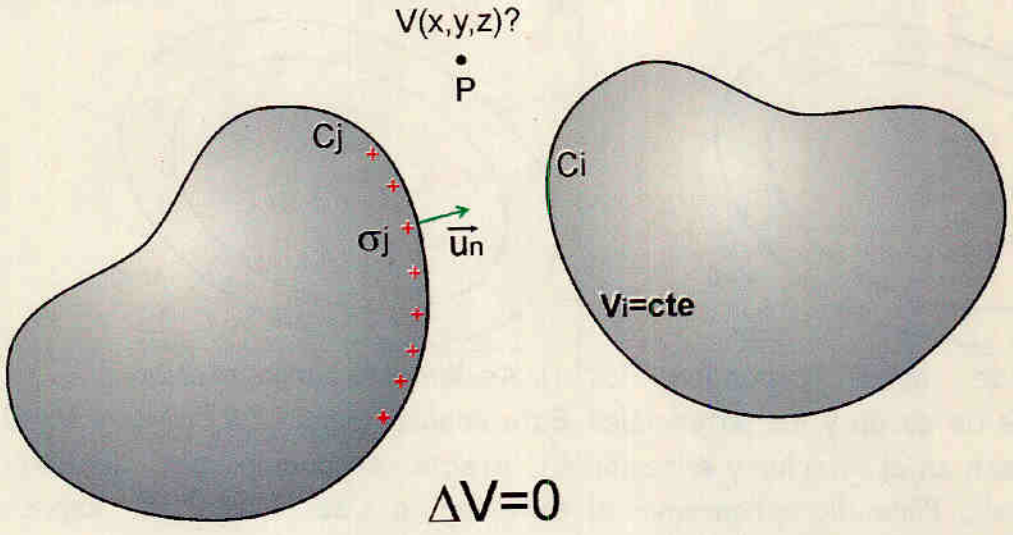
En la región del espacio vacío (sin cargas), comprendida entre conductores cargados en equilibrio, la función potencial V(x,y,z), solución del problema, debe verificar:

a) La ecuación de Laplace, $\Delta V=0$

y alguna de las siguientes condiciones de contorno excluyentes:

b) $V(Ci)=Vi=cte$. donde Ci: puntos de la superficie del conductor i-ésimo

c) $\sigma(Cj)=\sigma j$ donde Cj: puntos de la superficie del conductor j-ésimo




Nótese que la condición c) equivale implícitamente a especificar el valor de la **derivada del potencial en la dirección normal** al contorno (o superficie) del conductor "j". El razonamiento consiste en relacionar el campo próximo a la superficie del conductor, "Ej", con su densidad de carga, mediante el teorema de Coulomb.

| | | |
|---|---|---|
| $\vec{E}_j = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_0}\vec{u}_n$ | $\vec{E}_j = -\nabla V(C_j)$ | $\nabla V(C_j) = -\frac{\sigma_j}{\varepsilon_0}\vec{u}_n$ |

A su vez, la derivada normal se obtiene proyectando el gradiente sobre la dirección normal.

| | |
|---|---|
| $\vec{u}_n \bullet \nabla V(C_j) = -\frac{\sigma_j}{\varepsilon_0}$ | $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\sigma_j}{\varepsilon_0}$ |

En definitiva, las dos posibles condiciones de contorno consisten en especificar, sobre la superficie de cada conductor alguna de las dos **condiciones excluyentes** siguientes:

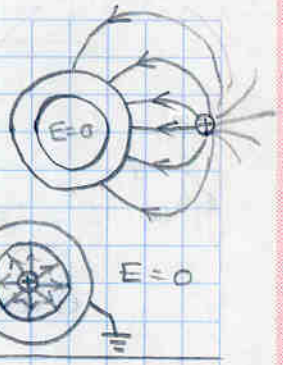
b) El valor del potencial V(Ci)

c-bis) El valor de la derivada normal del potencial en Cj: $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\sigma_j}{\varepsilon_0}$

Para concluir, es evidente que la condición c) también equivale a especificar, como dato, el valor de la carga del conductor "j", puesto que...

c-tris) El valor de la carga del conductor j: $Q_j = \iint_{Sj} \sigma_j dS_j$

## Pantalla eléctrica

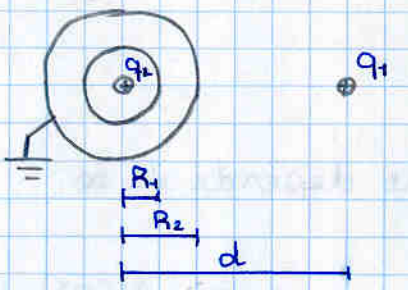



- normalmente, un conductor aislado actua como pantalla eléctrica en una dirección.
- al conectarlo a tierra, actua como pantalla en ambas direcciones

---

ejercicio

- Datos:



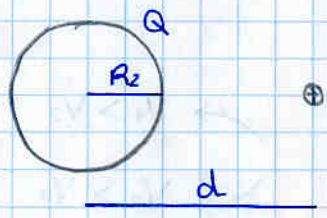

- Se pide
  - Pot en interior del conductor
  - Carga en sup. exterior

- Por estar conectado a tierra, actua como pantalla. Podemos dividir el problema en 2.

a)

$-q_2$ ! por t. elementos correspondientes, influencia total

$$V(r \leq R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{r} - \frac{q_2}{R_1}\right]$$

b) 


calculamos el pot. en el interior IGNORAMOS LA CARGA INT.

$$V_{cond} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R_2} + \frac{q_1}{d}\right] = 0$$

$$Q = -q_1\frac{R_2}{d}$$

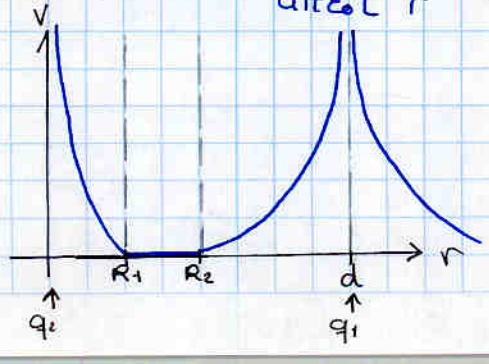
la carga neta en el conductor es:

$$Q_{NETA} = -q_2 - q_1\frac{R_2}{d}$$

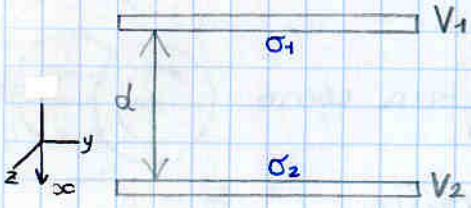
- Potencial en el exterior del conductor?

$$V(d \geq r \geq R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q_1\frac{R_2}{d}}{r} + \frac{q_1}{d-r}\right] = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d-r} - \frac{R_2}{d\cdot r}\right]$$

$$V(r \geq d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q_1\frac{R_2}{d}}{r} + \frac{q_1}{r-d}\right] = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r-d} - \frac{R_2}{d\cdot r}\right]$$



# Sistema de conductores en equilibrio: ejemplo




se pide:
- $V(x, y, z)$
- $E$
- $\sigma_1$, $\sigma_2$

Entre los conductores; $\rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$ ecuación de Laplace

$$\Delta V = 0$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

por simetría, V sólo depende de x.

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A = cte$$

$$V = Ax + B$$

$x = 0 \quad V(0) = V_1 \qquad B = V_1$

$x = d \quad V(d) = V_2$

$$Ad + V_1 = V_2$$
$$A = \frac{V_2 - V_1}{d}$$

$$\boxed{V(x) = \frac{V_2 - V_1}{d} x + V_1}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V}$$

$$= -\frac{dV}{dx}\vec{\imath} = -\frac{V_2 - V_1}{d}\vec{\imath}$$

$$\boxed{\vec{E}(x) = -\frac{V_2 - V_1}{d}\vec{\imath}}$$

→ $V_1 > V_2$

→ $V_2 > V_1$

¿Cómo se obtiene $\sigma_1$ y $\sigma_2$?

por el Teorema de Coulomb

$$\vec{E}(x \to 0) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}(\vec{\imath})$$

$$\vec{E}(x \to d) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}(-\vec{\imath})$$

$\vec{n}$

$$\boxed{\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon_0 (V_2 - V_1)}{d}}$$

$$\boxed{\sigma_2 = -E \cdot \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 (V_2 - V_1)}{d}}$$

# TEMA 9. CONDENSADORES

## • Capacidad de un conductor aislado

El proceso de carga de un conductor no es ilimitado; llega un instante en el que el conductor llega al mismo potencial que la "fuente de carga" y el proceso de carga se detiene.

La capacidad de un conductor es la relación entre la carga almacenada y el potencial que adquiere

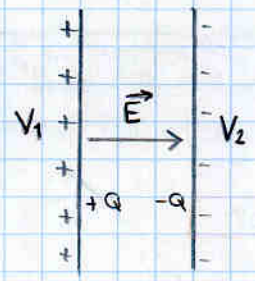
$$C = \frac{Q}{V}$$ unidad S.I.: Faradio

## • Condensador. Capacidad de un condensador

Condensador: Sistema formado por dos conductores con influencia total.
Los dos conductores se denominan armaduras

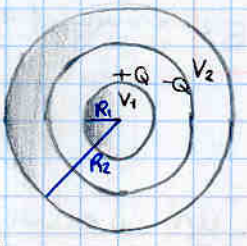
Capacidad del condensador $$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

**plano:**




$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

**esférico:**

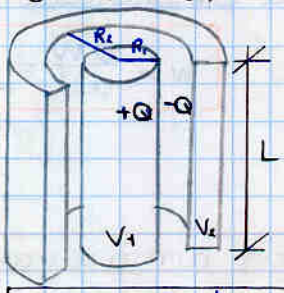



$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

si $R_2 - R_1 = d << R_1$, $R_1 \simeq R_2$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

**cilíndrico:**




$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

si $R_2 - R_1 = d << R_1$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Capacidad de un condensador de forma cualquiera: con separación entre armaduras d cte muy pequeña

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ La capacidad SOLO depende de la geometría del condensador

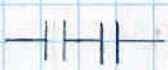
## • Asociación de condensadores

En paralelo:

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

siempre mayor que cada una de ellas

En serie:



$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

siempre menor que cada una de ellas

Condensador aislado:

Q es cte

si $C \uparrow \rightarrow C = \frac{Q}{V_{AB}} \rightarrow V_{AB} \downarrow$ (cambia geometría)

Condensador conectado a fuente de tensión:

$V_{AB}$ es cte

si $C \uparrow \rightarrow C = \frac{Q}{V_{AB}} \rightarrow Q \uparrow$

# ENERGIA

## Energía de un conductor cargado

dW necesario para incrementar en dq la carga de un conductor a potencial V (desplazar dq desde ∞ hasta conductor)

$$dW = dq \cdot V \xrightarrow{V = \frac{q}{C}} dW = \frac{q\,dq}{C}$$

trabajo total para cargar carga Q.

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}V^2C$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}V^2C}$$

## Energía de un condensador cargado

$$\boxed{W = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)Q = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^2 C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

## Localización de la energía electrostática

$$W = \frac{1}{2}CV_{AB}^2 \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ V_{AB} = E \cdot d \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{S\,d}_{\text{volumen entre placas}}$$

Densidad de energía:
energía almacenada por unidad de volumen $\frac{dW}{dV}$

$$\boxed{w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

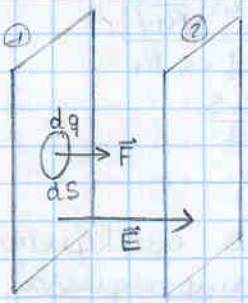
(volumen)

es una f.e.p.

en un punto del espacio no puede haber energía, sólo densidad de energía.
La energía en un dV: $dW = w\,dV$

# FUERZA entre armaduras de un condensador

Las dos armaduras cargadas con signo contrario se atraen




la fuerza sobre dS esta causada por el campo que crean las cargas del condensador menos las de dS

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$dF = dq \cdot E = \sigma\,dS\,E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS$$

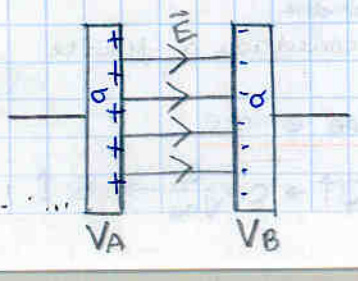
la fuerza total

$$F = \int_S dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\int_S dS = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

$\sigma = \frac{Q}{S}$

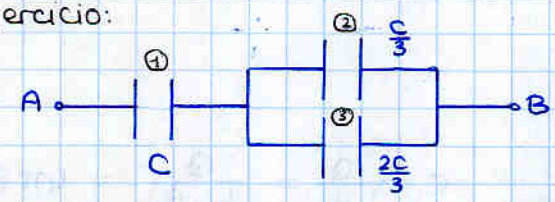
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}\vec{u_n}}$$

# Campo y potencial



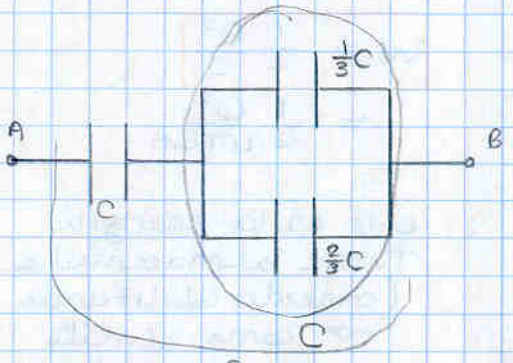

$$\boxed{\begin{array}{c} E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \\ V_A - V_B = \frac{\sigma d}{\varepsilon} \\ C = \frac{\varepsilon S}{d} \end{array}}$$

Ejercicio:




Datos: $V_A$, $V_B$, $C$

Se pide: $Q_1$ $V_1$
$Q_2$ $V_2$
$Q_3$ $V_3$




$C/2$

$Q = C_{eq} V_{AB}$

$= \frac{C}{2} V$

$$\boxed{Q_1 = \frac{CV}{2}}$$

$V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$

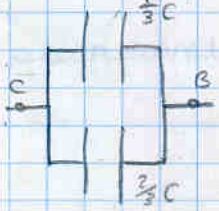
$= \frac{CV}{2} \cdot \frac{2}{C}$

$= \frac{V}{2}$

$$\boxed{V_1 = \frac{V_{AB}}{2}}$$

$V_{AB} - V_1 = \frac{V}{2}$

$$\boxed{V_2 = \frac{V}{2} \quad V_3 = \frac{V}{2}}$$




$Q_2 = C_2 V_1 = \frac{1}{3} C \frac{V}{2} = \frac{CV}{6}$

$$\boxed{Q_2 = \frac{CV}{6}}$$

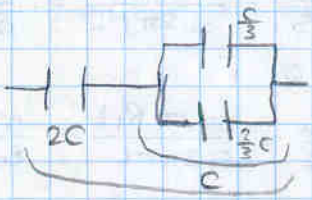
$Q_3 = C_3 V_3 = \frac{2}{3} C \frac{V}{2} = \frac{2CV}{6}$

$$\boxed{Q_3 = \frac{2CV}{6}}$$

Si ahora añadimos: dieléctrico en ① con $\varepsilon_r = 2$

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \rightarrow \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = 2C$

por estar aislado
Q no cambia
$V_{AB} \rightarrow V_{AB}'$




$\frac{1}{2C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{3C}$

$$\boxed{Q = \frac{C V_{AB}}{2} = \frac{2}{3} C V_{AB}'}$$

$\frac{V_{AB}}{2} = \frac{2}{3} V_{AB}'$

$$\boxed{V_{AB}' = \frac{3}{4} V_{AB}}$$

el potencial total baja

$V_1' = \frac{Q_1}{C_1'}$

$= \frac{CV_{AB}}{2} \cdot \frac{1}{2C}$

$= \frac{V_{AB}}{4}$

$V_2' = V_3' = V_{AB}' - V_1'$

$= \frac{3}{4} V_{AB} - \frac{V_{AB}}{4}$

$= \frac{1}{2} V_{AB}$

el $V_2$ y el $V_3$ se quedan con el mismo potencial

Ejercicio:

Energía de una esfera conductora $W_{0 \to 3R}$

① → E → w → $W = \int w \cdot dV$

② → C → W

①

$r < R \quad E = 0$

$r > R \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$w(r>R) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$dV = 4\pi r^2 dr$

$$W = \int_R^{3R} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{3R}\frac{1}{r^2}dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{3R}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right]$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3R}$$

esto es la energía almacenada entre 0 y 3R

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

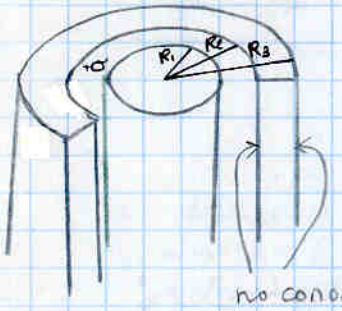
$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

esto es la energía TOTAL almacenada (coincide utilizando $+\infty$ como límite en el ejercicio de la izquierda)

---

Ejercicio:

se pide: $E(r)$ y $\frac{W}{L}$ entre placas (energía p. u. de longitud)




no conocemos los σ. Lo que sí conocemos es la carga, que es igual a la del conductor central $\sigma 2\pi R_1 L$

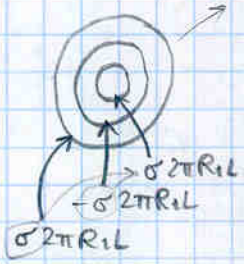
$E(r)$

$0 < r < R_1 \quad E(r) = 0$

$R_1 < r < R_2 \quad E = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma 2\pi R_1 L}{\varepsilon_0 2\pi r L} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$

$R_2 < r < R_3 \quad E(r) = 0$

$R_3 < r \quad E = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma 2\pi R_1 L}{\varepsilon_0 2\pi r L} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$




$R_1 < r < R_2 \quad w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\sigma^2 R_1^2}{\varepsilon_0^2 r^2}$ $\quad dV = \text{capas cilíndricas} = 2\pi r L\, dr$

$$W = \int_{R_1}^{R_2} w\, dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\pi\sigma^2 R_1^2 L}{\varepsilon_0 r} dr = \frac{\pi\sigma^2 R_1^2 L}{\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi\sigma^2 R_1^2 L}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{W}{L} = \frac{\pi\sigma^2 R_1^2}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

# TEMA 10. DIELECTRICOS

- **Características**
  - Incapaz de conducir corriente eléctrica
  - No posee cargas libres
    - ↳ Electrones fuertemente ligados a los átomos

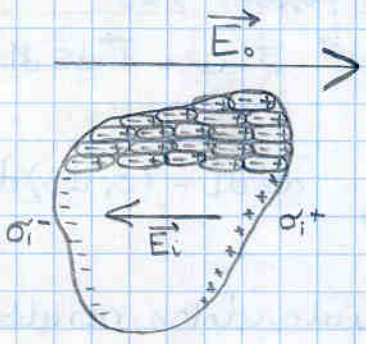
- **Efecto de la aplicación de un campo eléctrico**
  - Polarización electrónica:
    Las moléculas apolares se deforman (se deforma la nube electrónica) y se polariza

    la molécula adquiere un momento dipolar.

  - Polarización por orientación:
    El campo exterior orienta el momento dipolar de las moléculas polares

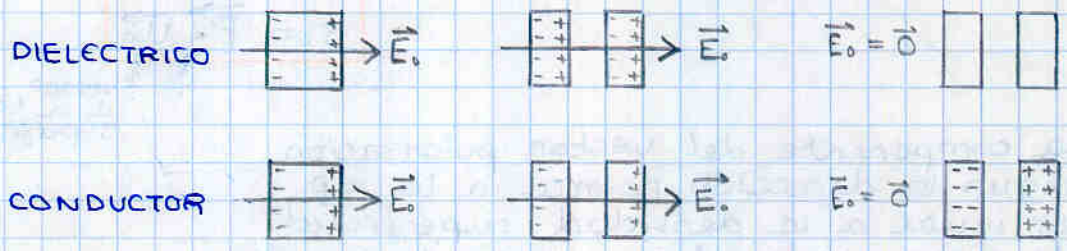
  - Polarización iónica:
    Cristales iónicos (ej Cl, Na). El campo exterior deforma la red cristalina.

- **Efectos macroscópicos**




  - aparecen densidades superficiales
  - Campo eléctrico $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ no nulo
  - Potencial no es constante
  - Densidad volumétrica de carga nula
  - El dieléctrico permanece neutro

- **Diferenciar prácticas entre conductor y dieléctrico**



# Vector polarización

Un dieléctrico se define como un medio continuo, sin cargas libres, en el cual todo elemento de volumen, $dv$, es susceptible de adquirir bajo la acción de un campo eléctrico exterior, un momento dipolar $d\vec{p}$.

El grado de polarización del dieléctrico se cuantifica mediante el vector polarización $\vec{P}$.

Se define como momento dipolar por unidad de volumen.

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

¿Que relación hay entre la polarización $\vec{P}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$?

Depende del tipo de dieléctrico:
En los denominados dieléctricos perfectos dicha relación es lineal

$$\vec{P} = K\vec{E}$$

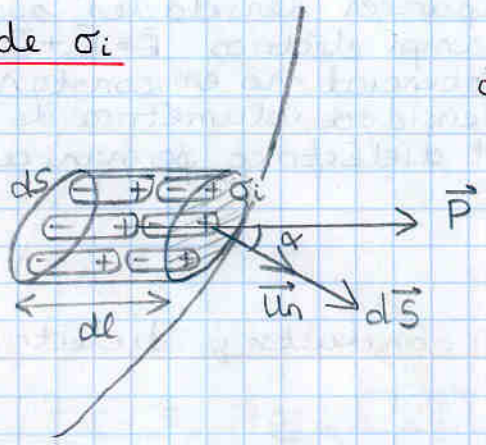
K: de positiva que depende del medio; con dimensiones de $\varepsilon_0$
Por razones de cálculo es conveniente sustituir K por

polarización: unidades $C/m^2$ → $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ ← campo TOTAL. $\vec{E_0} + \vec{E_i}$

↑ permitividad del vacío

← Susceptibilidad eléctrica, constante adimensional característica del medio. En el vacío $\chi = 0$ En dieléctrico perfecto: $\chi > 0$

## Valor de $\sigma_i$




$$d\vec{p} = \begin{cases} \text{def. vector polarización} & \vec{P}\,dv = \vec{P}\,dS\,dl\cos\alpha \\ \text{def. momento dipolar} & dq\,dl = (\sigma_i\,dS)\,dl \end{cases}$$

igualandolas resulta

$$\sigma_i = P\cos\alpha$$

$$\sigma_i = \vec{P}\cdot\vec{u_n}$$

↑ versor ⊥ a la superficie

La componente del vector polarización segun la dirección normal a la sup. es igual a la densidad superficial de carga inducida por la polarización.

## · Desplazamiento Eléctrico

Se define el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ en un punto como:

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

¿Qué relación hay entre desplazamiento $\vec{D}$ y campo eléctrico $\vec{E}$?

En un dieléctrico perfecto $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} (\chi + 1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Se define permitividad del dieléctrico $\varepsilon$, mismas dimensiones que $\varepsilon_0$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\chi + 1)$$

Se define permitividad relativa (sin dimensiones):

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \chi + 1$$

en el vacío $\varepsilon_r = 1$
en dieléctrico $\varepsilon_r > 1$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

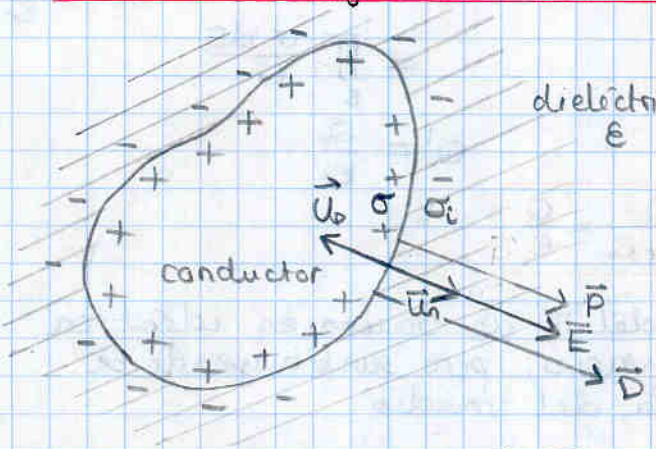
Desplazamiento eléctrico:

- Vector con la misma dirección y sentido que el campo.

  En vacío $D = \varepsilon_0 \vec{E}$

- El campo eléctrico $\vec{E}$ está relacionado con todas las cargas eléctricas. (libres + ligadas)
- El desplazamiento está ligado únicamente con las cargas libres.

### Conductor cargado en un medio dieléctrico infinito




El sistema puede considerarse como una distribución superficial de carga, con densidad

$$\sigma' = \sigma + \sigma_i$$

El valor de $\vec{E}$; según el teorema de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \vec{u}_n = \frac{\sigma + \sigma_i}{\varepsilon_0} \vec{u}_n$$

$$\varepsilon_0 \vec{E} = (\sigma + \sigma_i) \vec{u}_n$$
$$\varepsilon_0 \vec{E} = (\sigma \vec{u}_n) + (\sigma_i \vec{u}_n)$$
$$\varepsilon_0 \vec{E} = \sigma \vec{u}_n - \vec{P}$$

$$\sigma_i = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$
$$\sigma_i = -\vec{P} \cdot \vec{u}_n$$
$$\sigma_i = -P$$
$$\sigma_i \vec{u}_n = -\vec{P}$$

$$\sigma \vec{u}_n = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$
$$= \vec{D} \quad \text{(def. desplaz.)}$$

$$\vec{D} = \sigma \vec{u}_n$$

El desplazamiento eléctrico EN LAS PROXIMIDADES de un conductor cargado es perpendicular a su superficie y su módulo igual a la densidad superficial de carga libre.

a partir de la expresión del T. de Coulomb $\vec{E} = \frac{\sigma + \sigma_i}{\varepsilon_0}\vec{u_n}$ y la def de $\vec{D}$ $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

igualándolas $\vec{D} = \sigma \vec{u_n}$

$$\frac{\sigma + \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\frac{\varepsilon_r(\sigma + \sigma_i)}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_r(\sigma + \sigma_i) = \sigma$$

$$\sigma + \sigma_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$

$$\boxed{\sigma_i = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

como $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) < 1$

$\sigma_i$ tiene signo contrario a $\sigma$

$\sigma_i$ es menor que $\sigma$

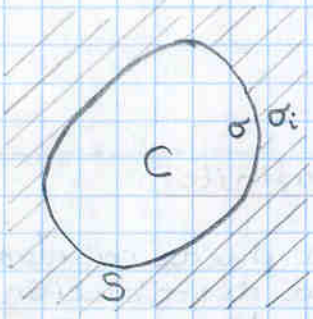
Relación entre cada tipo de carga y los 3 vectores eléctricos

Desplazamiento $\vec{D}$: relacionado con cargas libres en sup de cond $\vec{D} = \sigma \vec{u_n}$

Polarización $\vec{P}$: relacionado con cargas ligadas en sup de dielec $\vec{P} = \sigma_i \vec{u_n}$

Campo Eléctrico $\vec{E}$: relacionado con todas las cargas en sup de sup cargada $\varepsilon_0 \vec{E} = (\sigma + \sigma_i)\vec{u_n}$

## Teorema de Gauss para dieléctricos




$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \leftarrow \text{total}$$

$$Q' = Q + Q_i$$

$$= \iint_S (\sigma + \sigma_i)\, dS$$

$$\sigma + \sigma_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$

$$= \iint_S \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_r}$$

$$Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}$$

$$\boxed{\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon}} \leftarrow \text{libre}$$

la expresión que se obtiene del T. de Gauss es idéntica a la que se obtuvo en el vacio, pero sustituyendo la permitividad del vacio por la del medio

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad \iint_S \varepsilon \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q$$

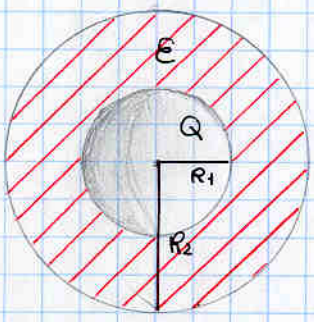
$$\boxed{\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}}$$

en forma diferencial $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$

el flujo del desplazamiento a traves de una sup cerrada es igual a la carga libre encerrada

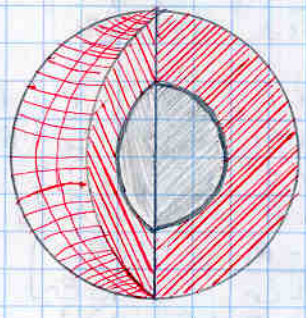
Ejercicio:

Datos




Se pide:

a) · D(r), E(r), P(r)
b) · cargas $\sigma_i$ en el dieléctrico
c) · V del conductor
d) · E(r) y V(r) cuando $R_2 \to \infty$



a) · Desplazamiento Eléctrico D(r)

Aplicando T. de Gauss
$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$
a esferas de radio r

$D(r < R_1) = 0$

$D(r > R_1) = \frac{Q}{4\pi r^2}$

D no cambia al pasar del dieléctrico al vacío.

· Campo eléctrico E(r) $\quad \boxed{E = \frac{D}{\varepsilon}}$

$E(r < R_1) = 0$

$E(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}$

$E(R_2 < r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

aparecen dos discontinuidades, una en la frontera metal dieléctrico y otra en la frontera dieléctrico-vacío

· Polarización $\quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E$

$\boxed{P = (\varepsilon - \varepsilon_0) E}$

$P(R_1 < r < R_2) = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} = \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right] \frac{Q}{4\pi r^2}$

b) Cargas $\sigma_i$ en el dieléctrico $\quad \boxed{\sigma_i = \vec{P} \cdot \vec{u_n}}$

$\sigma_i(R_1) = \vec{P} \cdot \vec{u_n} = -P(R_1) = -\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right] \frac{Q}{4\pi R_1^2}$

$\sigma_i(R_2) = \vec{P} \cdot \vec{u_n} = P(R_2) = \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right] \frac{Q}{4\pi R_2^2}$

Carga total del dieléctrico

$Q_i = \sigma_i(R_1) \cdot 4\pi R_1^2 + \sigma_i(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 = 0$

c) Potencial del conductor

$$V = \int_0^\infty E\,dr$$

$$= 0 + \int_{R_1}^{R_2} E(R_1<r<R_2)\,dr + \int_{R_2}^{\infty} E(r>R_2)\,dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2 \varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_r R_1}{R_1 R_2 \varepsilon_r}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 + R_1(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r R_1 R_2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{R_2 + R_1\chi}{R_1 R_2}\right]$$

d) si $R_2 \to \infty$ el dieléctrico ocupa todo el espacio

la expresión de $D(r)$ no se ve afectada

$$E(r<R_1) = 0$$

$$E(r>R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q}{r^2}$$

el potencial electrostático

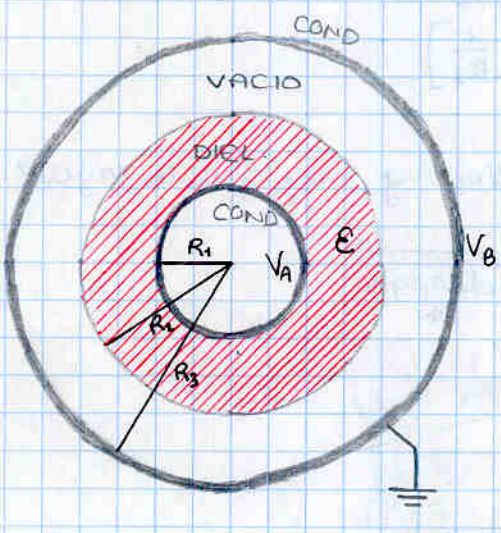
$$V = \int_r^\infty E\,dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q}{r}$$

expresiones IGUALES a las correspondientes en el vacío.

Ejercicio:

Datos:




Se pide:

$D(r)$, $E(r)$, $P(r)$
$\sigma_i$ en el dieléctrico

Desplazamiento Eléctrico:

Por T. Gauss generalizado para esferas de radio r.

$$D(r<R_1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} D(R_2>r>R_1) &= \frac{Q}{4\pi r^2} \\ D(R_3>r>R_2) &= \frac{Q}{4\pi r^2} \end{aligned}\right\}$$ no cambia del dieléctrico al vacío

$$D(r>R_3) = 0$$

Campo eléctrico: $E = \frac{D}{\varepsilon}$

$$E(r<R_1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} E(R_2>r>R_1) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \\ E(R_3>r>R_2) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}\right\}$$ sí cambia del dieléctrico al vacío

$$E(r>R_3) = 0$$

aunque no nos dieran Q, nos dieran $V_{AB}$, Trabajamos con Q y luego ya se despeja en el potencial

Vector Polarización $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$= \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

$= (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$

$$P(R_2>r>R_1) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]$$

$\sigma_i$ en el dieléctrico:

$$\sigma_i(R_1) = \vec{P}\cdot\vec{u_n} = -P(R_1) = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]$$

$$\sigma_i(R_2) = \vec{P}\cdot\vec{u_n} = P(R_2) = \frac{Q}{4\pi R_2^2}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]$$

la carga total del dieléctrico es nula

$$Q_i = \sigma_i(R_1)\cdot 4\pi R_1^2 + \sigma_i(R_2)\cdot 4\pi R_2^2 = 0$$

El potencial:

$$V_{R_1} - V_{R_2} = -\int_{R_2}^{R_1} E\,dr = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi}\underbrace{\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]}_{>0}$$

$$V_{R_2} - V_{R_3} = -\int_{R_3}^{R_2} E\,dr = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right]$$

Si el dato que nos dan es $V_{R_1} - V_{R_3}$ y hay que averiguar Q:

$$V_{R_1} - V_{R_3} = (V_{R_1} - V_{R_2}) + (V_{R_2} - V_{R_3}) \xrightarrow[Q]{\text{despejar}}$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right]$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right]$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) + \left(\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3}\right)\right]$$

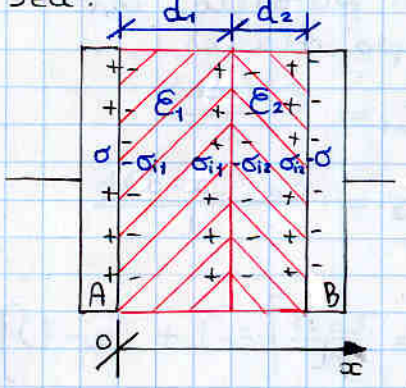
$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_3(R_2 - R_1) + \varepsilon_r R_1(R_3 - R_2)}{\varepsilon_r R_1 R_2 R_3}\right]$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_3 R_2 - R_3 R_1 + \varepsilon_r R_1 R_3 - \varepsilon_r R_1 R_2}{\varepsilon_r R_1 R_2 R_3}\right]$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{R_1 R_3(\varepsilon_r - 1) + R_2(R_3 - \varepsilon_r R_1)}{R_1 R_2 R_3}\right]$$

## Condensador plano con varias capas de dieléctrico

Sea:

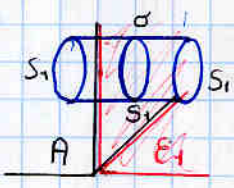



### Capacidad del cond.

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\sigma S}{\sigma\left[\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right]}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r_1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r_2}}}}$$

### Desplazamiento eléctrico:




por T. Gauss generalizado:

$$\iint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sigma S_1$$

$$D \cdot S_1 = \sigma S_1$$

$$\boxed{D(x) = \sigma}$$

→ Dirección y sentido OX
→ Módulo de e igual a σ

### Campo eléctrico

$$\boxed{E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma + \sigma_i}{\varepsilon_0}}$$

### Vector Polarización:

$$P_1 = \varepsilon_0 \chi_1 E_1 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_{r_1} - 1)\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{(\varepsilon_{r_1} - 1)}{\varepsilon_{r_1}}\sigma$$

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E_2$$

$$\boxed{P_1 = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}}\right)\sigma} \qquad P_2 = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r_2}}\right)\sigma$$

### Diferencia de Potencial

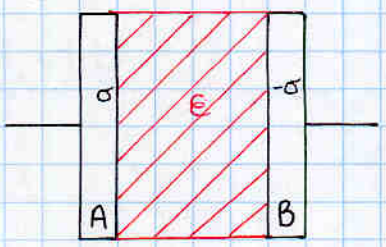
$$V_A - V_B = \int_A^B E\,dr = \int_A^{d_1} E_1\,dr + \int_{d_1}^B E_2\,dr$$

$$= \int_A^{d_1} \frac{\sigma}{\varepsilon_1}\,dr + \int \frac{\sigma}{\varepsilon_2}\,dr$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2$$

$$\boxed{V_A - V_B = \sigma\left[\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right]}$$

## Condensador con única capa de dieléctrico




$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

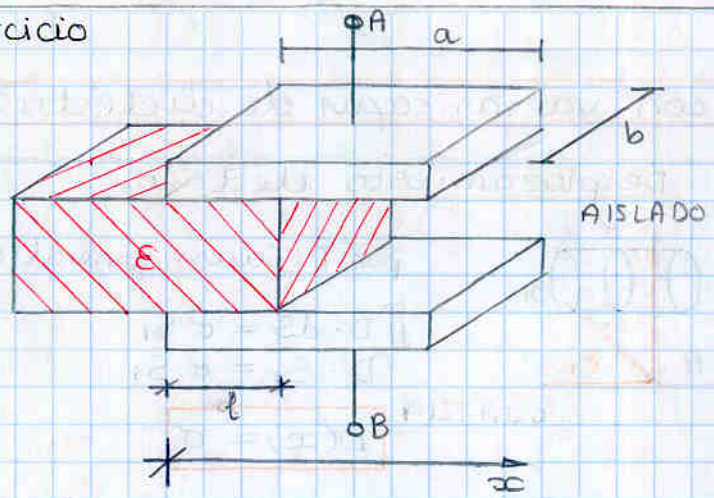
$$\boxed{V_A - V_B = \frac{\sigma d}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d}}$$

expresiones idénticas a las del vacío pero sustituyendo la permitividad del vacío por la del dieléctrico

Nótese que la capacidad del condensador aumenta $\varepsilon_r$ veces al introducir dieléctrico. Sin embargo el campo y el pot se dividen por $\varepsilon_r$

ejercicio




Se pueden considerar como dos condensadores en paralelo, con capacidades:

$$C_1 = \frac{\varepsilon\,(\ell \cdot b)}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\,((a-\ell)b}{d}$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left[\varepsilon_r \ell + (a-\ell)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \cdot b}{d}\left[a + \ell(\varepsilon_r - 1)\right]$$

¿Que ocurre conforme incrementa $\ell$?

$C_{eq}$ va aumentando

como esta aislado
Q cte (se va repartiendo)

$$W_{ALMACENADA} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$\ell \nearrow \Rightarrow C \nearrow \Rightarrow W \searrow$

si estuviera conectado a fuente de potencial
$V_{AB}$ cte

$$W = \frac{1}{2} C V_{AB}^2$$

$\ell \nearrow \Rightarrow C \nearrow \Rightarrow W \nearrow$

La energía almacenada va disminuyendo, es decir, el sistema es mas estable cuanto mas se introduzca el dieléctrico.

$\Rightarrow$ aparece una fuerza que tiende a introducir el dieléctrico

$$F = \frac{dW}{d\ell}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 b}{d}\left[a + \ell(\varepsilon_r - 1)\right]}$$

$$= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b a + 2\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1)\ell}$$

$$\frac{a}{b + c\ell}$$

$$\frac{d}{b} + \frac{d}{c\ell}$$

$$cd\ell + bd = a$$

$$d(d+b) = a$$

$$d = \frac{a}{d+b}$$

Lección 11

# CORRIENTE CONTÍNUA

1. CORRIENTE ELÉCTRICA
2. DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE
3. LEY DE OHM. RESISTENCIA
4. LEY DE JOULE

## CORRIENTE ELÉCTRICA

- *Desplazamiento de cargas eléctricas (electrones, iones, etc.) en cualquier medio (conductor metálico, disoluciones, etc.) .*
- *Por convenio: Se admite que el SENTIDO DE LA CORRIENTE coincide con el desplazamiento de cargas positivas, es decir en el sentido de potenciales decrecientes.*

*CORRIENTES TRANSITORIAS:*

*Sean dos conductores A y B cargados y aislados posteriormente, con potenciales distintos $V_1$ y $V_2$ ($V_1>V_2$). Si los unimos mediante un hilo conductor, los convertimos en un conductor único, que tiende a un estado de equilibrio caracterizado por la igualdad de potenciales. Esta igualdad de potenciales, solo es posible mediante la transferencia de carga de un conductor al otro. La corriente cesa cuando se igualan los potenciales.*

*CORRIENTES PERMANENTES:*

- *Existen aparatos capaces de mantener una diferencia de potencial permanente entre los conductores 1 y 2, denominados GENERADORES.*
- *Este desequilibrio permanente entre 1 y 2, implica un movimiento permanente de cargas a través del hilo, es decir una Corriente Continua. Se dice que tenemos un REGIMEN PERMANENTE.*
- *Se requiere para mantener la corriente de un CIRCUITO CERRADO de conductores.*

## INTENSIDAD Y DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

➢ *Velocidad de arrastre*

*Velocidad media de las cargas positivas*

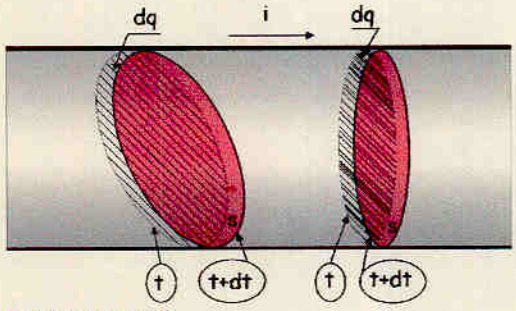
$$\vec{v}_a = \mu \vec{E} \qquad \mu: \text{movilidad}$$

*Es función del punto pero no del tiempo. Las líneas del campo de velocidades coincide con la trayectoria de las cargas positivas.*

➢ *Intensidad de corriente:*

*Cantidad de carga que atraviesa, en la unidad de tiempo, una sección transversal cualquiera del conductor.*

$$i = \frac{dq}{dt}$$



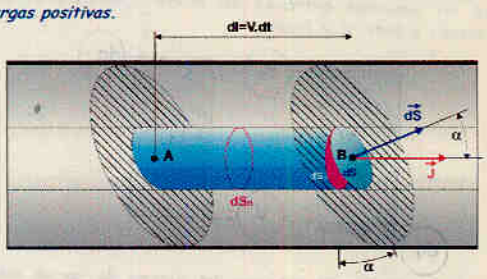

- *Unidad de medida,*

  *1 Amperio = 1 $Cs^{-1}$*

*Cuantifica el flujo total de carga a través de la sección pero no da información sobre la distribución puntual de ese flujo.*

➢ *Vector Densidad de corriente:*

*Cargas que por unidad de tiempo atraviesan la unidad de superficie normal a la dirección del movimiento de las cargas. Su dirección y sentido viene dado por el movimiento de las cargas positivas.*




➢ *Relación entre intensidad y densidad de corriente,*

$$di = J dS_\perp = J dS \cos\alpha = \vec{J} \bullet d\vec{S} \Rightarrow i = \iint_S \vec{J} \bullet d\vec{S}$$

Es decir la intensidad de corriente es el flujo del vector densidad de corriente a través de la superficie transversal de conductor elegida.

$$\nabla . \vec{J} = ?$$

➢ *Relación entre la densidad de corriente y la velocidad de arrastre,*

Las cargas que atraviesan dS en un tiempo dt son,

$$dq = nqdS_\perp vdt = di\,dt = JdS_\perp dt \Rightarrow J = nqv \Rightarrow \vec{J} = nq\vec{v}$$

*n: nº de electrones (portadores) por unidad de volumen*

*q: carga de cada portador*

## LEY DE OHM.

Es una propiedad de ciertos conductores (Ohmicos o lineales)

➢ Forma local

El movimiento de las cargas es directamente proporcional al campo existente en el interior del conductor.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

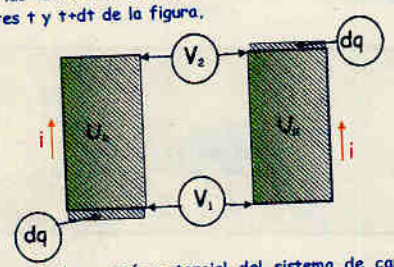
donde,
$\sigma$ es la conductividad del material, que es función de la temperatura.
La inversa de la conductividad se denomina resistividad $\rho$.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

| | $\rho$ ($\Omega$.m) |
|---|---|
| Plata | $1'5.10^{-8}$ |
| Cobre | $1'6.10^{-8}$ |
| Hierro | $8'53.10^{-8}$ |

## EFECTO JOULE

Dado un conductor sometido a una diferencia de potencia $V_1$-$V_2$ entre las secciones extremas del mismo. Consideremos los instantes t y t+dt de la figura.




Comparando la energía potencial del sistema de cargas entre dichos instantes, podemos calcular la disminución de energía del sistema,

$$dW = dq(V_1 - V_2) = idt(V_1 - V_2) = Ri^2dt$$

$R = \frac{V_1 - V_2}{i}$

es decir la potencia perdida será,

$$P = \frac{dW}{dt} = Ri^2$$

Dicha energía se transforma en calor disipado por el conductor.

➢ En forma diferencial,
La potencia perdida en forma de calor, por unidad de volumen de conductor es,

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{J} \bullet \vec{E} = \sigma E^2$$

➢ Definición de resistencia

El cociente entre la d.d.p. y la intensidad es un invariante para un conductor dado. Se introduce el concepto de resistencia de un conductor,

$$R = \frac{V_1 - V_2}{i}$$

La resistencia sólo depende de la geometría y de la naturaleza del conductor

➢ La intensidad de corriente es directamente proporcional a la diferencia de potencial e inversamente proporcional a la resistencia del conductor.

Cálculo de R de un conductor cilíndrico homogéneo

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Asociación de resistencias en serie y paralelo

Serie

$$R = \sum R_i$$

Paralelo

$$R = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}}$$

Lección 12

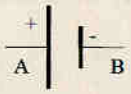
# CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTÍNUA


1. GENERADORES. FUERZA ELECTROMOTRIZ (FEM)
2. RECEPTORES. FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ (FCEM)
3. APARATOS POLARIZADOS Y NO POLARIZADOS
4. DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS DE UN CIRCUITO
5. ECUACIÓN DEL CIRCUITO
6. ASOCIACIÓN DE GENERADORES
7. CAMPO ELECTROMOTOR


## GENERADORES. FUERZA ELECTROMOTRIZ (FEM)

- *Dispositivos que transforman cualquier energía en energía eléctrica*

Circuito → Elementos pasivos (consumen energía)
Circuito → Generadores (dan energía al circuito)




- *Fuerza electromotriz (fem): "Cantidad de energía eléctrica que desarrolla el generador por unidad de carga que pasa entre sus bornes"*

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

*Se mide en voltios*

- *La potencia desarrollada por el generador es*

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon i$$

- *La potencia suministrada por el generador al resto del circuito es*

$$P_S = (V_A - V_B) i$$

*$V_A$-$V_B$ es la diferencia de potencial en bornes del generador*

*Generador ideal*

*La potencia suministrada coincide con la desarrollada, no hay pérdidas en el propio generador*

*Generador real*

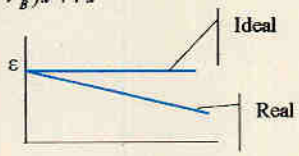
*La potencia suministrada es menor que la desarrollada, hay pérdidas en el propio generador. Suponemos una resistencia interna en el propio generador que justifica las pérdidas en forma de calor*

$$P = P_S + r i^2$$

*Curva característica tensión-intensidad*

$$\varepsilon i = (V_A - V_B) i + r i^2$$

$$V_A - V_B = \varepsilon - r i$$




*Rendimiento*

$$\eta = \frac{P_S}{P} = \frac{V_A - V_B}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - r i}{\varepsilon} = 1 - \frac{i r}{\varepsilon}$$

## RECEPTORES. FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ (FCEM)

- *Dispositivos que transforman energía eléctrica en cualquier forma de energía distinta a la calorífica*

- *Fuerza contraelectromotriz (fcem): "Cantidad de energía eléctrica que es transformada en otro tipo de energía distinta de la calorífica por unidad de carga que pasa entre sus bornes"*

$$\varepsilon' = \frac{dW'}{dq}$$

*Se mide en voltios*

- *La potencia transformada en el receptor es*

$$P' = \frac{dW'}{dt} = \varepsilon' i$$

- *La potencia consumida en el receptor es*

$$P_C = (V_A - V_B) i$$

*$V_A$-$V_B$ es la diferencia de potencial en bornes del receptor*

*Receptor ideal*

*La potencia consumida coincide con la transformada, no hay pérdidas en el propio receptor*

*Receptor real*

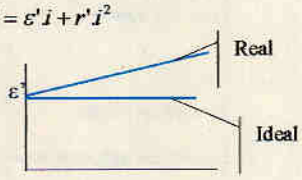
*La potencia consumida es mayor que la transformada, hay pérdidas en el propio receptor. Suponemos una resistencia interna en el propio receptor que justifica las pérdidas en forma de calor*

$$P_C = P_T + r' i^2$$

*Curva característica tensión-intensidad*

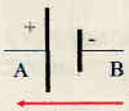
$$(V_A - V_B) i = \varepsilon' i + r' i^2$$

$$V_A - V_B = \varepsilon' + r' i$$



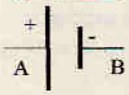

## APARATOS POLARIZADOS Y NO POLARIZADOS

*Polarizados: Aquellos que mantienen la polaridad independientemente del sentido de la corriente (pilas recargables, acumuladores, etc.)*




*Actúa como GENERADOR*

*Intensidad*




*Actúa como RECEPTOR*

*Intensidad*

*No polarizados: Aquellos en los que su polaridad depende del sentido de la corriente (motores, etc.)*

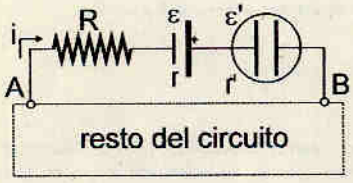
*Actúa como RECEPTOR*

*Intensidad*

*Actúa como RECEPTOR*

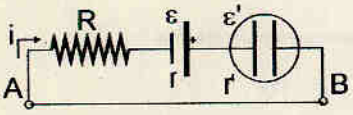
*Intensidad*

## DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS DE UN CIRCUITO




$$V_A - V_B = \sum R_i . i - \sum \varepsilon$$

## ECUACIÓN DEL CIRCUITO




$$i = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R}$$

## ASOCIACIÓN DE GENERADORES

*Los generadores que se asocian son idénticos, misma fem y resistencia interna.*

- *Asociación en serie: Se emplean para aumentar la intensidad de corriente en circuitos de gran resistencia exterior*

$$\varepsilon_{eq} = n\varepsilon$$
$$r_{eq} = nr$$

- *Asociación en paralelo: Se emplean para aumentar la intensidad de corriente en circuitos de pequeña resistencia exterior*

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon$$
$$r_{eq} = r / n$$

## CAMPO ELECTROMOTOR

EN ELECTROSTÁTICA $\vec{rotE} = 0 \quad \Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$

AHORA:

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = \int \rho \vec{J}.d\vec{l} = i\int \frac{\rho dl}{S} = i(R+r) = \varepsilon \neq 0$$

- EN EL GENERADOR HAY UN CAMPO ELECTROSTÁTICO DIRIGIDO DE POLO POSITIVO A POLO NEGATIVO, PERO HAY OTRO CAMPO, DENOMINADO ELECTROMOTOR, QUE NO DERIVA DE POTENCIAL Y QUE VA DIRIGIDO EN EL SENTIDO DE LOS POTENCIALES CRECIENTES
- LA NATURALEZA DEL CAMPO ELECTROMOTOR DEPENDE DEL TIPO DE GENERADOR
- E,LA FEM DEL GENERADOR, ES LA CIRCULACIÓN DEL CAMPO ELECTROMOTOR A LO LARGO DEL GENERADOR. LA CIRCULACIÓN DEL CAMPO ELECTROSTÁTICO PARA TODO EL CIRCUITO ES NULO.

LECCIÓN.- CORRIENTE ALTERNA

1. Introducción
2. Corriente Alterna Sinusoidal.
3. Respuesta de los dipolos básicos. Impedancia.
4. Potencia en corriente Alterna.

## 1. INTRODUCCIÓN.-

Hasta ahora hemos estudiado la corriente continua, donde, la intensidad I, la densidad de corriente J, la diferencia de potencial V, el campo eléctrico E, la densidad de carga $\rho$ , y otras magnitudes asociadas a la corriente son independientes del tiempo.

En esta Lección nos ocuparemos de las corrientes variables, centrándonos en el estudio de la corriente alterna.

El análisis riguroso de un régimen variable debe efectuarse a partir de las ecuaciones de Maxwell, como se verá en Física II.

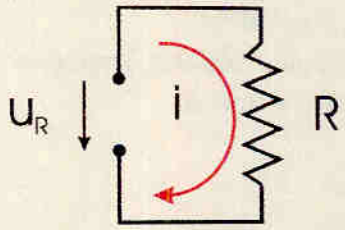
En los modelos que vamos a estudiar se admiten las siguientes hipótesis simplificativas:

a) Régimen cuasi-estacionario: Admitiremos que, aunque el régimen sea variable (en corriente alterna i=i(t)) la variación es lo suficientemente lenta para que se pueda admitir que los campos eléctricos y las otras magnitudes asociadas tienen, en cada instante, los mismos valores que los correspondientes a una corriente continua de la misma intensidad. Esta suposición es admisible a bajas frecuencias ( por ejemplo la corriente alterna industrial tiene una frecuencia de 50 Hz). No es admisible en frecuencias elevadas (microondas, por ejemplo).

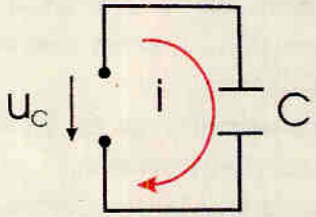
b) Se suponen elementos concentrados, es decir, en los circuitos las características resistencia R, Condensador C y autoinducción L, están asociadas, únicamente a los dipolos básicos estudiados hasta ahora (el dipolo autoinducción se estudiara en Física II).

Las ecuaciones características de los dipolos básicos son:

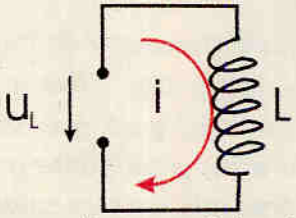
RESISTENCIA: $u_R(t) = i(t) \cdot R$




CONDENSADOR: $u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow i(t) = C\frac{du_C}{dt}$




BOBINA (autoinducción): $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$, donde L es el coeficiente de autoinducción.




Donde u es la diferencia de potencial en bornes del dipolo básico.

Se desprecia la resistencia, autoinducción y capacidad de los cables que unen los dipolos básicos.

## 2 CORRIENTE ALTERNA SINUSOIDAL. CARACTERÍSTICAS.-

Se denomina corriente alterna sinusoidal a aquella cuya intensidad de corriente viene dada mediante la expresión:

$$i(t) = I_m \cos(wt + \varphi_i)$$

donde,

i(t), es el valor instantáneo de la corriente en A.

$I_m$, es el valor máximo de la intensidad en A.

$wt+\varphi_i$, es la fase en rad.

$\varphi_i$, es la fase inicial en rad.

w, es la pulsación en rad/s.

Del mismo modo, una diferencia de potencial alterna es de la forma,

$$u(t) = U_m \cos(wt + \varphi_u)$$

CARACTERÍSTICAS:

La corriente alterna se caracteriza por los siguientes parámetros:

a) Pulsación, frecuencia o periodo.

b) Valor máximo $I_m$. En aplicaciones técnicas se utiliza más el valor eficaz I,

$I = \left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$, es decir la raiz cuadrada del valor medio, durante un periodo, del cuadrado del valor instantáneo.

Calculemos I,

$$I = \left[\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(wt + \varphi_i)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2}{2}(1 + \cos(2wt + 2\varphi_i))dt\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2}{2} dt\right]^{\frac{1}{2}}, \text{ ya que } \int_0^T \cos 2(wt + \varphi)dt = 0$$

luego, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ y de forma análoga, $u = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Obsérvese que I es el valor que debería tener una corriente continua para consumir en una resistencia R, por efecto Joule, la misma energía que la corriente alterna (durante un periodo). En efecto,

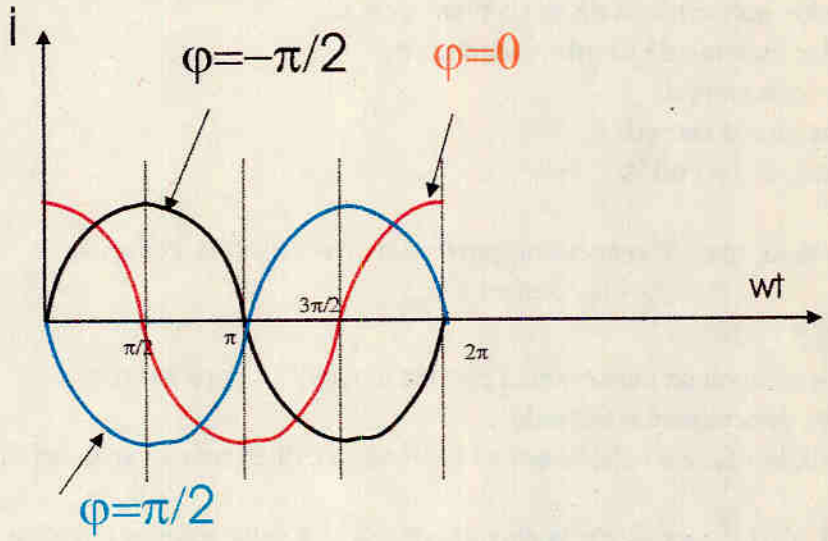
$$W = \int_0^T i^2 R dt = R\int_0^T i^2 dt = RI^2T$$

c) Fase inicial.

Según el origen de tiempos

$i = I_m \cos(wt + \varphi_i)$

Se utiliza con más frecuencia el desfase tensión-intensidad, $\varphi_u - \varphi_i$



## 3 RESPUESTA DE LOS DIPOLOS BÁSICOS A LA CORRIENTES ALTERNAS SINUSOIDALES.-

Antes de estudiar el caso general, circuito con R,L y C, estudiemos cada caso por separado,

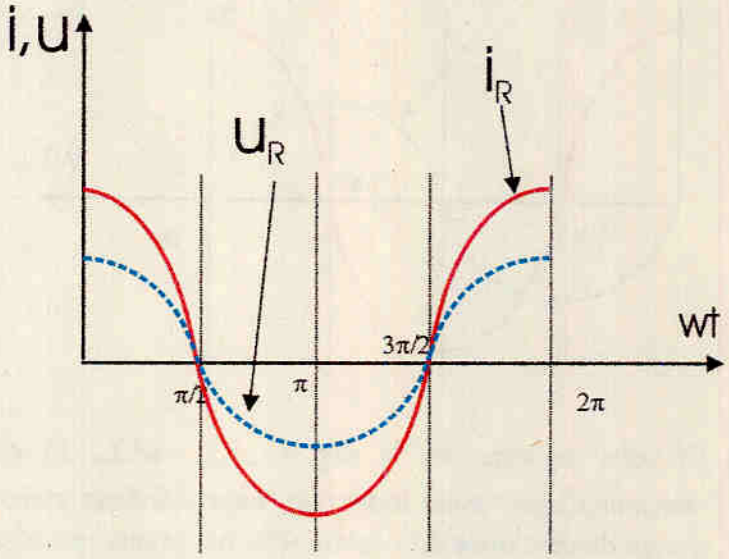
### A) RESISTENCIA.

Siendo la intensidad, $i = I_m \cos wt$ (suponiendo $\varphi_i = 0$), la diferencia de potencial en bornes del dipolo resistencia será,

$$u_R = Ri = RI_m \cos wt = U_m \cos(wt + \varphi_u)$$

Por lo tanto si la intensidad de corriente es alterna sinusoidal,

a. $u_R$ es alterna sinusoidal de la misma pulsación.
b. La intensidad i y la diferencia de potencial u están en fase, ya que $\varphi_u - \varphi_i = 0$
c. El valor máximo de la ddp es, $U_m = RI_m$



B) AUTOINDUCCIÓN.

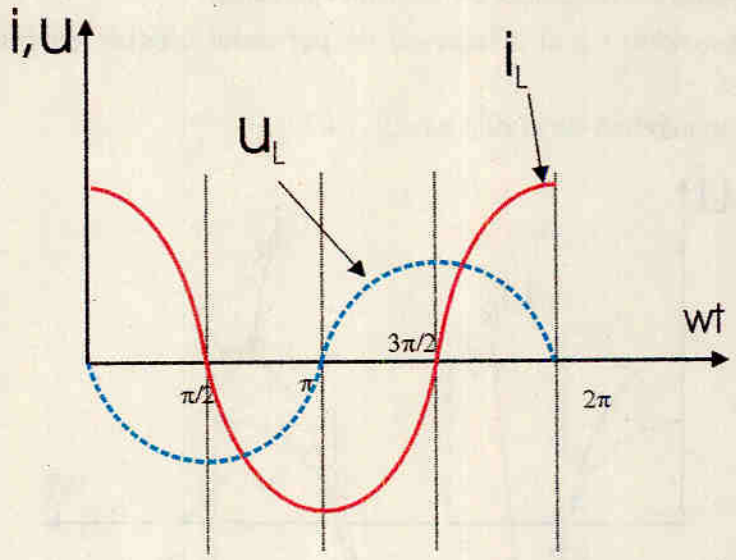
Siendo la intensidad, $i = I_m \cos wt$ (suponiendo $\varphi_i = 0$), la diferencia de potencial en bornes del dipolo autoinducción será,

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -LwI_m \operatorname{sen} wt = LwI_m \cos(wt + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(wt + \varphi_u)$$

Por lo tanto si la intensidad de corriente es alterna sinusoidal,

a) $u_L(t)$ es alterna sinusoidal de la misma pulsación.

b) La diferencia de potencial u está adelantada en $\frac{\pi}{2}$ a la intensidad, ya que $\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$




c) El valor máximo de la ddp es, $U_m = wLI_m$ El coeficiente wL se denomina reactancia inductiva, expresándose como $X_L$, pero aunque tenga dimensiones de resistencia, no es una resistencia ( no produce efecto Joule, depende de w y desfasa la intensidad con respecto a la diferencia de potencial).

C) CONDENSADOR.

Siendo la intensidad, $i = I_m \cos wt$ (suponiendo $\varphi_i = 0$), la diferencia de potencial en bornes del dipolo autoinducción será,

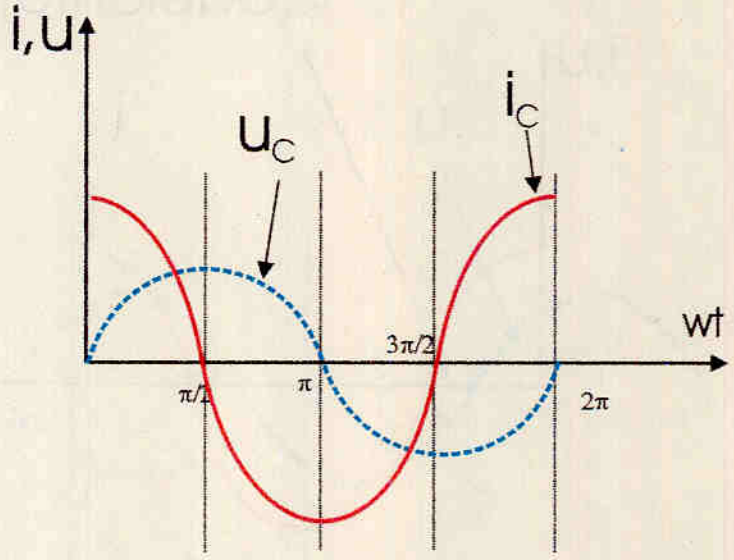
$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i dt}{C} = \frac{1}{wC} I_m \operatorname{sen} wt = \frac{1}{wC} I_m \cos(wt - \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(wt + \varphi_u)$$

Por lo tanto si la intensidad de corriente es alterna sinusoidal,

a) $u_L(t)$ es alterna sinusoidal de la misma pulsación.

b) La diferencia de potencial u está retrasada en $\frac{\pi}{2}$ a la intensidad, ya que $\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

d) El valor máximo de la ddp es, $U_m = \frac{1}{wC} I_m$ El coeficiente $\frac{1}{wC}$ se denomina reactancia capacitiva, expresándose como $X_C$, pero aunque tenga dimensiones de resitencia, no es una resistencia ( no produce efecto Joule, depende de w y desfasa la intensidad con respecto a la diferencia de potencial).



D) *CASO GENERAL.*

Siendo la intensidad, $i = I_m \cos wt$ (suponiendo $\varphi_i = 0$), la diferencia de potencial en bornes del circuito R,L C será,

$$u = u_R + u_L + u_C = RI_m \cos wt + wLI_m \cos(wt + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{wC} I_m \cos(wt - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= U_m \cos(wt + \varphi_u)$$

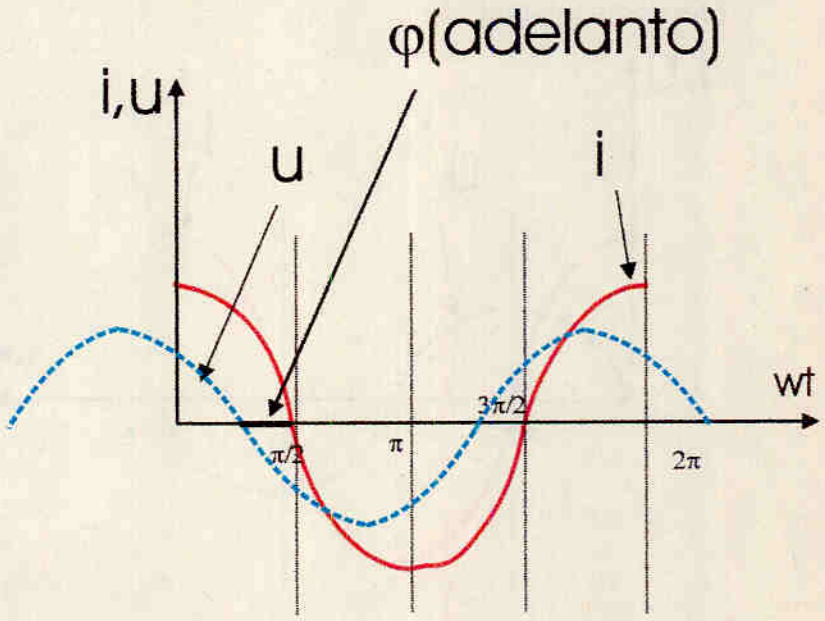
desarrollando e igualando términos en senwt y términos en coswt,

$$U_m \cos \varphi_u = RI_m$$

$$U_m \operatorname{sen} \varphi_u = I_m \left[ wL - \frac{1}{wC} \right]$$

$$U_m = I_m \left[ R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$tg\varphi_u = \frac{\left[ wL - \frac{1}{wC} \right]}{R}$$




Por lo tanto si la intensidad de corriente es alterna sinusoidal,

a) $u_L(t)$ es alterna sinusoidal de la misma pulsación.

b) La diferencia de potencial u está desfasada un ángulo $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, cuyo valor es,

$$tg\varphi = \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Si $wL > \frac{1}{wC} \Rightarrow \varphi > 0$

Si $wL < \frac{1}{wC} \Rightarrow \varphi < 0$

Si $wL = \frac{1}{wC} \Rightarrow \varphi = 0$

El ángulo $\varphi$ depende de R, L y C y de la pulsación (frecuencia).

c) El valor máximo de la ddp es, $U_m = I_m Z$ , donde,

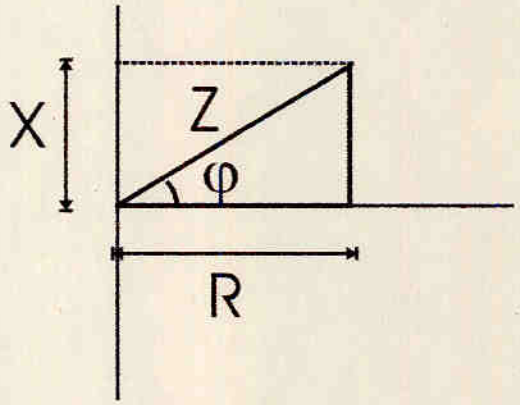
$$Z = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

denominada impedancia, siendo R la resistencia y X la reactancia.

Z tiene las mismas dimensiones que la resistencia, pero no es una resistencia, depende de w y provoca un desfase entre la diferencia de potencial y la intensidad.

Si representamos gráficamente la resistencia en el eje OX y la reactancia en el eje OY, podemos construir el denominado triangulo de impedancia, del cual se deduce,

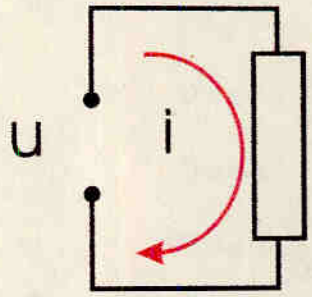
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$
$$tg\varphi = \frac{X}{R} \quad \text{con } X = X_L - X_C .$$



## 4 POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA.

### A) Potencia media e instantánea.

Sea un dipolo recorrido por una intensidad i alterna senoidal y con una tensión en bornes $u_{AB}$ alterna senoidal.




Se define como potencia instantánea a,

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

donde $u_{AB}$ tiene el sentido de la corriente o contrario, según que sea positiva o negativa., por lo tanto, la potencia instantánea puede se positiva o negativa. Si $p(t)>0$ el dipolo consume energía, y si $p(t)<0$ el dipolo suministra energía.

Se define Potencia media al valor medio de la potencia instantánea en un periodo,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

Si $P>0$ el dipolo consume energía y si $P<0$ el dipolo se comporta como un generador.

**A.1) Resistencia.**

La potencia instantánea en este caso será,

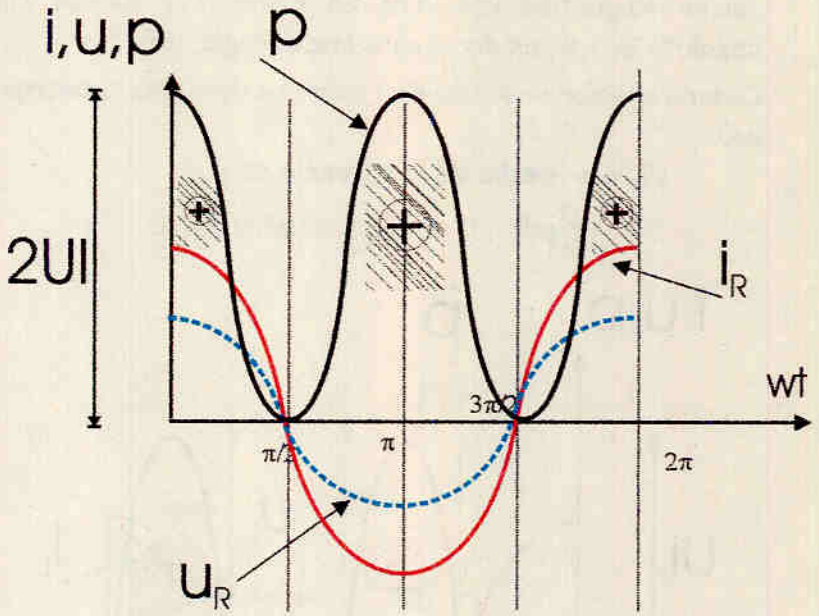
$$u = Ri = RI_m \cos wt = U_m \cos wt \Rightarrow p = u \cdot i = U_m I_m \cos^2 wt$$

es decir,

$$p = \frac{U_m I_m}{2}(1 + \cos 2wt) = UI + UI\cos 2wt \geq 0$$

La potencia instantánea es positiva o nula (la tensión u y la intensidad i siempre tienen el mismo signo.

El valor medio de p(t) es P=UI ya que $\int_0^T \cos 2wt\,de = 0$, o bien $P=RI^2$.



**A.2) Autoinducción.**

La potencia instantánea será,

$$p = u \cdot i = -U_m I_m \cos wt \, sen wt = -\frac{U_m I_m}{2} sen2wt$$

es decir,

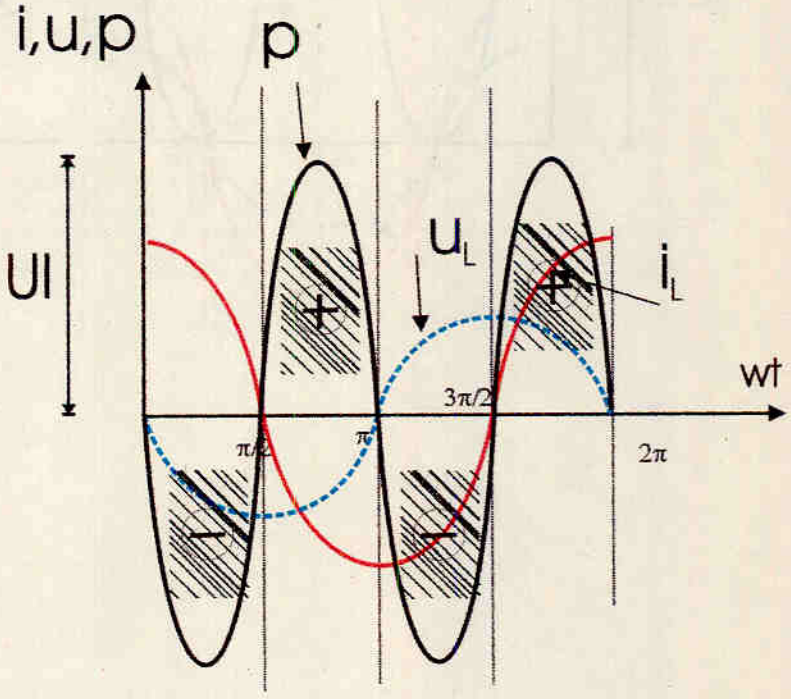
- p es alterna senoidal de doble frecuencia (2w).
- Valor máximo=UI= $\frac{U_m I_m}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$
- P(t)>0 cuando i y u tienen el mismo signo.
- P(t)<0 cuando i y u tienen distinto signo.

Interpretación: Una autoinducción almacena energía en forma de campo magnético (se verá en Física II) cuando crece el valor absoluto de i, $|i|$, es decir consume energía, p>0.

**Cuando el valor absoluto de i decrece devuelve la energía almacenada, p<0.**

**El valor medio de la potencia es,**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = 0, \text{ya que} \int_0^T sen2wt\,dt = 0$$



**A.3) Condensador.**

La potencia instantánea será,

$$p = u \cdot i = U_m I_m \operatorname{senwt} \cos wt = \frac{U_m I_m}{2} \operatorname{sen2wt}$$

es decir,

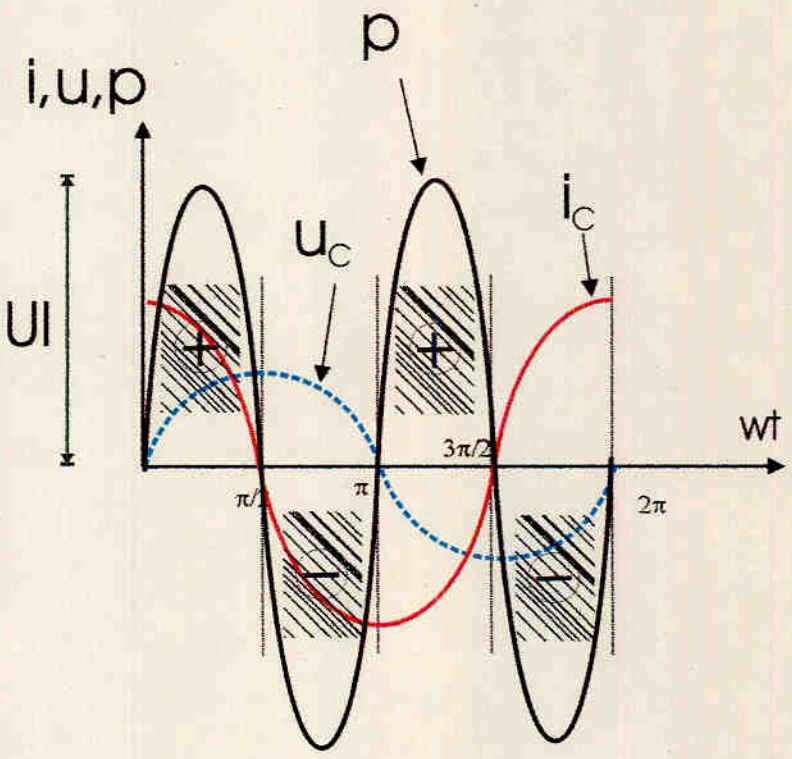
- p es alterna senoidal de doble frecuencia (2w).
- Valor máximo=UI= $\frac{U_m I_m}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$
- P(t)>0 cuando el valor absoluto de u crece.
- P(t)<0 cuando el valor absoluto de u decrece.

Interpretación: Un condensador al cargarse, el valor absoluto de u crece, es decir consume energía y la almacena creando campo eléctrico en el condensador, p>0.

Cuando el valor absoluto de u decrece, el condensador se descarga, devolviendo la energía almacenada, p<0.

El valor medio de la potencia es,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = 0, \text{ya que} \int_0^T \operatorname{sen2wt}\,dt = 0$$



**A.4) Caso general**

La potencia instantánea será,

$$p = u \cdot i = U_m I_m \cos wt \cos(wt + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}\left[\cos\varphi + \cos(2wt + \varphi)\right]$$

es decir, p es alterna senoidal de doble frecuencia (2w).

El valor medio de la potencia es,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{UI}{T}\left[\int_0^T \cos\varphi\,dt + \int_0^T \cos(2wt + \varphi)\,dt\right] = UI\cos\varphi$$

ya que,

$$\int_0^T \cos(2wt + \varphi) = 0$$

P es la potencia media y se mide en vatios.

UI es la llamada potencia aparente y se mide en VA (no tiene significado físico).

Si el dipolo es una impedancia.

$$P = UI\cos\varphi = IZI\cos\varphi = I^2 Z\cos\varphi = I^2 R$$

es decir, la potencia media se consume en la resistencia.