

ETSI Telecomunicación

# Sistemas de Posicionamiento Global

Apuntes de Pak

## **Sistemas de Posicionamiento Global**

Apuntes de Pak (Fco. J. Rodríguez Fortuño)  
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.  
Primer cuatrimestre de 5º curso  
Curso 2007/2008

### **Contenido**

- Referencia rápida de la asignatura
- Transparencias comentadas

**Fecha de última actualización:** 8 Noviembre 2008

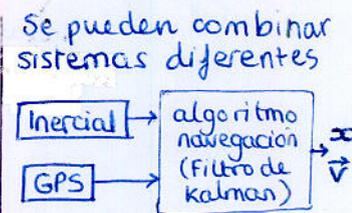
## Tema 1. Introducción a la navegación

**Navegación**

- posición
- velocidad

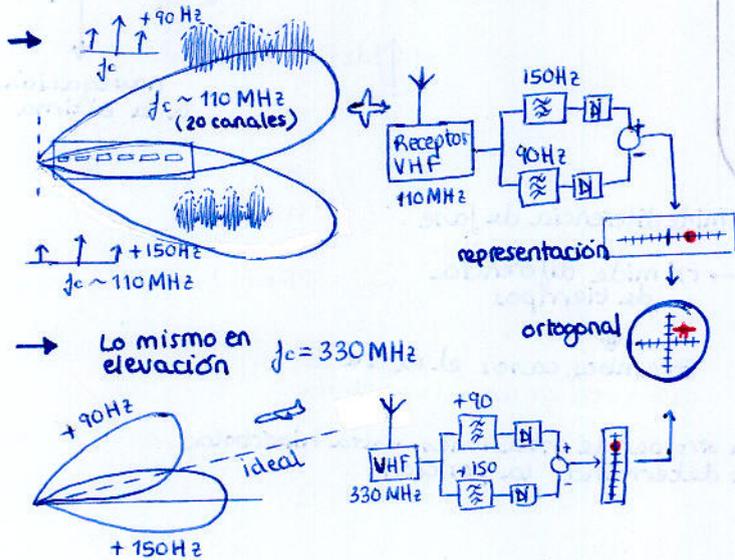
→ a la estima  
 Posición inicial conocida  
 Se mide velocidad o aceleración (inercial)  
 Se integra → posición final → acumula errores

→ por posición  
 condición geométrica (ej radioeléctrica) (GPS)  
 proporciona la posición



## Sistemas de Radionavegación

### Instrumental Landing System ILS



### Radiogoniómetro (radiocompás)

Emisores

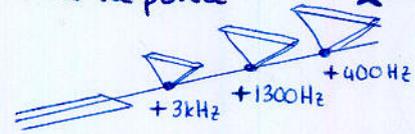
- balizas omni en LF (200-300 kHz)
- aprovechar radiodifusión

diag. rad.

agrupación ~ 2 elementos único nulo para detectar dirección de llegada

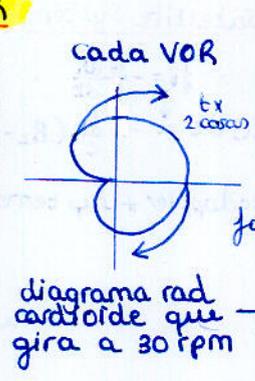
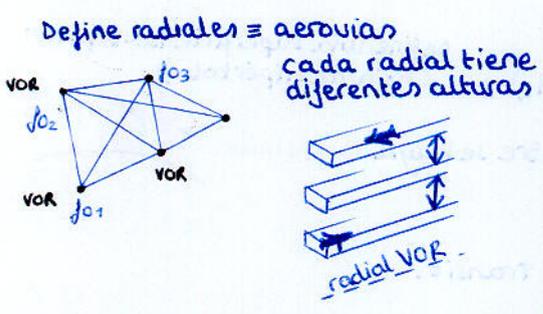
ADF = Automatic Direction Finder = Radiocompás automático

→ Y además 3 balizas para la distancia a la pista



Permite aterrizar en condiciones de visibilidad nula y es tremendamente sencillo

### VHF Omnidirectional Range VOR



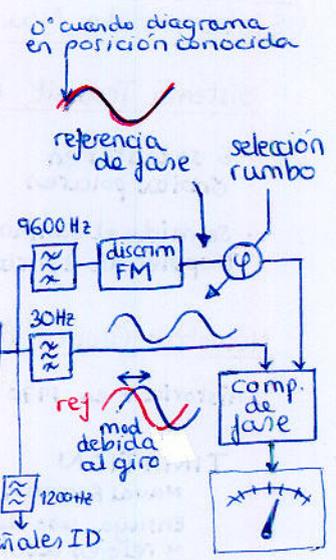
referencia de fase

modula en FM a 30 Hz una subportadora a 9960 Hz con  $\Delta f = \pm 480 \text{ Hz}$

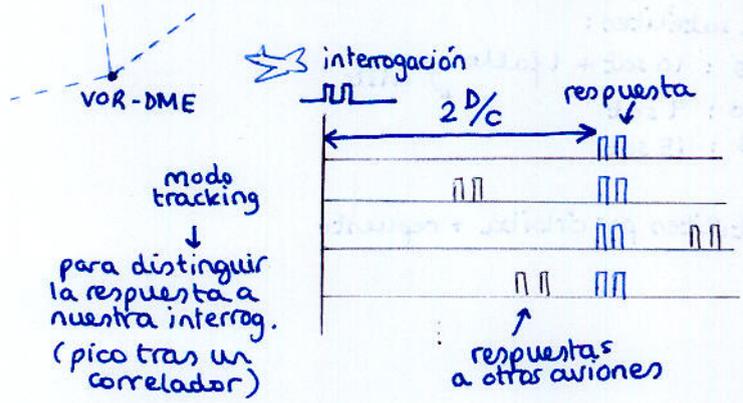
$f_c + 9960 \text{ Hz} + \Delta f \cdot x(t)$

produce modulación de 30 Hz en  $f_c$

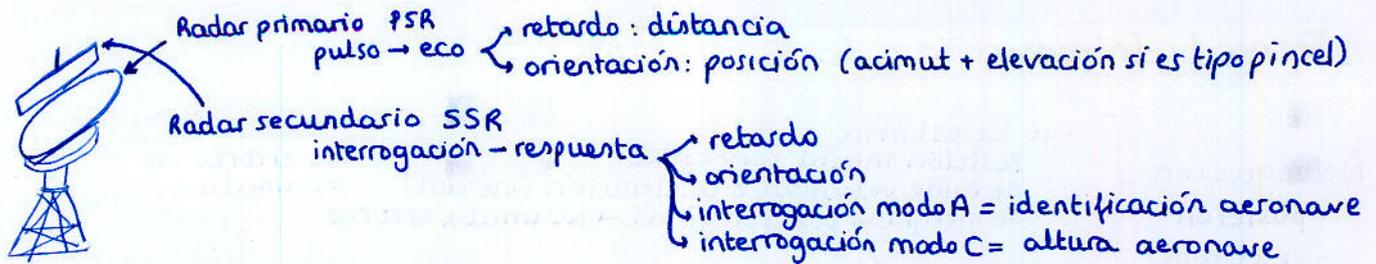
$f_c$  entre 108-118 MHz (200 canales)



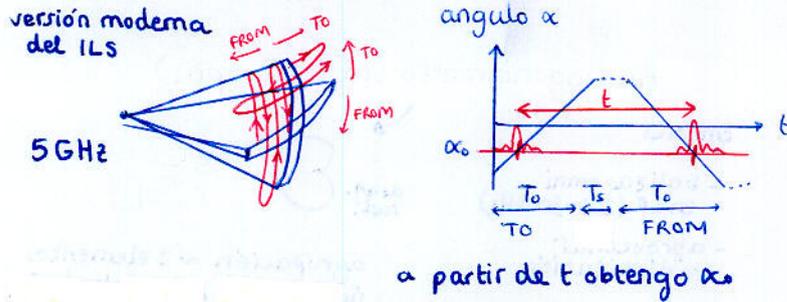
+ DME: Distance Measurement Equipment



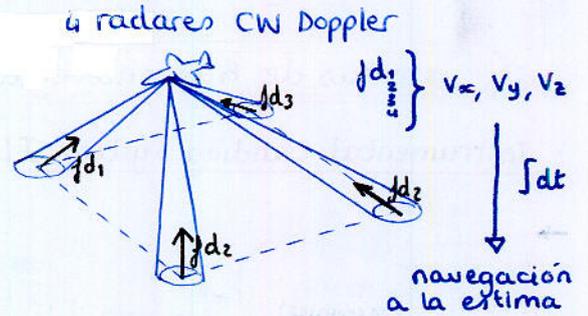
## Secondary Surveillance Radar (radar secundario) SSR



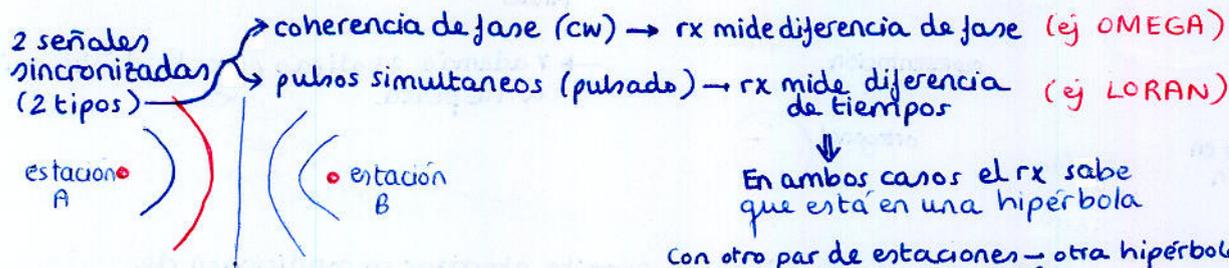
## Microwave Landing System (MLS)



## Navegador Doppler



## Sistemas de navegación hiperbólicos



## Sistemas de Navegación por satélite

### Sistema Transit NNSS (Navy Navigation Satellite System)

- 6 satélites en órbitas polares
- se mide el desplaz. Doppler de 2 portadoras
- Contar nº ciclos Doppler  $f_0 = -\frac{f_0}{c} \frac{dR}{dt}$
- $N_{R_1 - R_2} = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t) dt \stackrel{\downarrow}{=} -\frac{f_0}{c} (R_2 - R_1)$  ← Define una superficie iso-Doppler (hoja de hipérbola)
- con dos sup. isodoppler + sup terrestre se haya la posición

### Navstar Global Positioning System (GPS)

Historia: en 1970 se desarrollan 2 sistemas para suceder al Transit.

#### TIMATION

Naval Research Lab  
Ensayo uso de cuarzo y relojes atómicos a bordo de satélites

#### Project 621 B

U.S. Air Force  
se enrayan los códigos pseudoaleatorios desde tierra a aviones

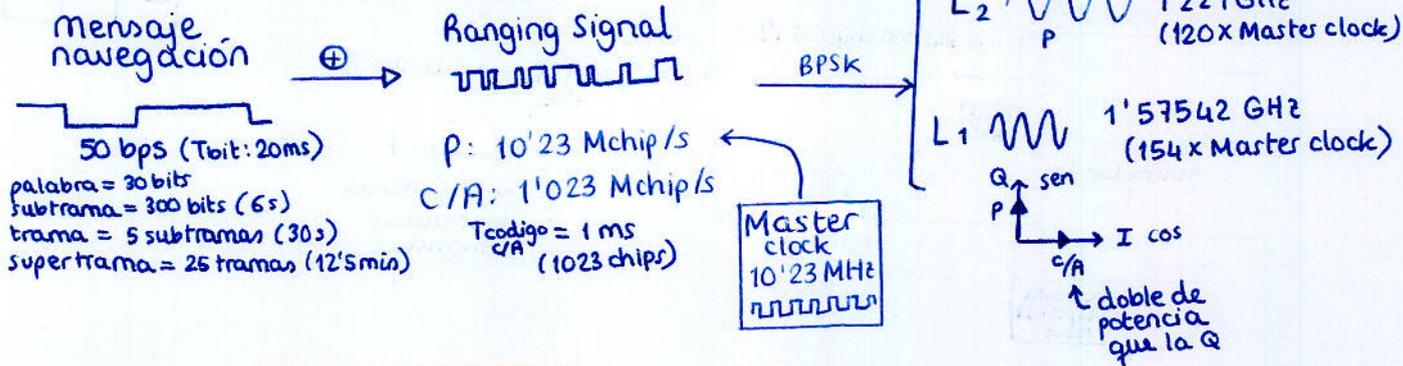
1973: se toman como base para definir el NAVSTAR

Generaciones de satélites:

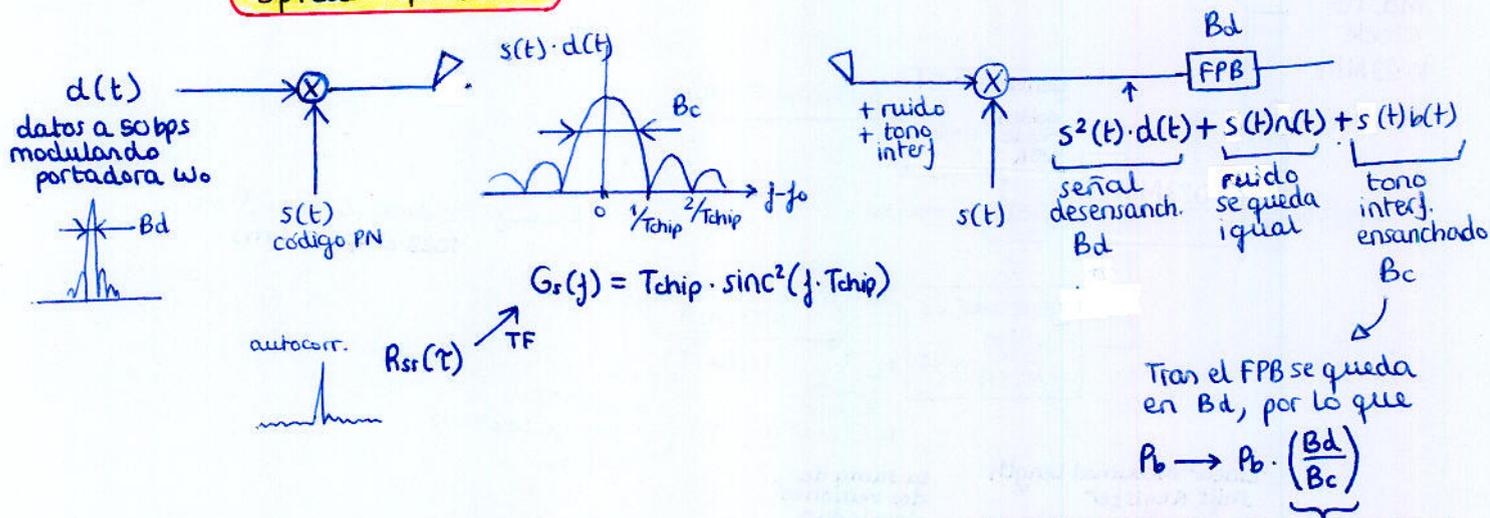
- Bloque I: 78-85: 10 sat + 1 fallo } crisis
- Bloque II: 89-90: 9 sat
- Bloque II-A: 90-93: 15 sat

Actualmente 4 satélites por órbita + repuesto

# Señal GPS



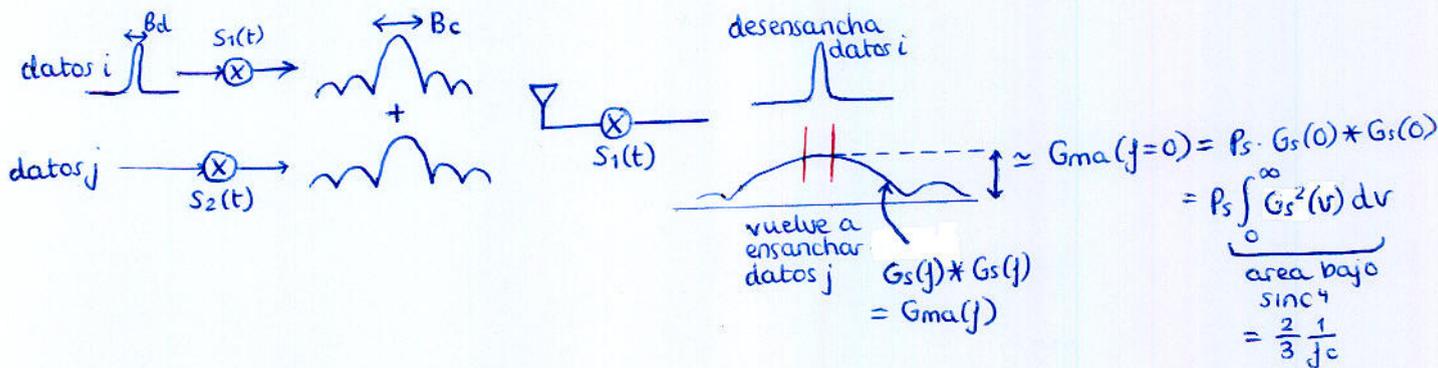
## Spread Spectrum



Ganancia de procesado  $\left(\frac{B_d}{B_c}\right)^{-1} = \left(\frac{f_d}{f_c}\right)^{-1}$

$\begin{matrix} <1 \\ >1 \end{matrix}$

## múltiple acceso con spread spectrum: (CDMA)



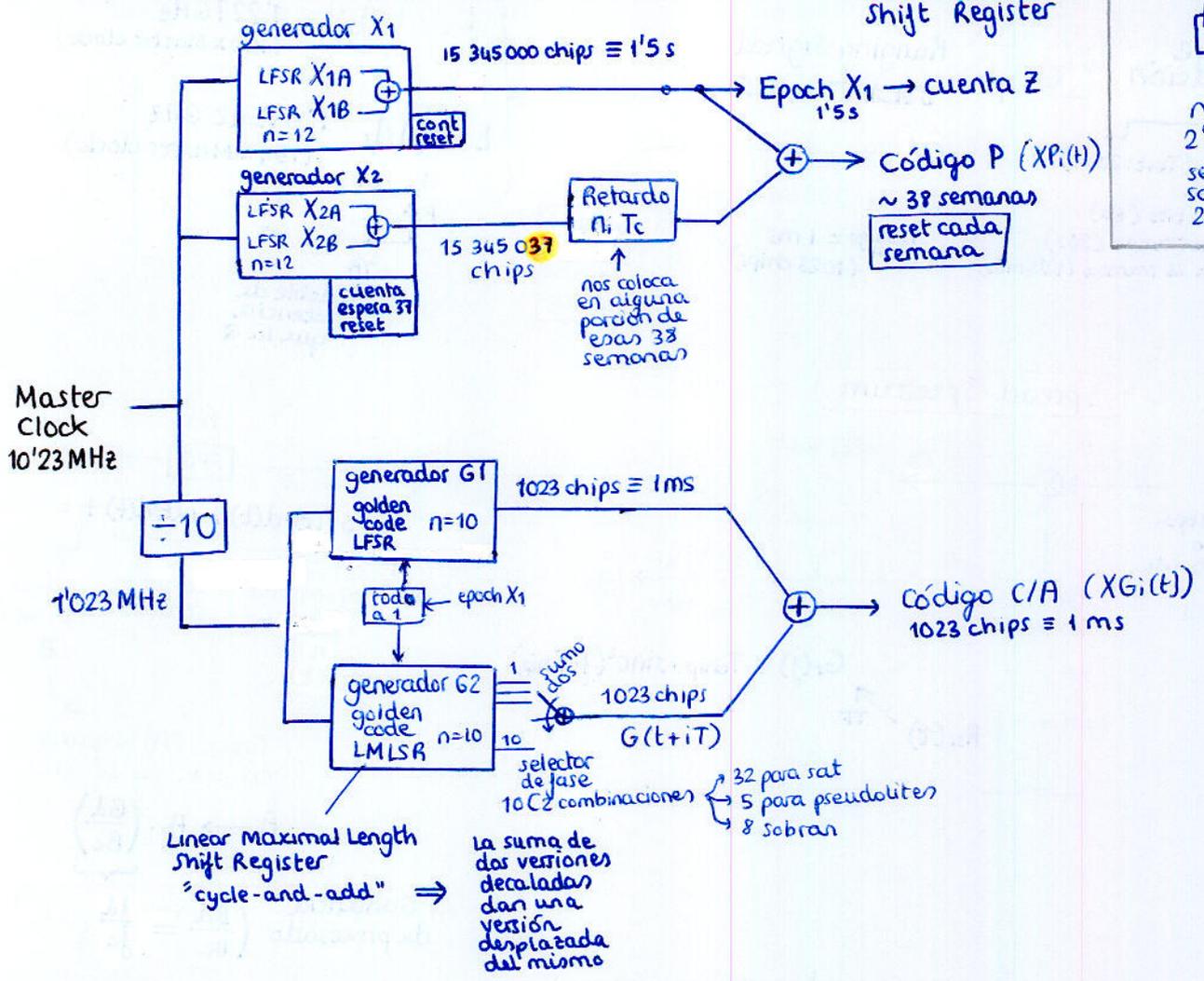
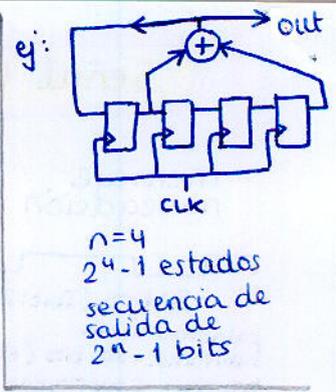
Por tanto queda

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_s \cdot T_{bit}}{N_0 + \underbrace{(M-1)}_{\text{CDMA con M señales}} \underbrace{\frac{2}{3} \frac{P_s}{f_c}}_{G_{ma}(0)}}$$

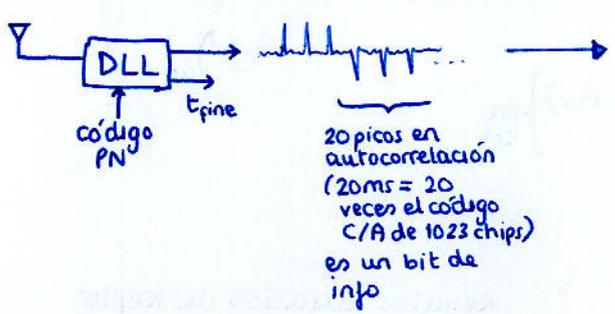
$\Rightarrow$  se obtiene  $M_{max}$

# Creación de los códigos PN (pseudo noise)

LFSR  
Linear Feedback  
Shift Register



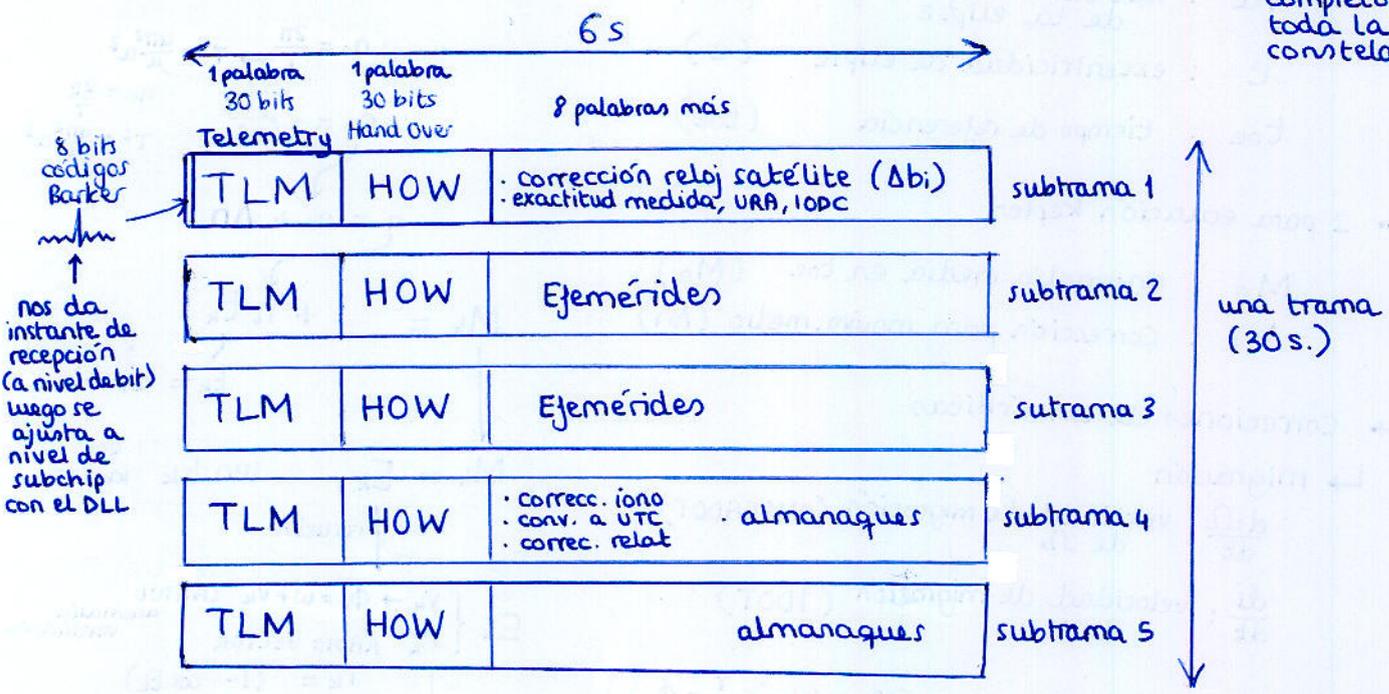
# Datos del mensaje de navegación



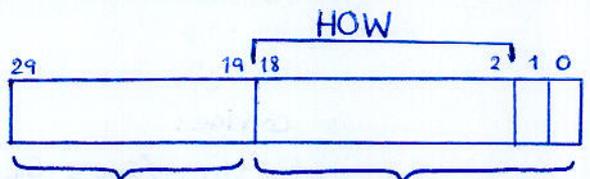
- 1 código C/A = 1ms
- 1 bit datos = 20ms
- 1 subtrama = 300 bits = 6s  
(30 x 10) palabra
- 1 trama = 5 subtramas = 30s
- 1 supertrama = 25 tramas = 12'5min

La mayor parte de datos se repiten en cada trama (no tener que esperar)

almanaque completo de toda la constelación



**HOW** → Hand Over Word → nos da el nº de epoch  $X_1$  de la semana → facilita la tarea al DLL del enorme código P



- Incrementa cada Epoch  $X_1$ , 1'5s
- Se resetea cada semana
- HOW no necesita últimos 2 bits ya que una subtrama ocupa 4 Epoch  $X_1$ 's
- 0... 403 199 ≡ 1 semana

## Subtrama 1

Corrección del reloj de satélite  
 $t_{si} = t_{si} + \Delta bi$   
 ↑ TOW ↑ tiempo REAL GPS

polinomio 2º orden

$$\Delta bi = a_{f0} + a_{f1} (t_k - t_{oc}) + a_{f2} (t_k - t_{oc})^2 + \Delta t_R$$

$t_k = t_{si} - t_{oe}$   
 ↑ TOW ↑ instante rej  
 ↑ ↑  
 tiempo REAL GPS instante rej

↑ corrección relativista

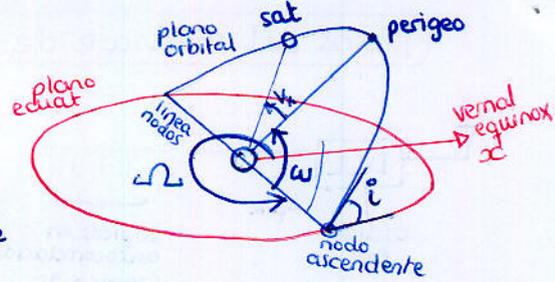
- User Range Accuracy (URA) [en metros]
- Issue of Data Clock (IODC) [etiqueta para advertir correcciones]

# Subtramas 2 y 3: ejemérides

→ 6 parámetros orbitales

↳ 3 orientación

- $\Omega$  : long. línea nodal ascendente (OMEGA<sub>0</sub>)
  - $i$  : inclinación de plano orbital ( $i_0$ )
  - $\omega$  : ángulo de perigeo desde el nodo ascendente ( $\omega$ )
- } en toe



↳ 3 dimensionales

- $\sqrt{a}$  : raíz del semieje mayor de la elipse ( $a^{1/2}$ )
- $e$  : excentricidad de elipse ( $e$ )
- $t_{oe}$  : tiempo de referencia ( $t_{oe}$ )

Resuelve ecuación de Kepler

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad n_0 = \frac{2\pi}{T} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

$$n = n_0 + \Delta n$$

$$M_k = M_0 + n t_k$$

con corrección  $\Delta b_i$  de la subtrama 1

$$t_k = t_{si} - t_{oe}$$

$$M_k = E_k - e \sin E_k \quad \text{ec. Kepler}$$

resuelve  $E_k$

- $V_k$  ANOMALIA
- $r_k$  RADIO VECTOR
- $r_k = a(1 - e \cos E_k)$

$V_k = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \tan \frac{E}{2}}{1-e \cos E}\right)$  anomalía verdadera

LATITUD  $\phi_k = V_k + \omega$

RADIO VECTOR  $r_k$



corrige:

$$u_k = \phi_k + \delta u_k \quad (\delta u_k = C_{us} \sin 2\phi_k + C_{uc} \cos 2\phi_k)$$

$$r_k = r_k + \delta r_k \quad (\delta r_k = C_{rs} \sin 2\phi_k + C_{rc} \cos 2\phi_k)$$

$$i_k = i_0 + (IDOT) \cdot t_k + \delta i_k \quad (\delta i_k = C_{is} \sin 2\phi_k + C_{ic} \cos 2\phi_k)$$

→ 2 para ecuación Kepler

- $M_0$  : anomalía media en toe ( $M_0$ )
- $\Delta n$  : corrección para movim. medio ( $\Delta n$ )

→ Correcciones de las órbitas

↳ migración

$\frac{d\Omega}{dt}$  : velocidad de migración de  $\Omega$  (OMEGADOT)

$\frac{di}{dt}$  : velocidad de osculación de  $i$  (IDOT)

↳ Correcciones armónicas (2º armónico)

$C_{uc}$  ← coseno } latitud

$C_{us}$  ← seno }

$C_{rc}$  } radio vector

$C_{rs}$  }

$C_{ic}$  ← coseno } inclinación

$C_{is}$  ← seno }

↑ periodo  $\frac{T}{2}$

→ IOE : issue of ephemeris

rotación Tierra EC-EF respecto al ECI

$$\Omega = \Omega_0 + (OMEGADOT) \cdot t_k$$

$$\Omega_{tk} = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}$$

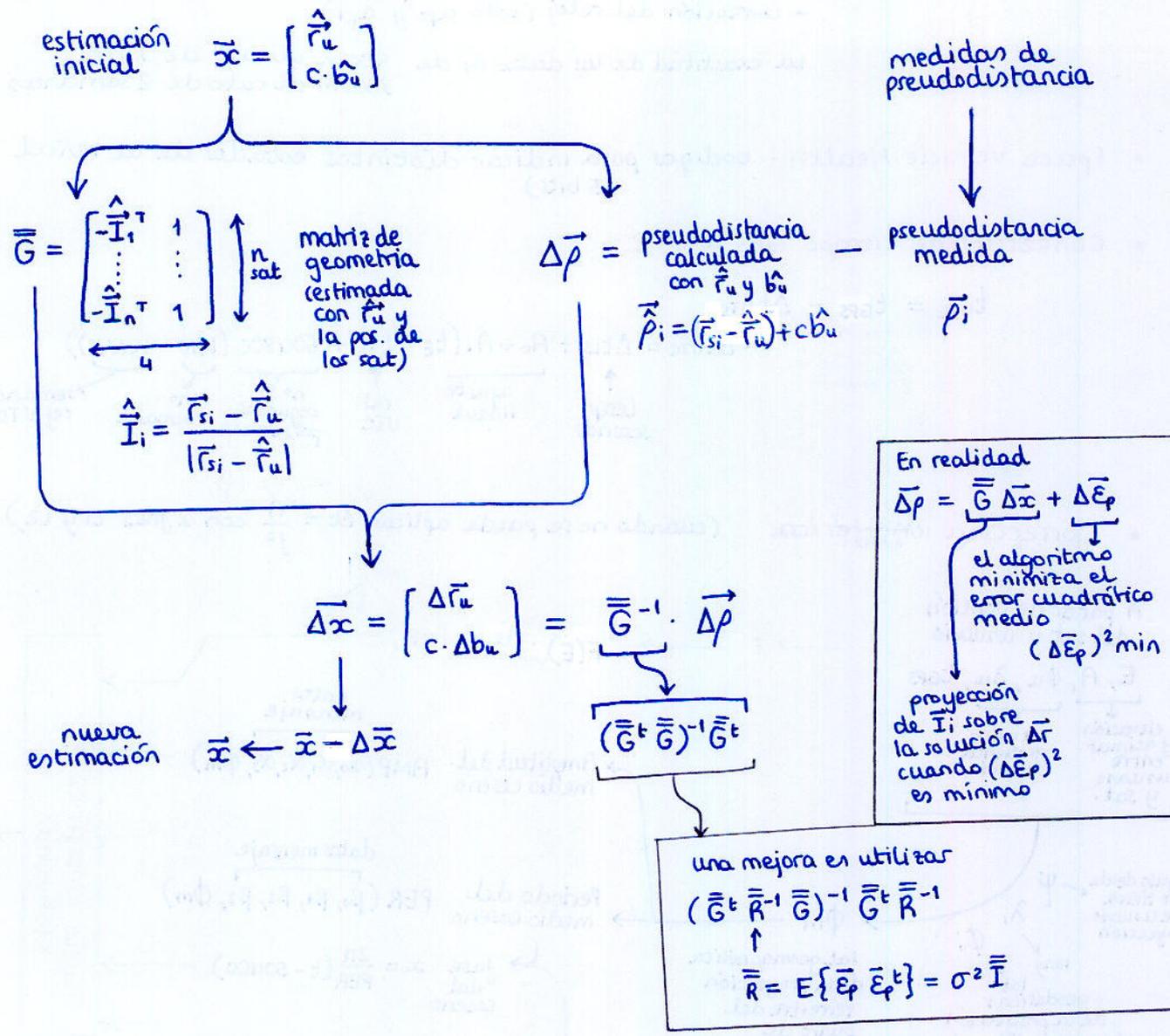
⇓ trigonometría

$$\{x_k, y_k, z_k\}$$



# Algoritmos de Navegación

## Solución de punto simple



## Exactitud de la solución y DOP (Dilution of precision)

$\Delta \bar{x} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z \ c \cdot \Delta b]$

$\Delta \bar{x} = \bar{G}^{-1} \cdot \Delta \bar{\rho}$

$\bar{R} = E[\Delta \bar{\rho} \Delta \bar{\rho}^T] = \sigma^2 \bar{I}$

$E[\Delta \bar{x} \Delta \bar{x}^T] = \sigma^2 \bar{A} = \sigma^2 (\bar{G}^T \bar{G})^{-1}$

~~$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$~~

time TDOP =  $\sqrt{A_{44}}$

vertical VDOP =  $\sqrt{A_{33}}$

horizontal HDOP =  $\sqrt{A_{11} + A_{22}}$

position PDOP =  $\sqrt{A_{11} + A_{22} + A_{33}}$

geometry GDOP =  $\sqrt{A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}}$

$\begin{bmatrix} \text{error tiempo} \\ \text{error vertical} \\ \text{error horizontal} \\ \text{error posición} \\ \text{error geométrica} \end{bmatrix} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} \text{TDOP} \\ \text{VDOP} \\ \text{HDOP} \\ \text{PDOP} \\ \text{GDOP} \end{bmatrix}$

# INTRODUCCIÓN

**Navegación :** proceso de direccionar los movimientos de una nave o vehículo

La navegación puede ser : terrestre , marítima, aérea, espacial

proporciona información sobre : posición , dirección , velocidad

y las correcciones necesarias para seguir una trayectoria o llegar a un destino prefijado

## Tipos de Navegación :

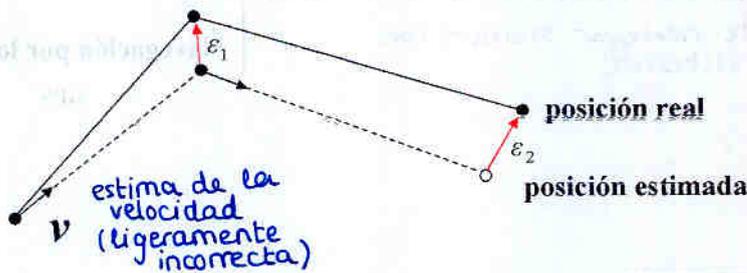
Navegación a la estima

Navegación por localización



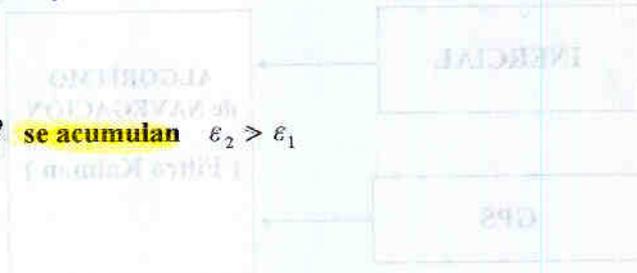
### Navegación a la Estima

Se conoce el punto de partida y se mide el vector velocidad. La posición se calcula integrando la velocidad



error al determinar  $v$

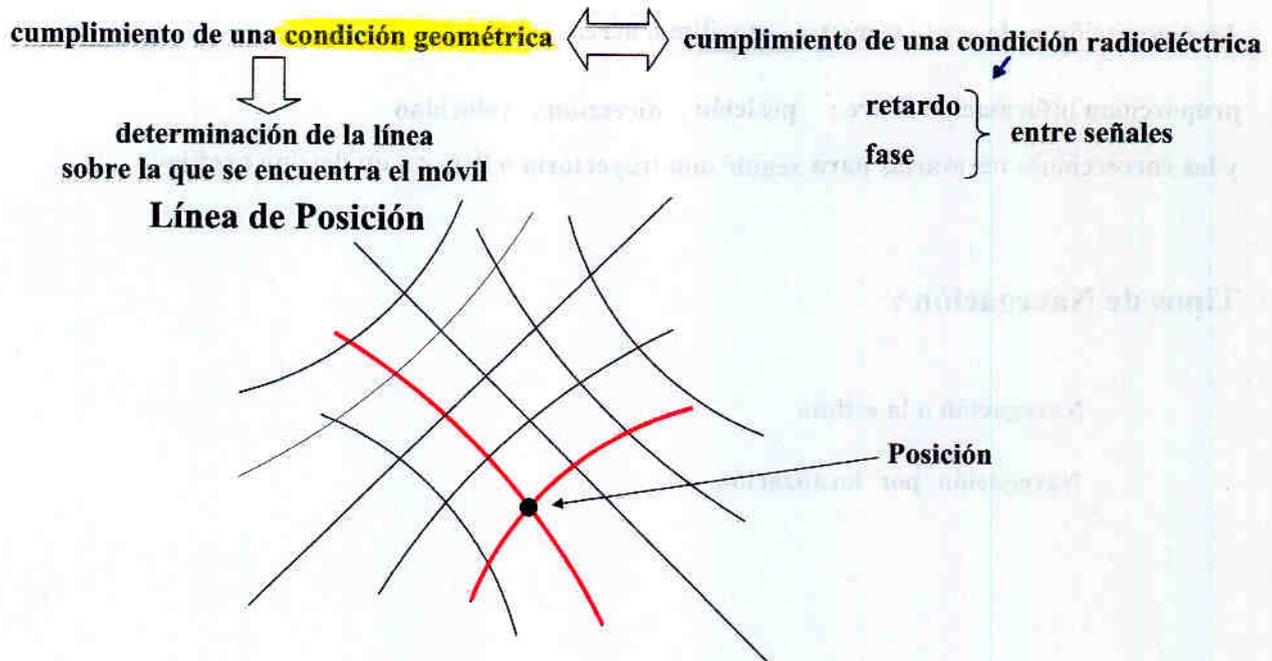
los errores al determinar  $v$  se acumulan  $\epsilon_2 > \epsilon_1$



## Navegación por Localización

El sistema proporciona directamente la posición

La velocidad se puede calcular derivando la posición



## GUIADO AUTOMÁTICO de NAVES (Piloto Automático)

Normalmente combinan simultáneamente sistemas diferentes

*No es fiable navegar siempre con un único sistema*

Navegación a la estima  
INERCIAL

Navegación por localización  
GPS

ejemplo :



# Historia

## SISTEMAS de RADIONAVEGACIÓN

navegación aérea

~~Radiogoniómetro~~ : receptor con antenas elementales (espiras, dipolos) con ciertos nulos en el diagrama

Radiobalizas ILS → Instrumental Landing System. Para aterrizar sin visibilidad muy antiguo y se sigue utilizando

VOR - DME → Radiobalizas que definen "carreteras" en el espacio aéreo

SSR → Surveillance secondary Radar

MLS → Igual que ILS pero con microondas

Navegador Doppler

el GPS las irá desbancando, pero progresivamente, ya que el GPS hoy día aún no es fiable para cosas como aterrizaje

Sistemas hiperbólicos obsoletos

~~LORAN A, LORAN C~~

~~DECCA~~

~~OMEGA (cobertura global)~~

el primer sistema de radionavegación GLOBAL

Sistemas de navegación por satélite

~~TRANSIT (USA) - CICADA (URSS)~~

↓  
GPS

↓  
GLONASS ↑ ↓ ?

GALILEO (ESA) ↑ (iniciándose)

## RADIOGONIÓMETRO (RADIOCOMPAS)

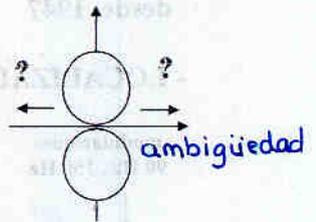
Sistema de recepción direccional (determina el ángulo de llegada del frente de onda)

Antenas elementales:

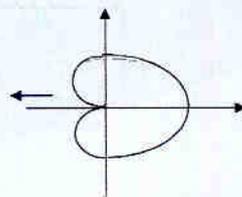
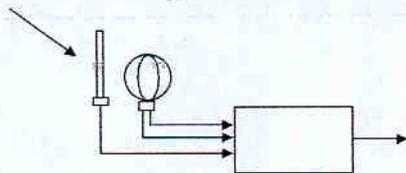
- espiras eléctricamente pequeñas 
- dipolos 
- agrupaciones muy simples (2 elementos)

se aprovecha el nulo del diagrama

más fácil detectar el paso por un nulo



+ antena omnidireccional para resolver ambigüedades



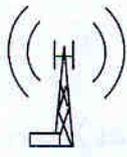
combinando antenas  
↓  
único nulo para deshacer la ambigüedad

Emisores:

- Balizas omnidireccionales en LF ~ 200 - 300 KHz
  - Estaciones de radiodifusión MF (aprovecharlas)   
 500-1500
- errores del orden de 2° a 5° (muy grandes)

ADF (Automatic Direction Finder) radiocompas automático servo-mecanismo para la determinación del nulo

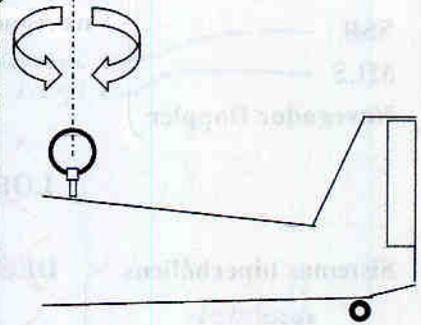
← ya es obsoleto  
Los barcos iban equipados con ADF



años 20 - 30 - 40



se aprovechaban las emisoras de radio



**RADIOAYUDAS a la NAVEGACIÓN AÉREA**

**ILS** (Instrumental Landing System)

desde 1947 "aproximación"

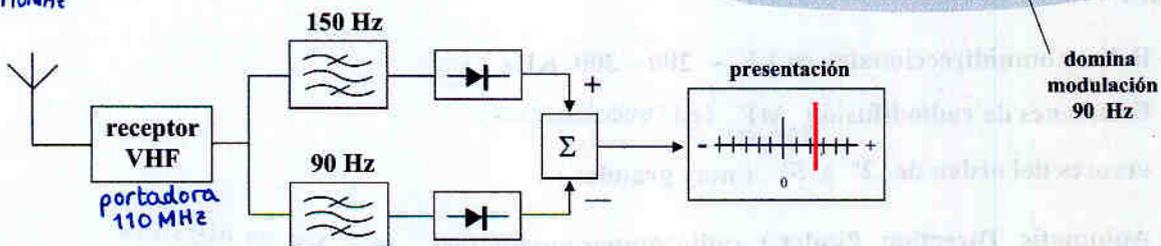
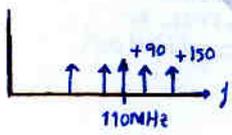
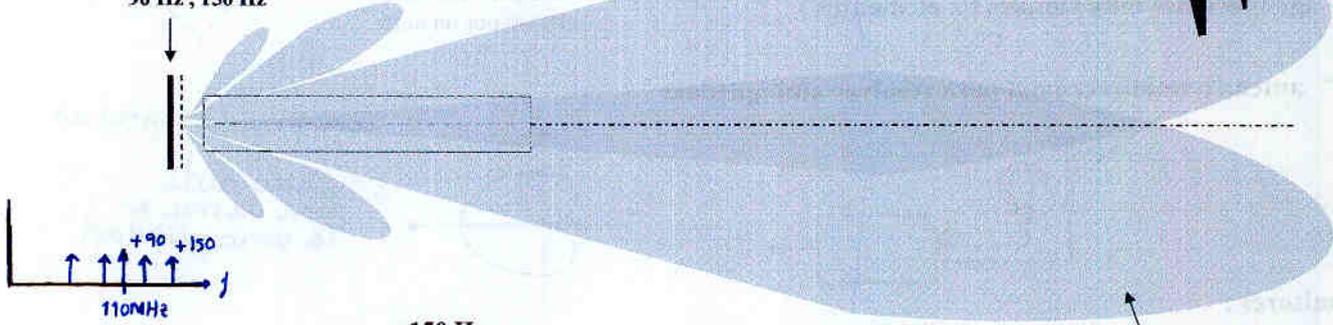
- Localizador
- Senda descenso
- 3 balizas

ILS: sistema tremendamente sencillo inventado por USA en 2ª guerra mundial

Permite aproximarse a pista con nula visibilidad

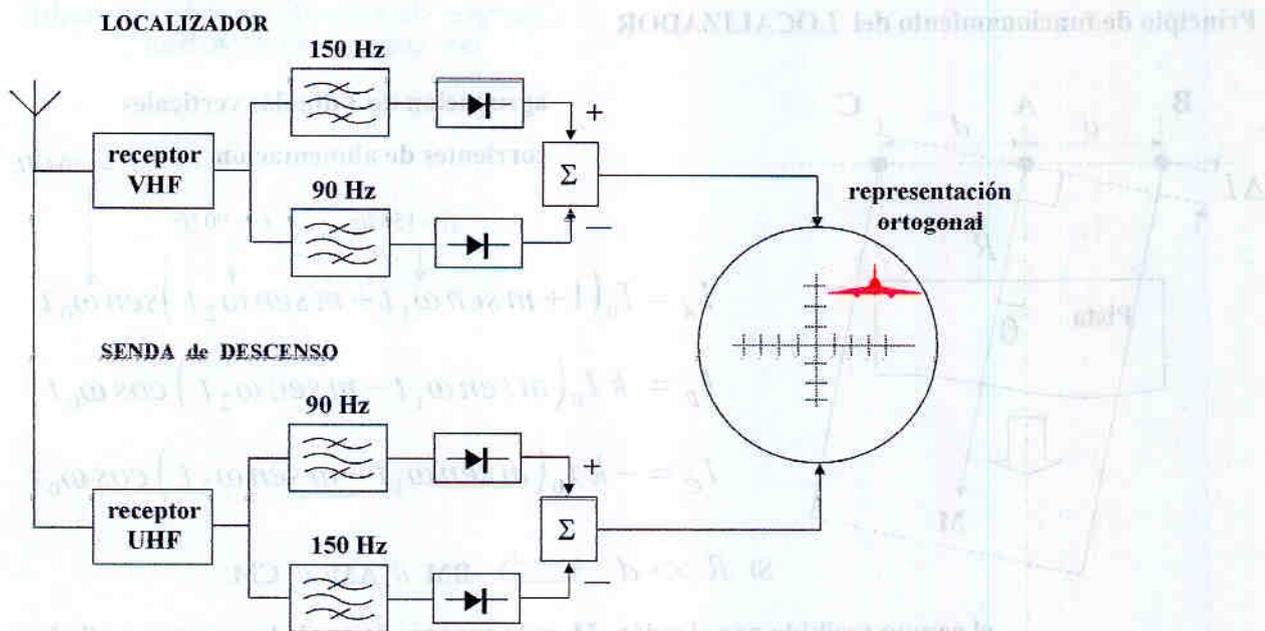
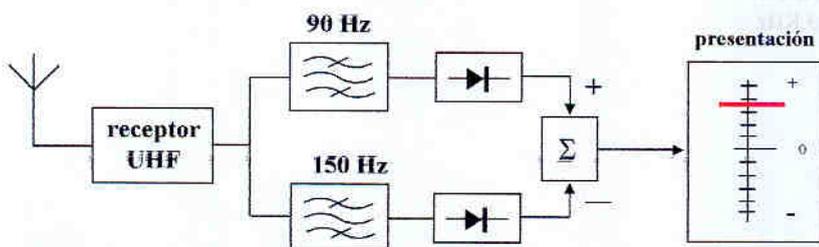
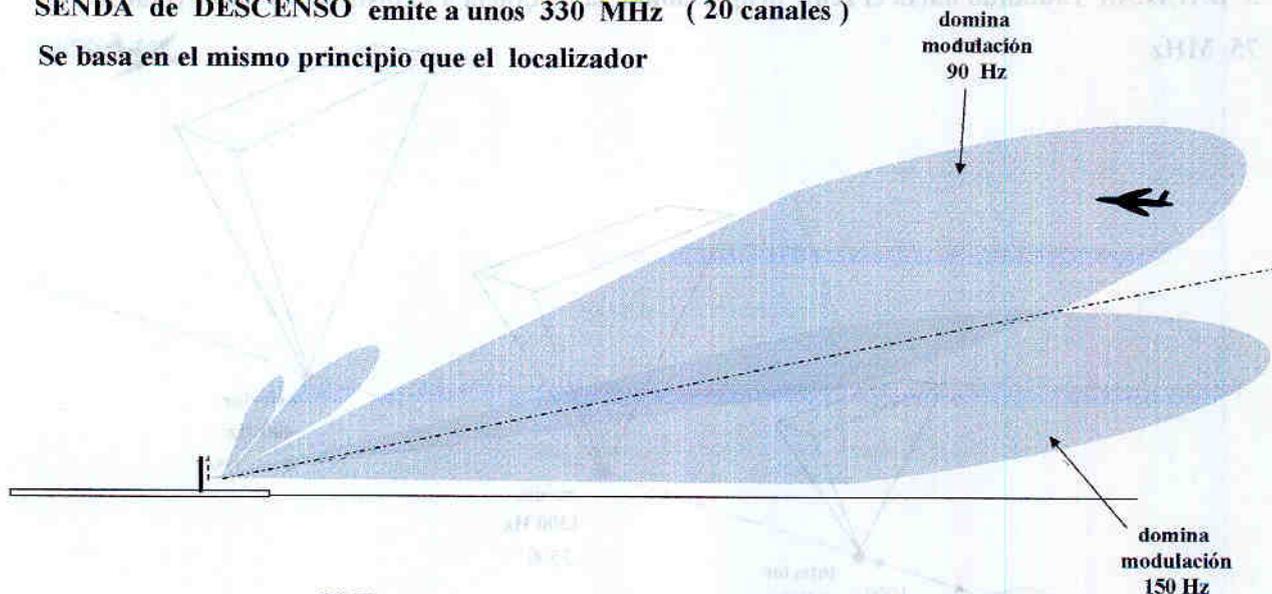
- LOCALIZADOR emite a unos 110 MHz (20 canales)

modulaciones 90 Hz, 150 Hz



SENDA de DESCENSO emite a unos 330 MHz ( 20 canales )

Se basa en el mismo principio que el localizador

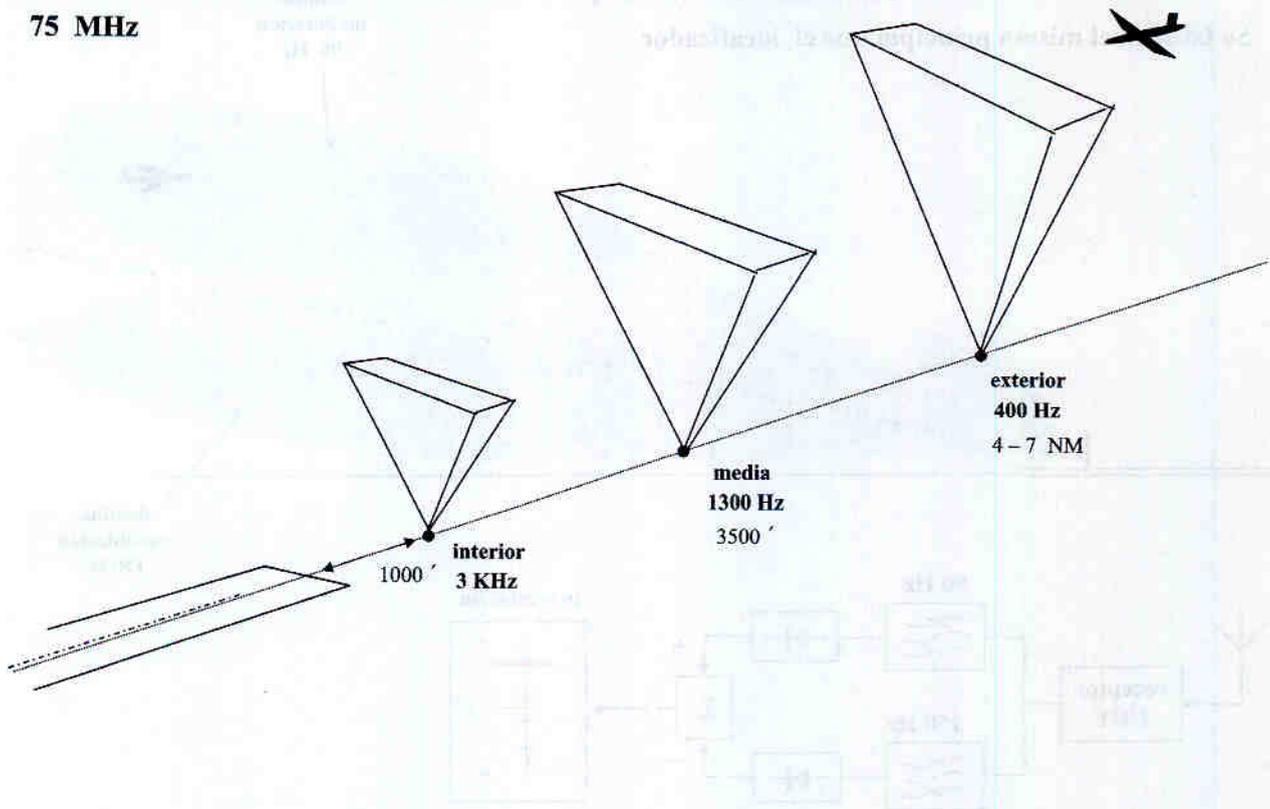


$$E_m = E_0 \left[ (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t \right]$$

$$= E_0 \cos \omega_c t + m E_0 \cos \omega_m t \cos \omega_c t$$

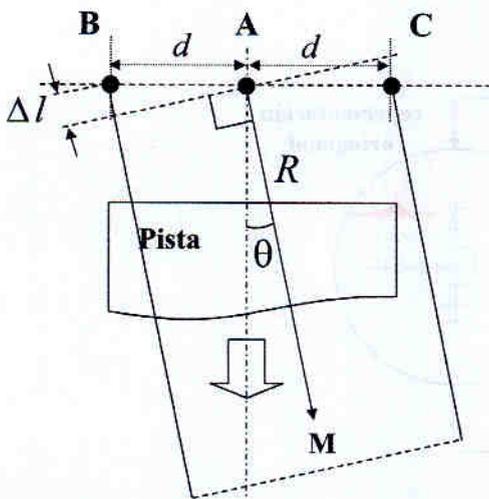
$$= E_0 \cos \omega_c t + \frac{m E_0}{2} [\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t]$$

**3 BALIZAS radiando hacia el zenit proporcionan la distancia a la pista al ser sobrevoladas**  
**75 MHz**



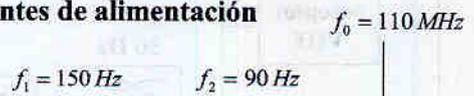
**Principio de funcionamiento del LOCALIZADOR**

*(ejemplo de porqué un ARRAY radia en unas direcciones)*



agrupación de 3 dipolos verticales

corrientes de alimentación



$$I_A = I_0 (1 + m \text{sen } \omega_1 t + m \text{sen } \omega_2 t) \text{sen } \omega_0 t$$

$$I_B = k I_0 (m \text{sen } \omega_1 t - m \text{sen } \omega_2 t) \text{cos } \omega_0 t$$

$$I_C = -k I_0 (m \text{sen } \omega_1 t - m \text{sen } \omega_2 t) \text{cos } \omega_0 t$$

Si  $R \gg d \implies \text{BM} \parallel \text{AM} \parallel \text{CM}$

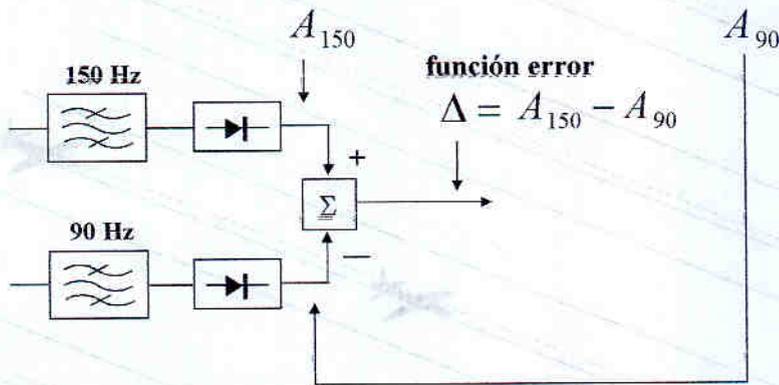
el campo recibido por el avión M es la superposición de los campos radiados

$$E_M \cong E_0 \left[ (1 + m \text{sen } \omega_1 t + m \text{sen } \omega_2 t) \text{sen } \omega_0 t + \dots \right. \\
\left. \dots + k (\text{sen } \omega_1 t - \text{sen } \omega_2 t) (\text{cos } (\omega_0 t - \alpha) - \text{cos } (\omega_0 t + \alpha)) \right]$$

$\alpha$  desfase debido a  $\Delta l$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{d \text{sen } \theta}_{\Delta l}$$

$$E_M \cong E_0 \left[ 1 + \underbrace{(m + 2k \text{ sen } \alpha)}_{A_{150}} \text{ sen } \omega_1 t + \underbrace{(m - 2k \text{ sen } \alpha)}_{A_{90}} \text{ sen } \omega_2 t \right] \text{ sen } \omega_0 t$$



$$\Delta = 4k \text{ sen } \alpha \cong 4k \frac{2\pi}{\lambda} d \theta$$

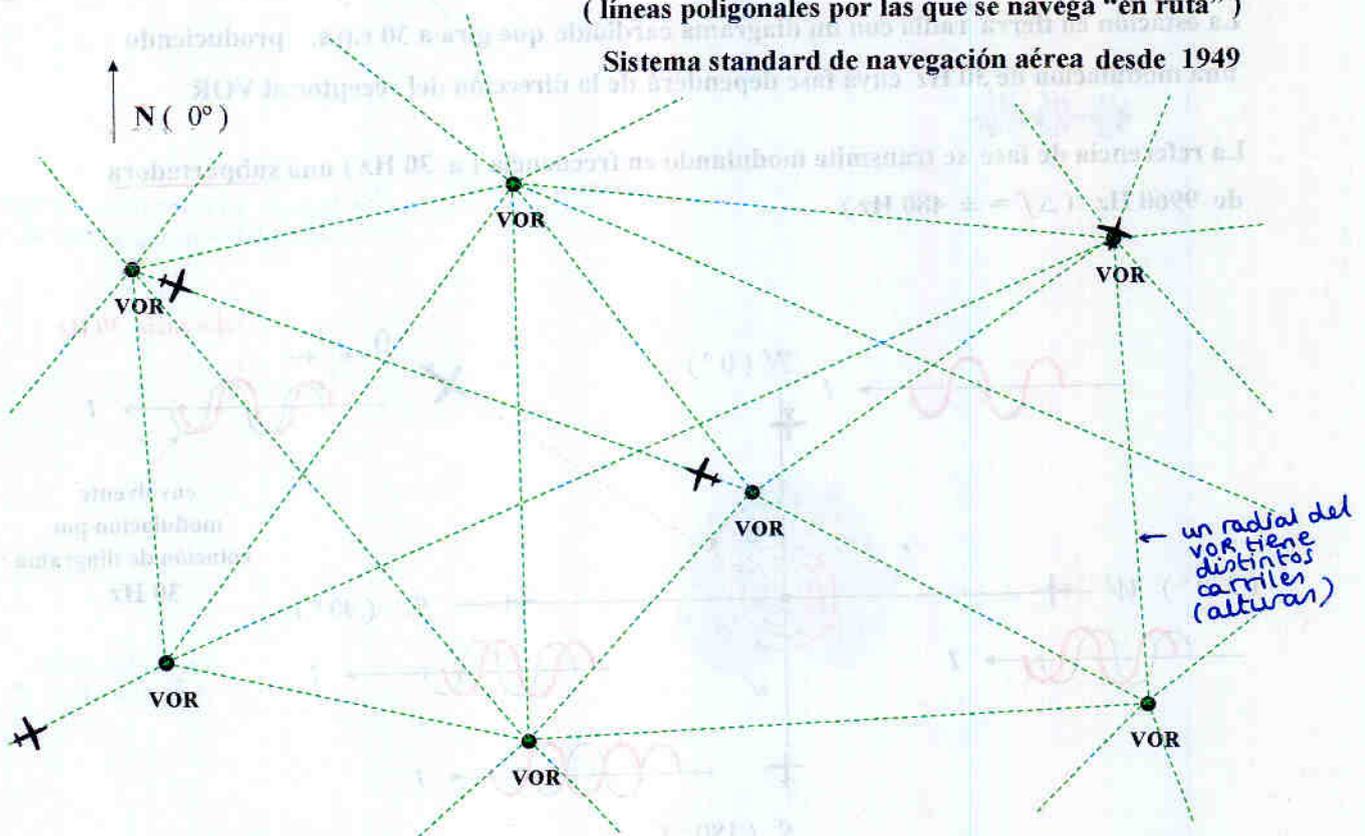
evitar sobremodulación  $\Rightarrow m + 2k \leq 1$   
 $\uparrow$   
 $k \cong 30\%$

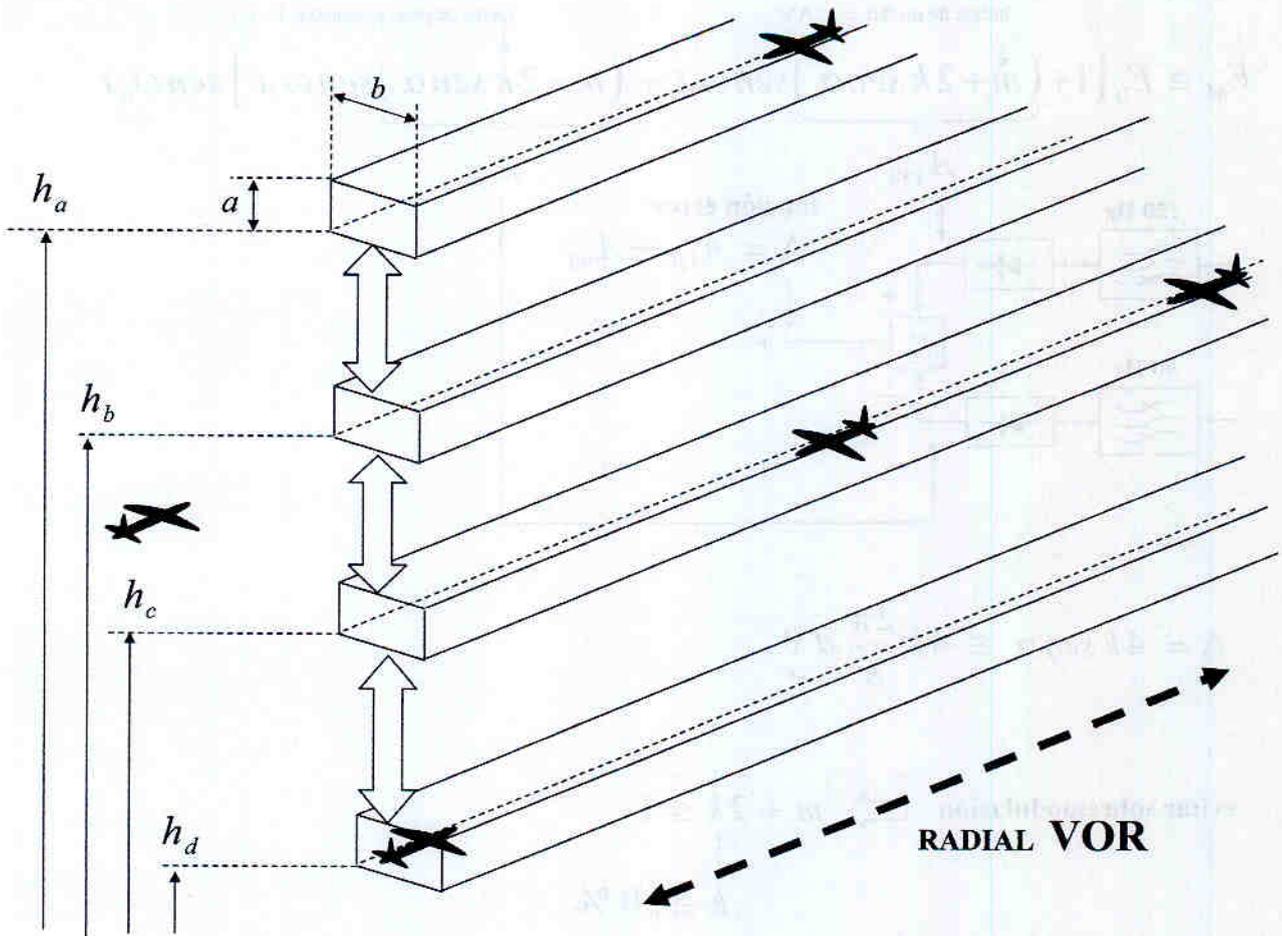
### RADIOAYUDAS a la NAVEGACIÓN AÉREA

**VOR** (V.H.F. Omnidirectional Range)  $\Rightarrow$  define radiales  $\equiv$  aerovías

(líneas poligonales por las que se navega "en ruta")

Sistema standard de navegación aérea desde 1949



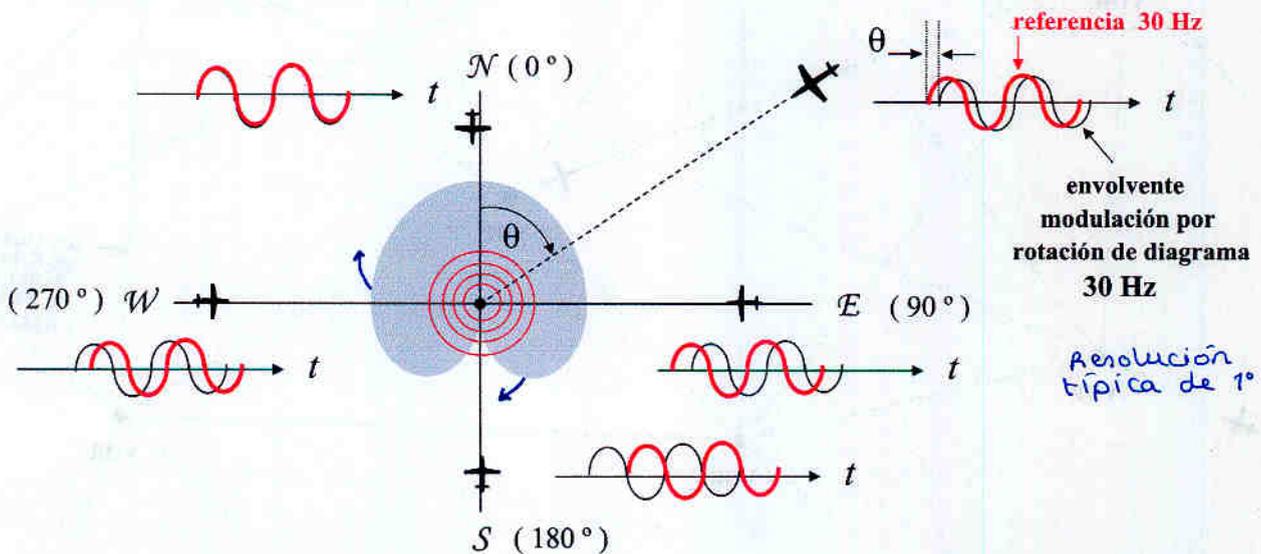


$f_0$  entre 108 – 118 MHz (200 canales)

La estación en tierra radia con un diagrama cardioide que gira a 30 r.p.s. <sup>eléctricamente</sup> produciendo una modulación de 30 Hz cuya fase dependerá de la dirección del receptor al VOR

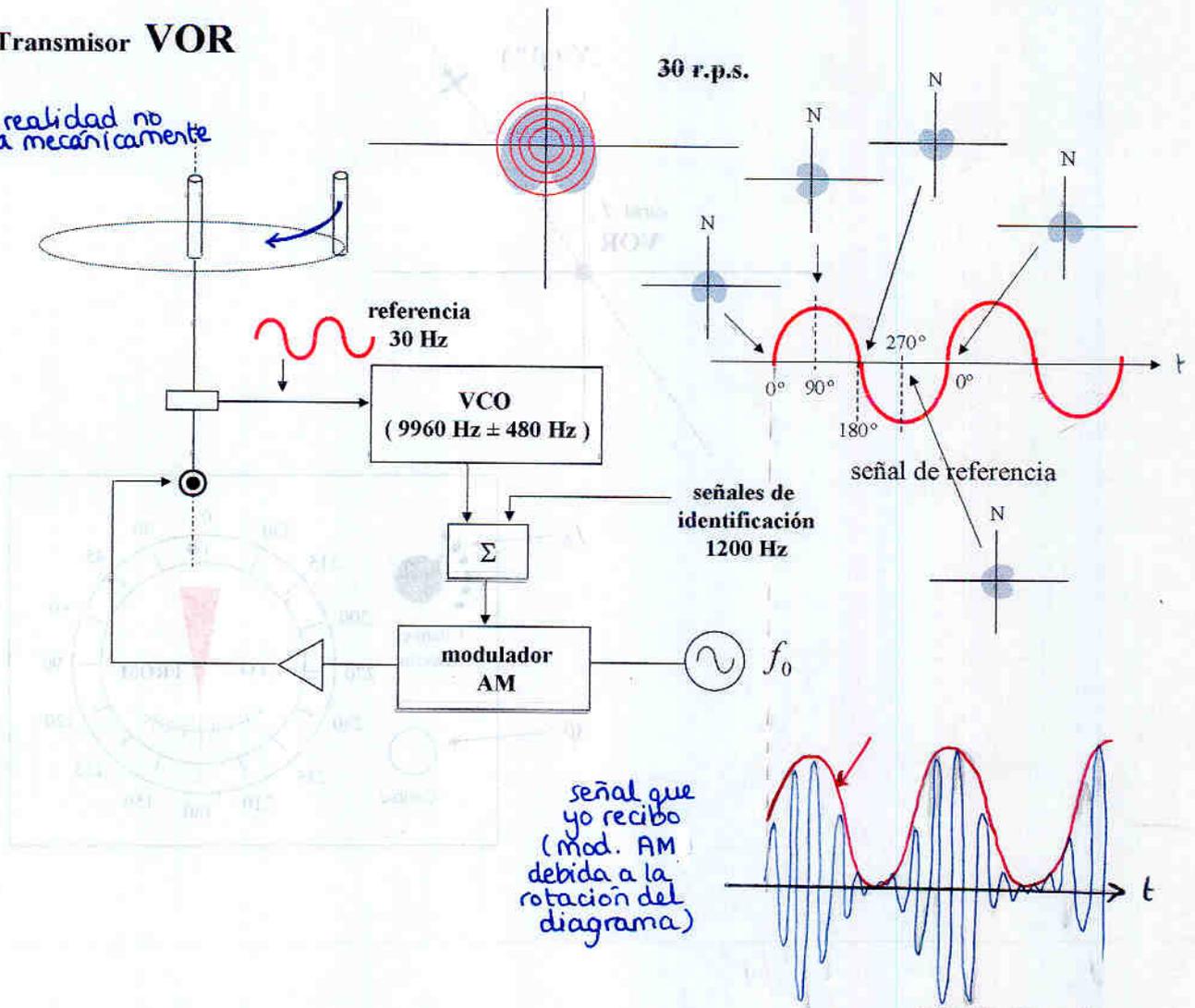
La referencia de fase se transmite modulando en frecuencia (a 30 Hz) una subportadora de 9960 Hz ( $\Delta f = \pm 480$  Hz) <sup>FM</sup>

*fase de la referencia = 0° cuando la antena apunta al norte*

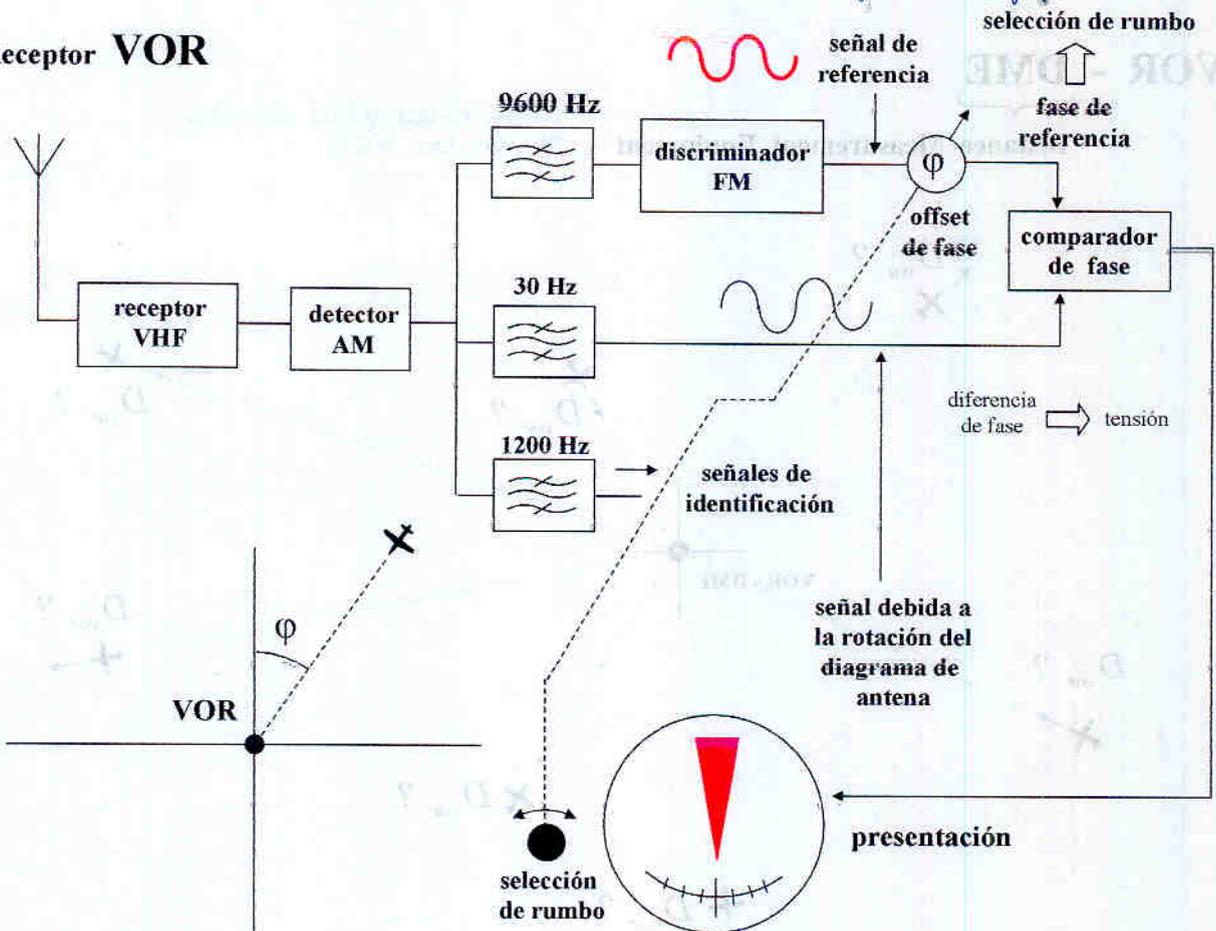


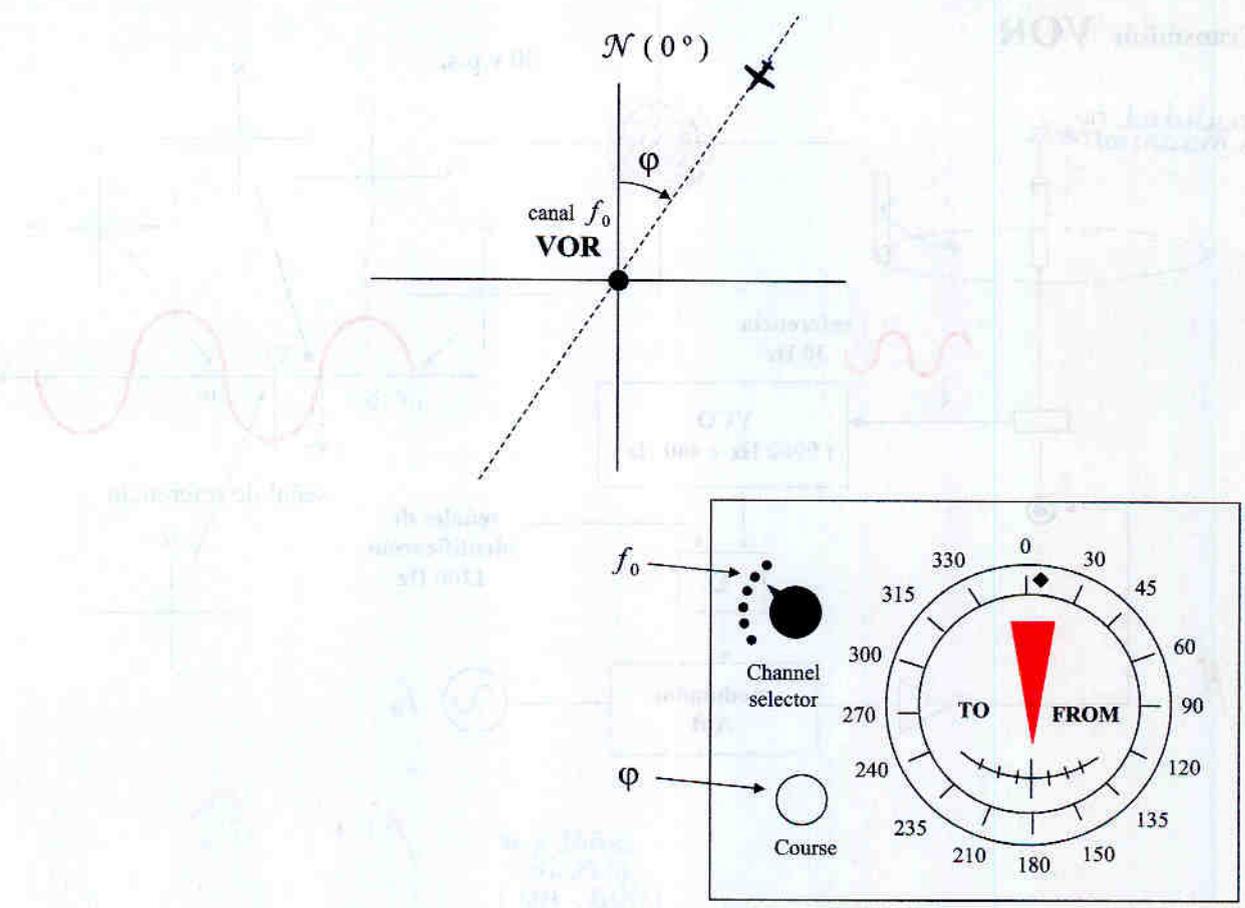
# Transmisor VOR

en realidad no gira mecánicamente



# Receptor VOR

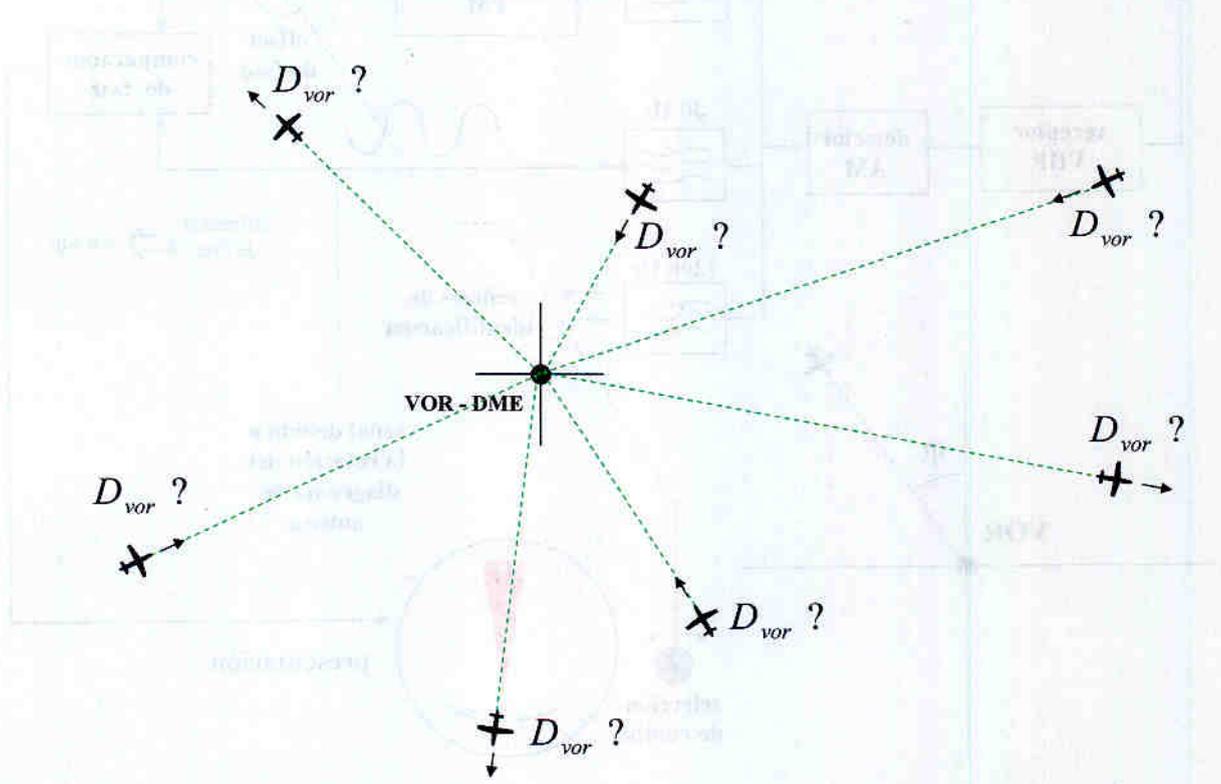


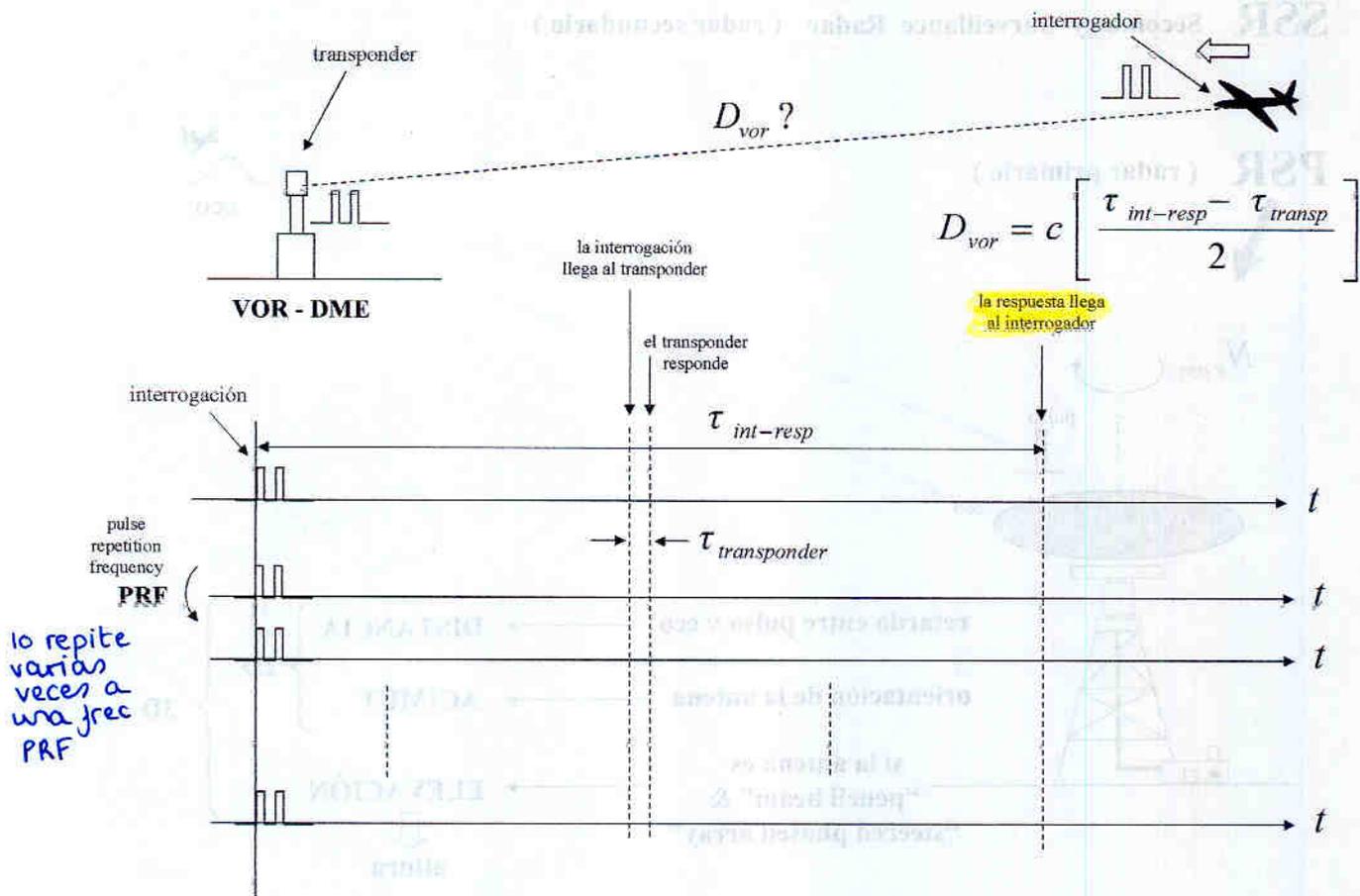


## VOR - DME

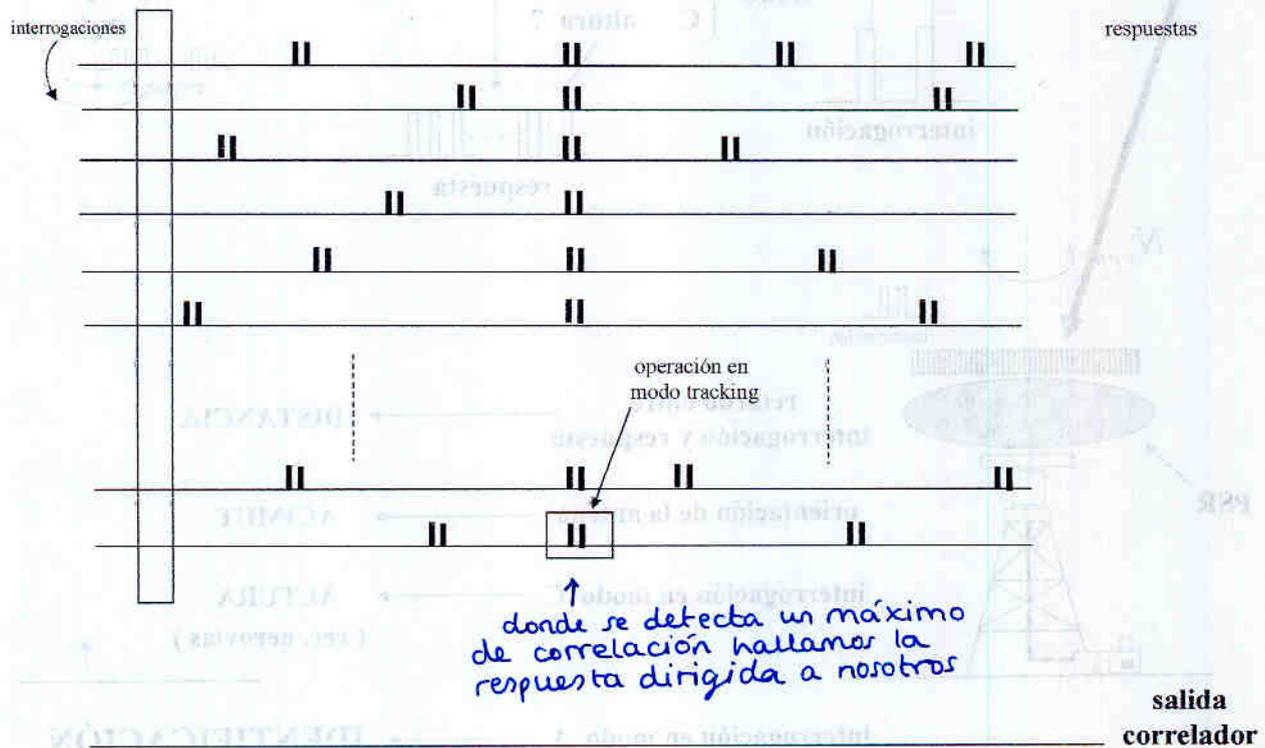
Distance Measurement Equipment

*suele estar allá donde estan los VOR*



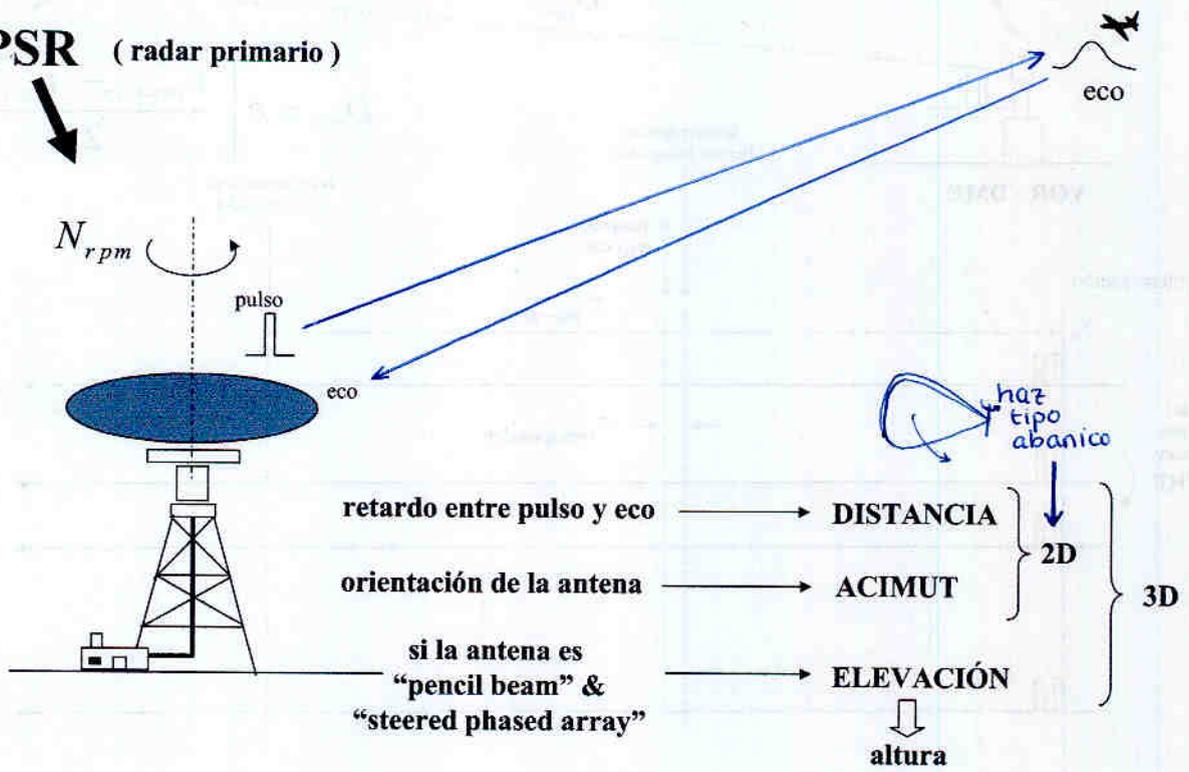


El DME da servicio a todo aquel que le interroga  
 ¿ Como identificamos las respuestas a nuestras interrogaciones ?

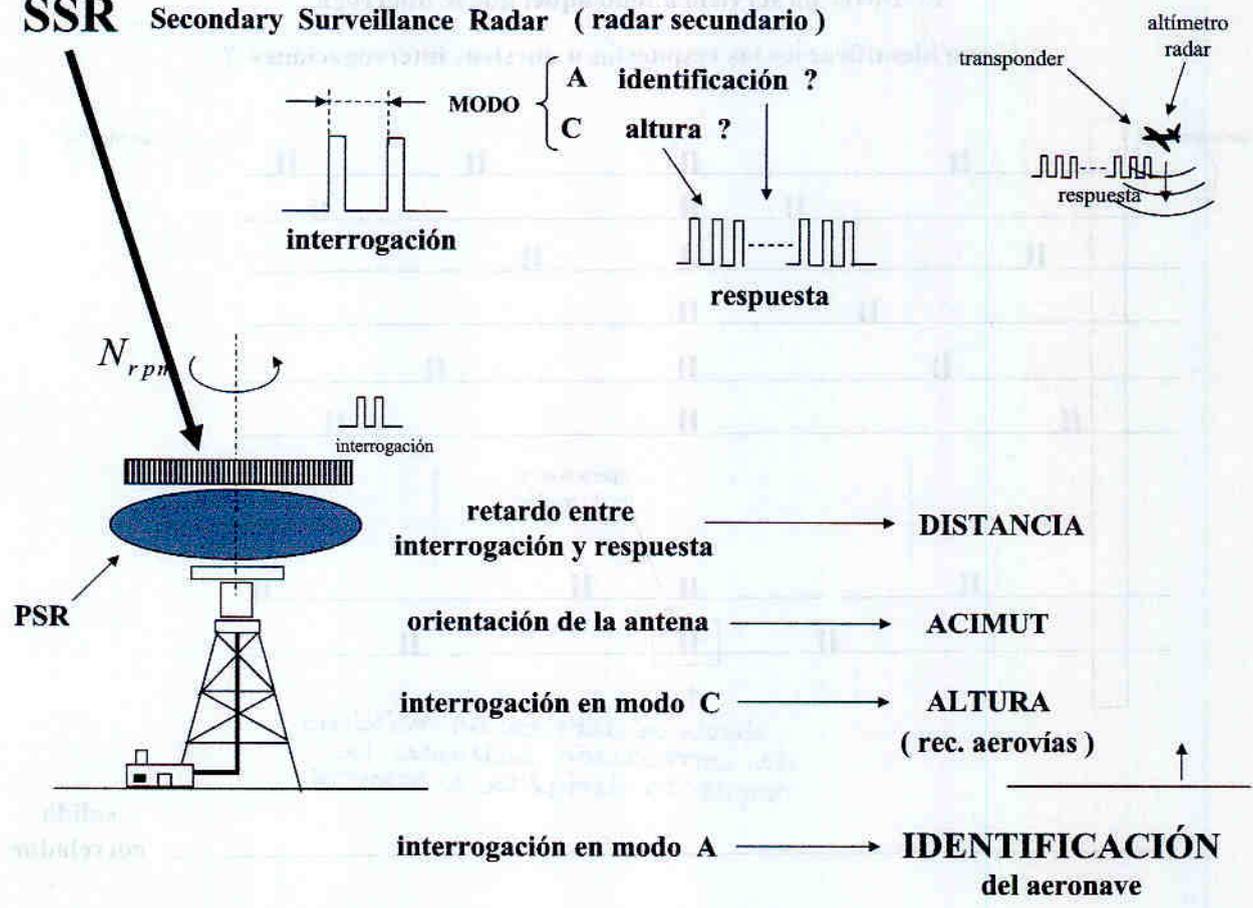


**SSR Secondary Surveillance Radar ( radar secundario )**

**PSR ( radar primario )**



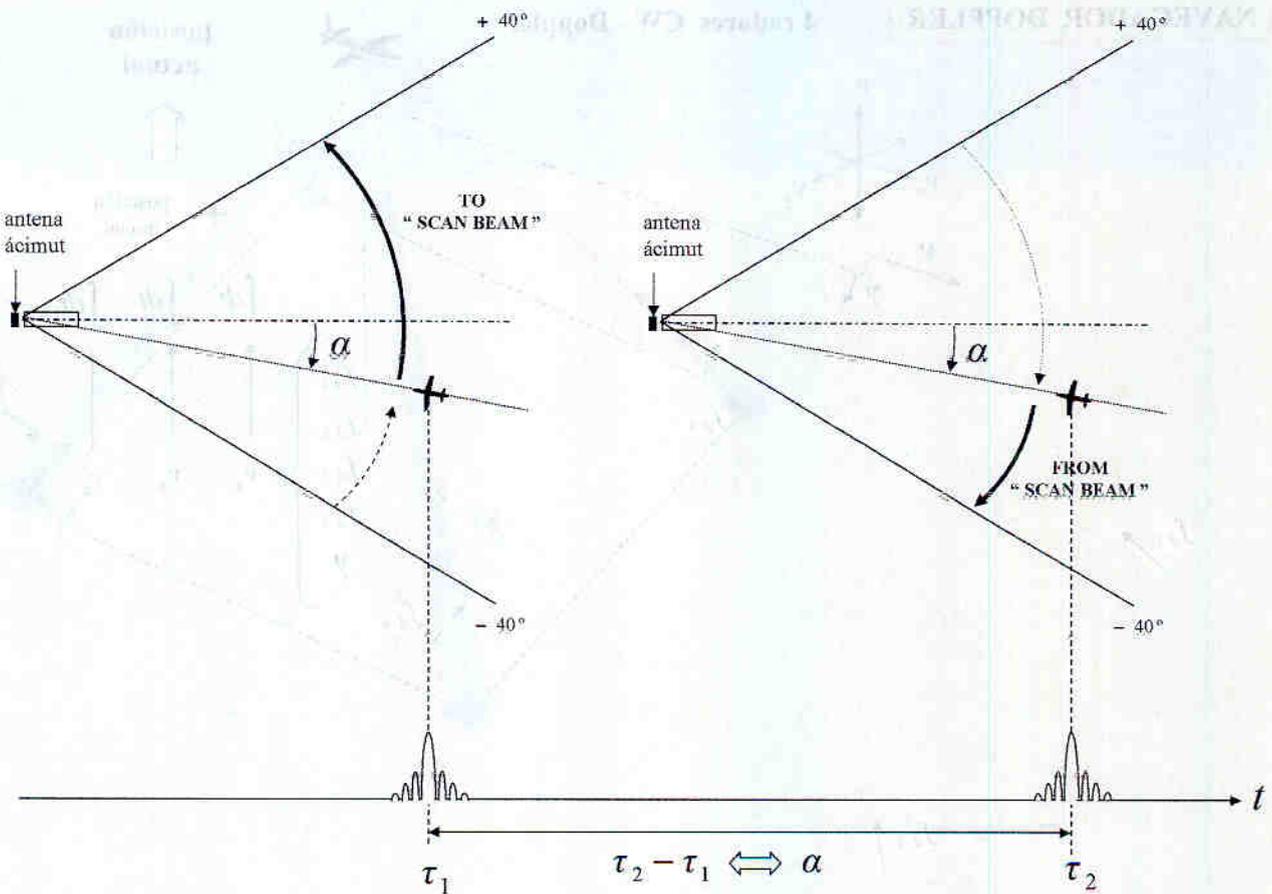
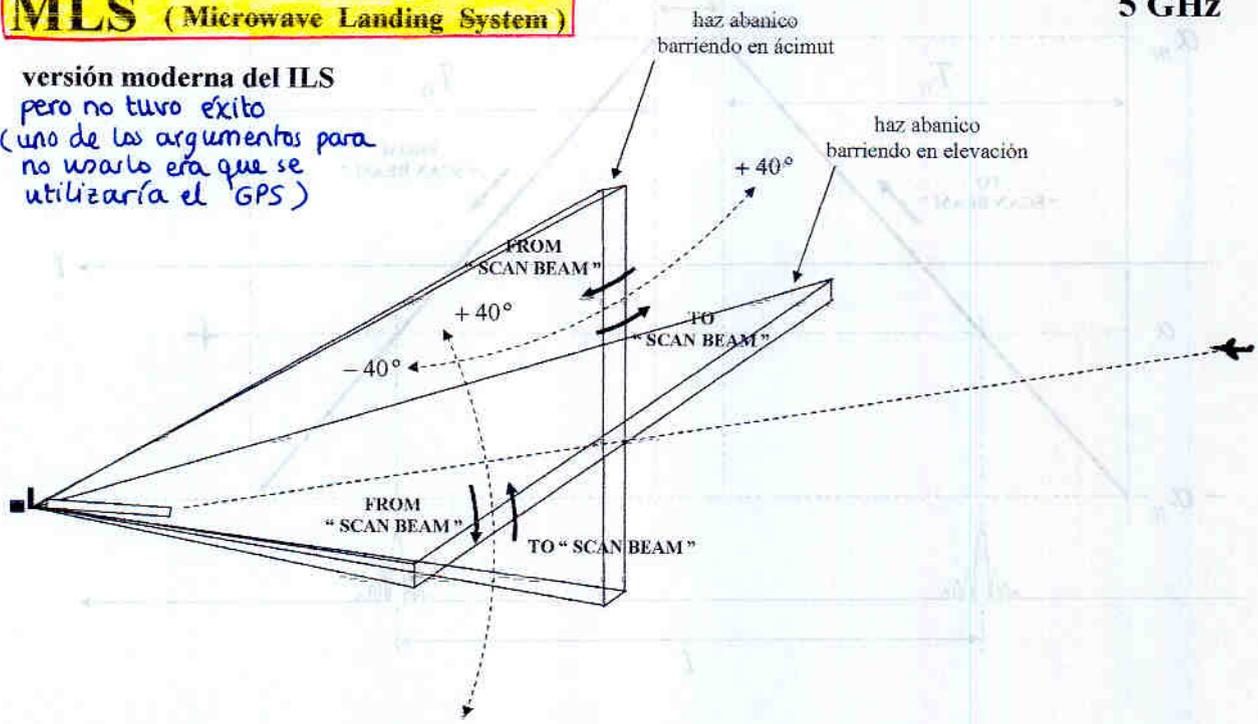
**SSR Secondary Surveillance Radar ( radar secundario )**

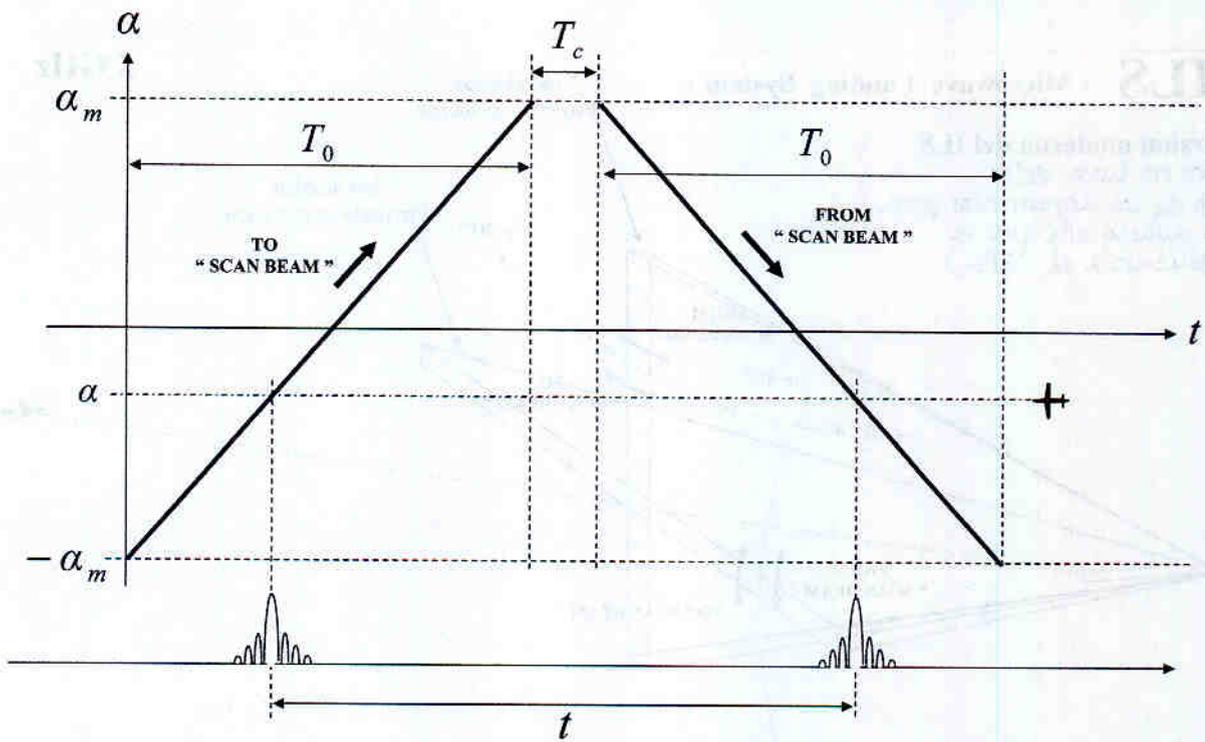


# MLS (Microwave Landing System)

5 GHz

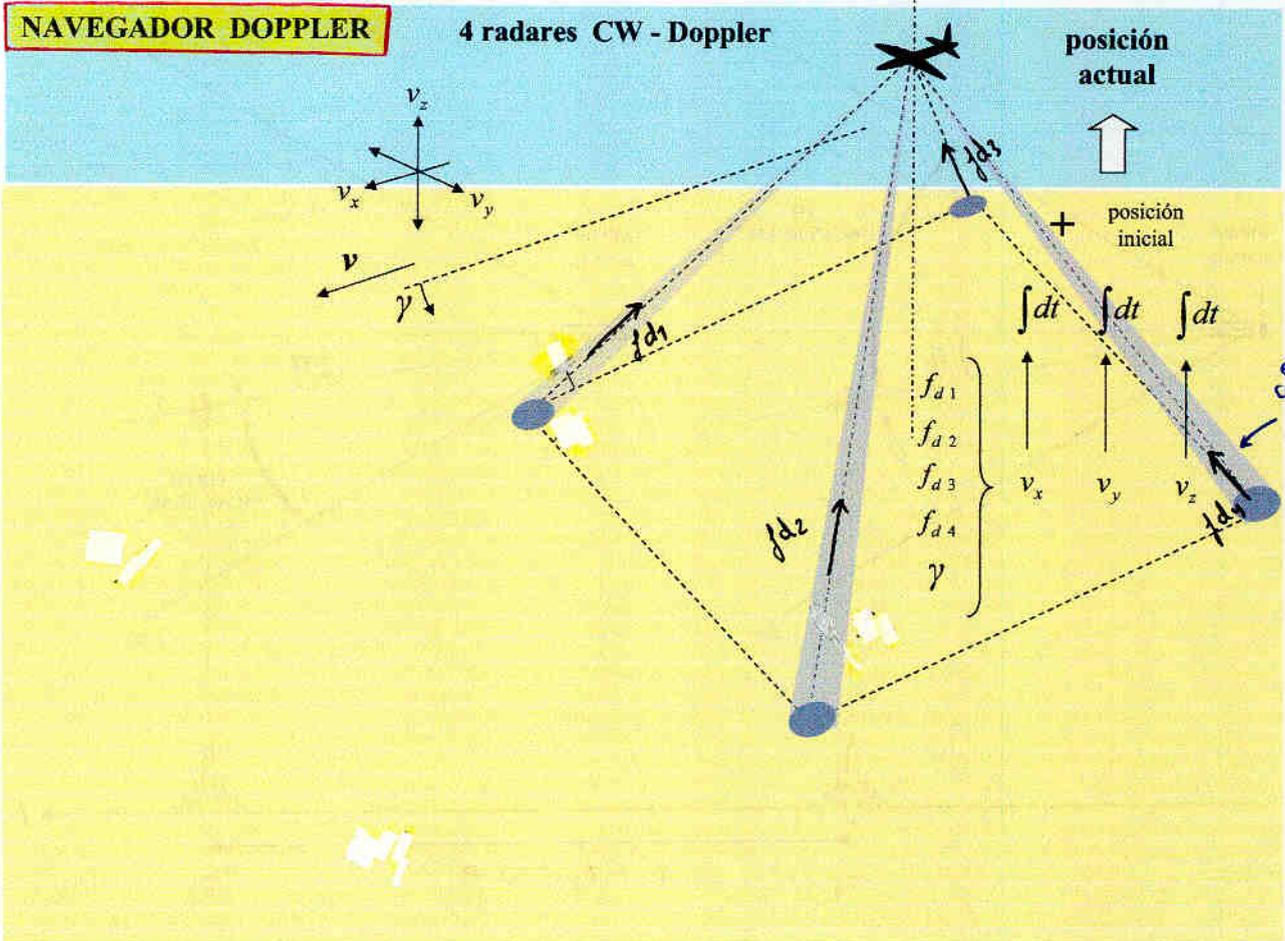
versión moderna del ILS  
pero no tuvo éxito  
(uno de los argumentos para  
no usarlo era que se  
utilizaría el GPS)





$$\alpha = \frac{\alpha_m}{T_0} [t - (T_0 + T_c)]$$

(sistema a la estima)



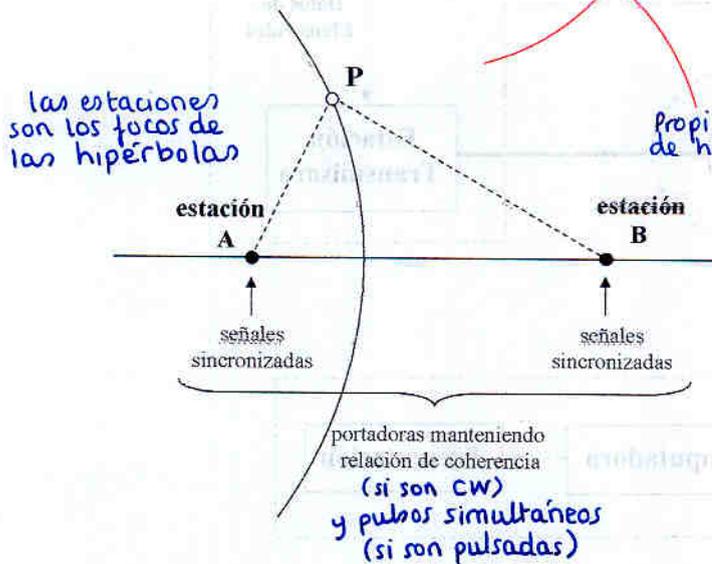
Ya en desuso  
Solo queda el LORAN-C

## SISTEMAS de NAVEGACIÓN HIPERBÓLICOS

Proporcionan 2 líneas de posición hiperbólicas sobre las que se encuentra el receptor.

La posición es el punto de intersección.

Propiedad de las hipérbolas



retardo (LORAN) (pulsado)  
diferencia de fase (OMEGA) (CW)

Diferencia de caminos constante

$$\overline{PA} - \overline{PB} = \text{cte}$$

Actualmente, todavía operativo

LORAN C (100 kHz)

midiendo el retardo o diferencia de fase, sabré en qué hipérbola me encuentro

## SISTEMAS de NAVEGACIÓN por SATÉLITE

En los sistemas terrenos, la elección de la frecuencia es un compromiso entre

precisión

cobertura

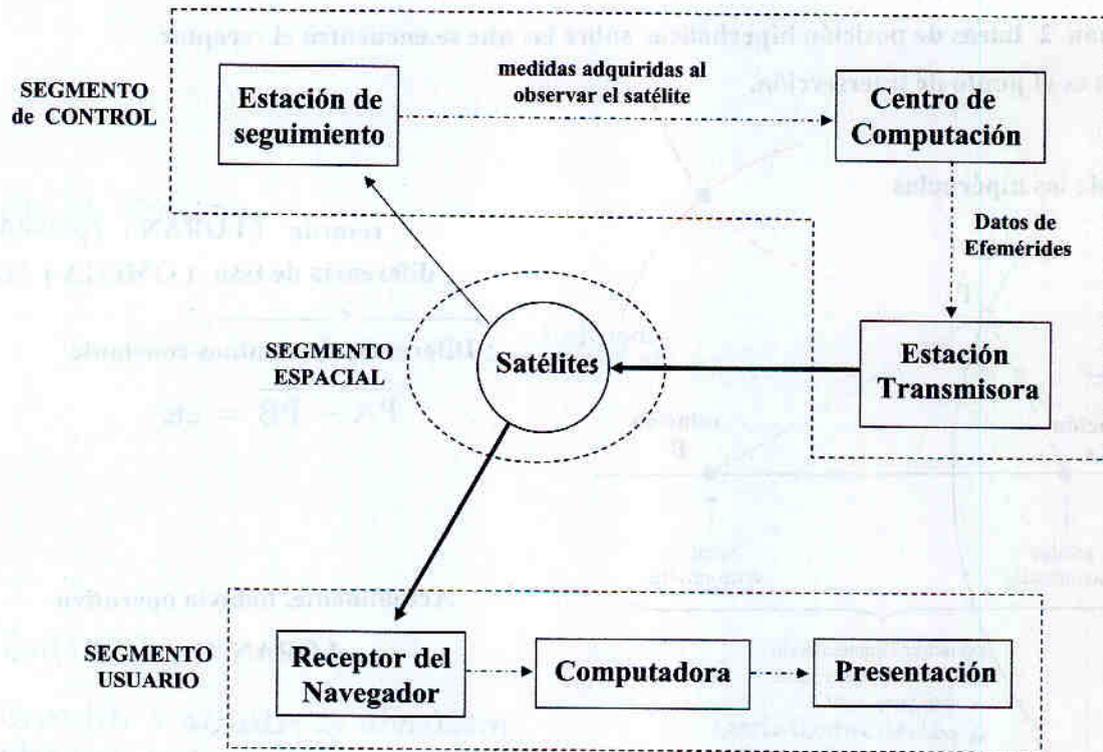
$f \uparrow \longrightarrow$  precisión  $\uparrow$  cobertura  $\downarrow$   
 $f \downarrow \longrightarrow$  precisión  $\downarrow$  cobertura  $\uparrow$

Un satélite permite grandes coberturas en visibilidad directa y elección de frecuencias VHF o UHF  $\implies$  precisión elevada

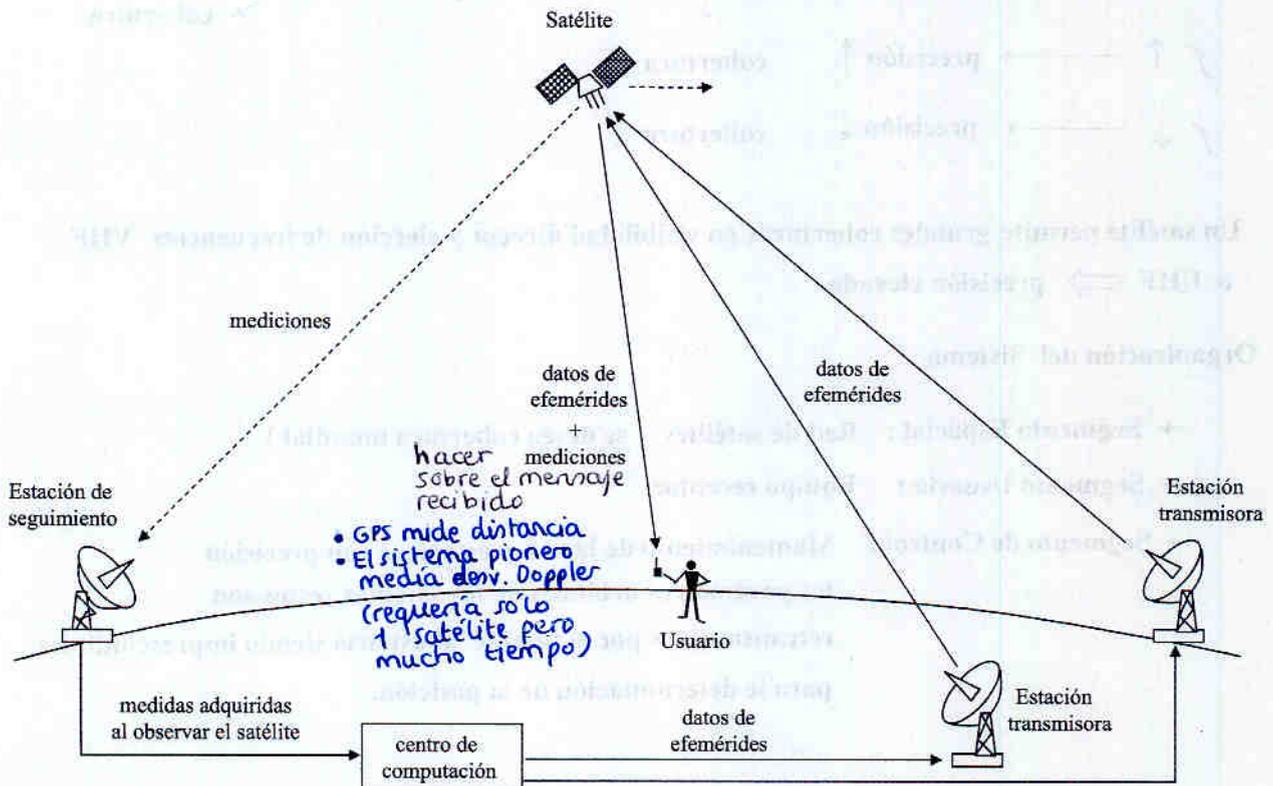
Organización del Sistema :

- Segmento Espacial : Red de satélites ( se desea cobertura mundial )
- Segmento Usuario : Equipo receptor
- Segmento de Control : Mantenimiento de la red y establece con precisión los parámetros orbitales de los satélites , estos son retransmitidos por el satélite al usuario siendo imprescindibles para la determinación de la posición.

## Diagrama de Bloques Generalizado de un SISTEMA de NAVEGACIÓN por SATÉLITE



## SISTEMA de NAVEGACIÓN por SATÉLITE



**SISTEMA TRANSIT ( NNSS : Navy Navigatón Satellite System )**

Red de 6 satélites en órbitas polares.

La posición se determina midiendo el desplazamiento Doppler de dos portadoras

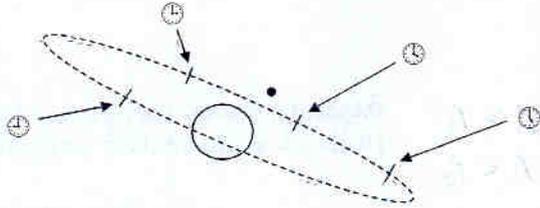
400 MHz

150 MHz

2 frec. para hacer una corrección del efecto de la ionosfera

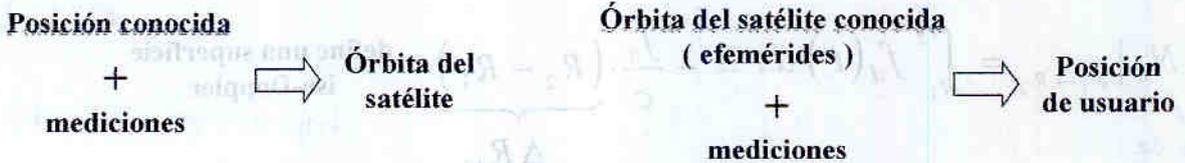
Historia :

1957 la URSS lanza el primer satélite SPUTNIK



USA determina con precisión su órbita observando el desplazamiento Doppler de su emisión a 20 MHz

1958 se diseña el sistema TRANSIT planteando el problema a la inversa

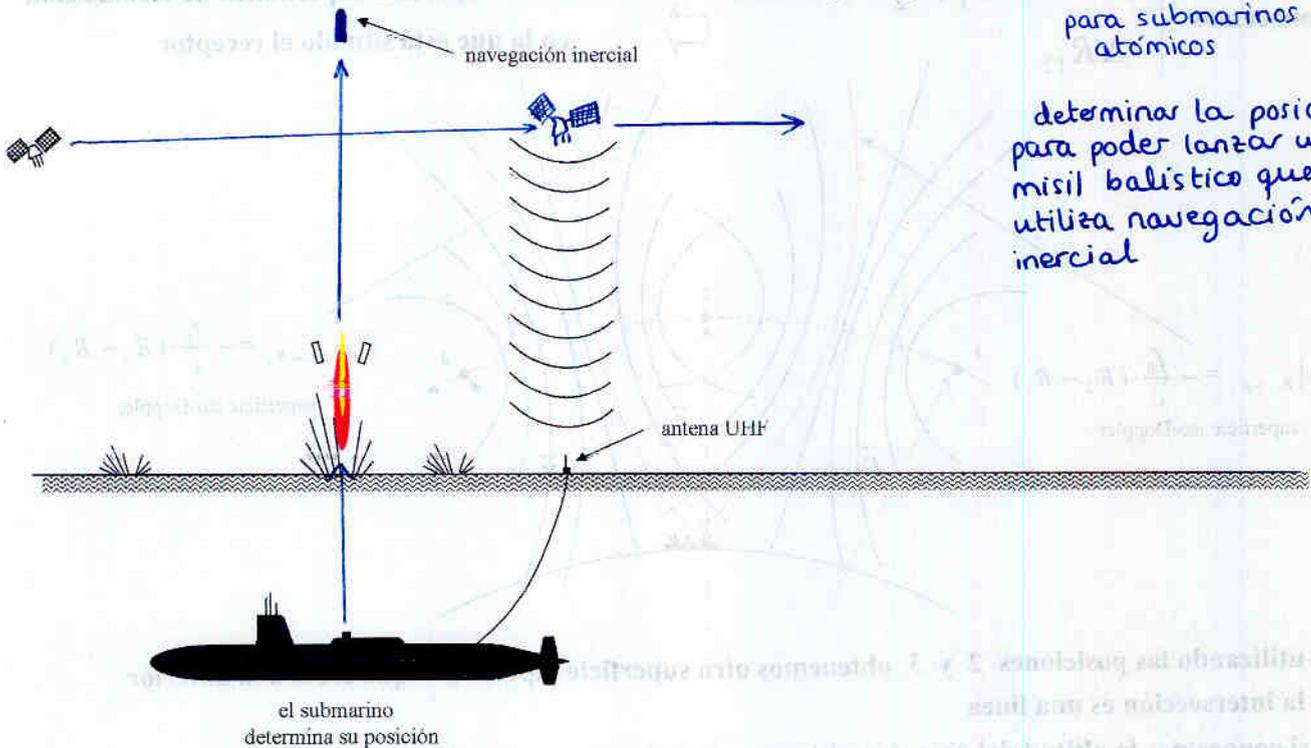


1960 - 1964 se lanzan 10 satélites TRANSIT

Cual era el principal interés ?

militar para submarinos atómicos

determinar la posición para poder lanzar un misil balístico que utiliza navegación inercial

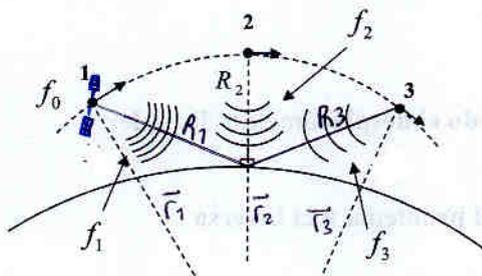


1967 parte del sistema se desclasifica para uso civil

1968 primeros receptores comerciales

### Determinación de la Posición

A partir de la medida del desplazamiento Doppler se definen superficies de posición hiperbólicas  
**superficies iso-Doppler**



$f_1 > f_2$   
 $f_3 < f_2$   
 depende de la componente radial del vector velocidad

$$f_d = f_r - f_0 = -\frac{f_0}{c} \cdot \frac{dR}{dt}$$

radio vector: desde el centro de la tierra hasta el satélite

el número de ciclos Doppler entre 1 y 2 es



número de ciclos Doppler entre 1 y 2

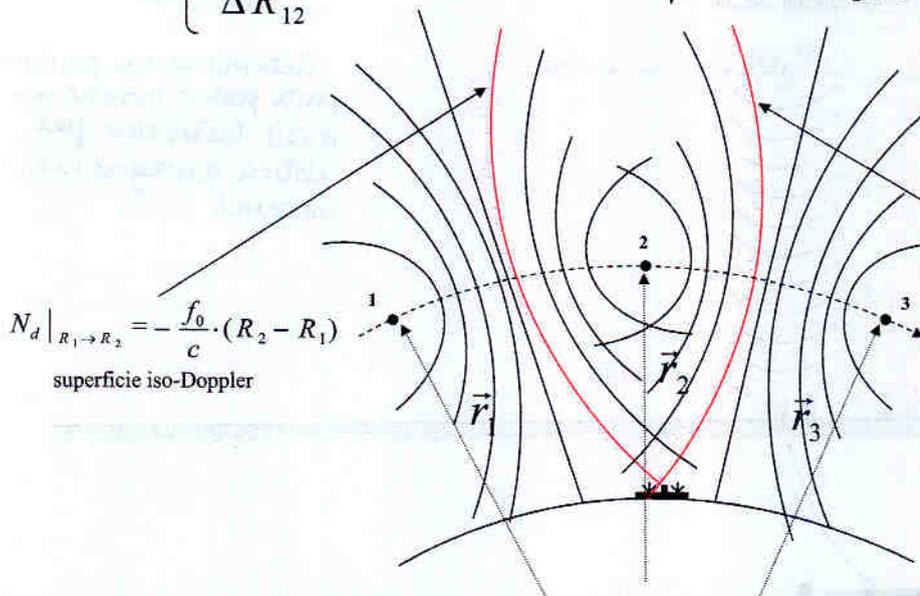
$$N_d |_{R_1 \rightarrow R_2} = \int_{t_1}^{t_2} f_d(t) dt = -\frac{f_0}{c} \cdot (R_2 - R_1)$$

define una superficie iso-Doppler (hoja de hipérbola - 3D)

el satélite me transmite R (él conoce su órbita)

me las transmite el satélite

conocemos  $\left\{ \begin{array}{l} \text{posiciones } \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ del satélite} \\ \Delta R_{12} \end{array} \right.$   $\Rightarrow$  definen una superficie hiperbólica de localización en la que está situado el receptor



$$N_d |_{R_1 \rightarrow R_2} = -\frac{f_0}{c} \cdot (R_2 - R_1)$$

superficie iso-Doppler

$$N_d |_{R_2 \rightarrow R_3} = -\frac{f_0}{c} \cdot (R_3 - R_2)$$

superficie iso-Doppler

utilizando las posiciones 2 y 3 obtenemos otra superficie hiperbólica que corta a la anterior la intersección es una línea

si conocemos la altitud del receptor obtenemos una tercera superficie de posición (esfera concéntrica a la tierra)

La intersección de las tres superficies proporciona la posición

# NAVSTAR GPS (Global Positioning System)

Permite el posicionamiento mediante la medida de la distancia de 3 ó 4 satélites.

Consta de una red de 24 satélites en 6 planos orbitales transmitiendo en banda L  
*(en órbita pueden haber más, esperando entrar si se estropea uno)*

## Historia :

En 1970 las fuerzas navales y aéreas americanas desarrollan 2 programas para suceder al TRANSIT

### - TIMATION

(NLR ≡ Naval Research Laboratory)

### - PROJECT 621 B

(US. Air Force)

1973 JOIN PROGRAMME OFFICE

toma ambos programas como base para definir el sistema NAVSTAR

*si salían bien ambos proyectos, se pensaría que el GPS es viable, y se iniciaría el proyecto.  
Eran la "prueba de fuego"*

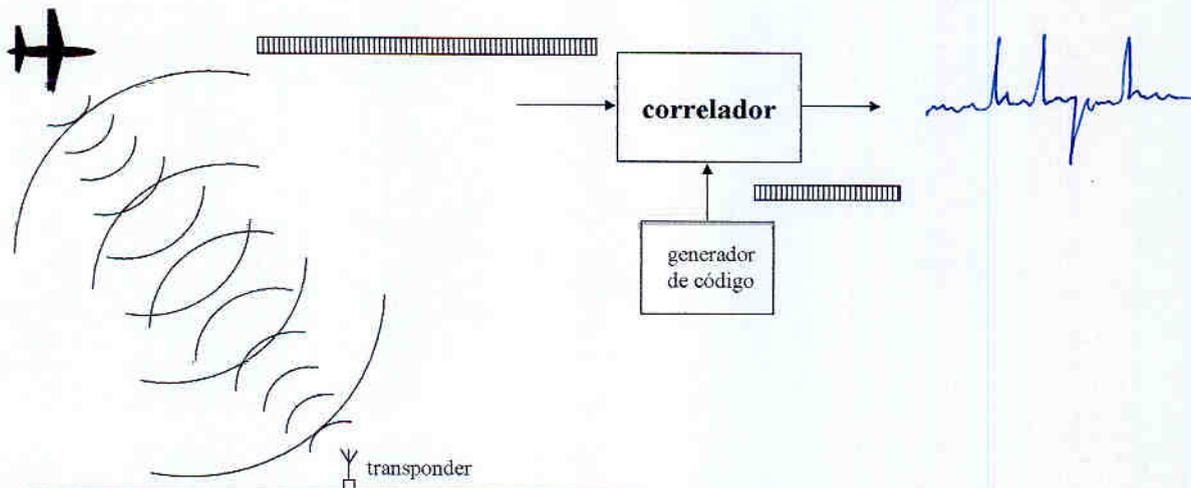
## TIMATION

se ensaya el uso de patrones de tiempo y frecuencia a bordo de satélites

- Cuarzo *(no eran suficientemente precisos)*
- Relojes atómicos (AFS ≡ Atomic Frequency Standard)

## PROJECT 621 B

se ensayan los códigos pseudoaleatorios emitidos desde transponders en tierra  
*(se tenía la teoría escrita pero nunca se había hecho)*



se especificó todo en el año 73

Se suceden varias generaciones de satélites :

**Bloque I** desde 1978 hasta 1985 10 satélites + 1 fallo

**Bloque II** desde 1989 hasta 1990 9 satélites

**Bloque II A** desde 1990 hasta 1993 15 satélites

época de crisis, casi lo cancelaron

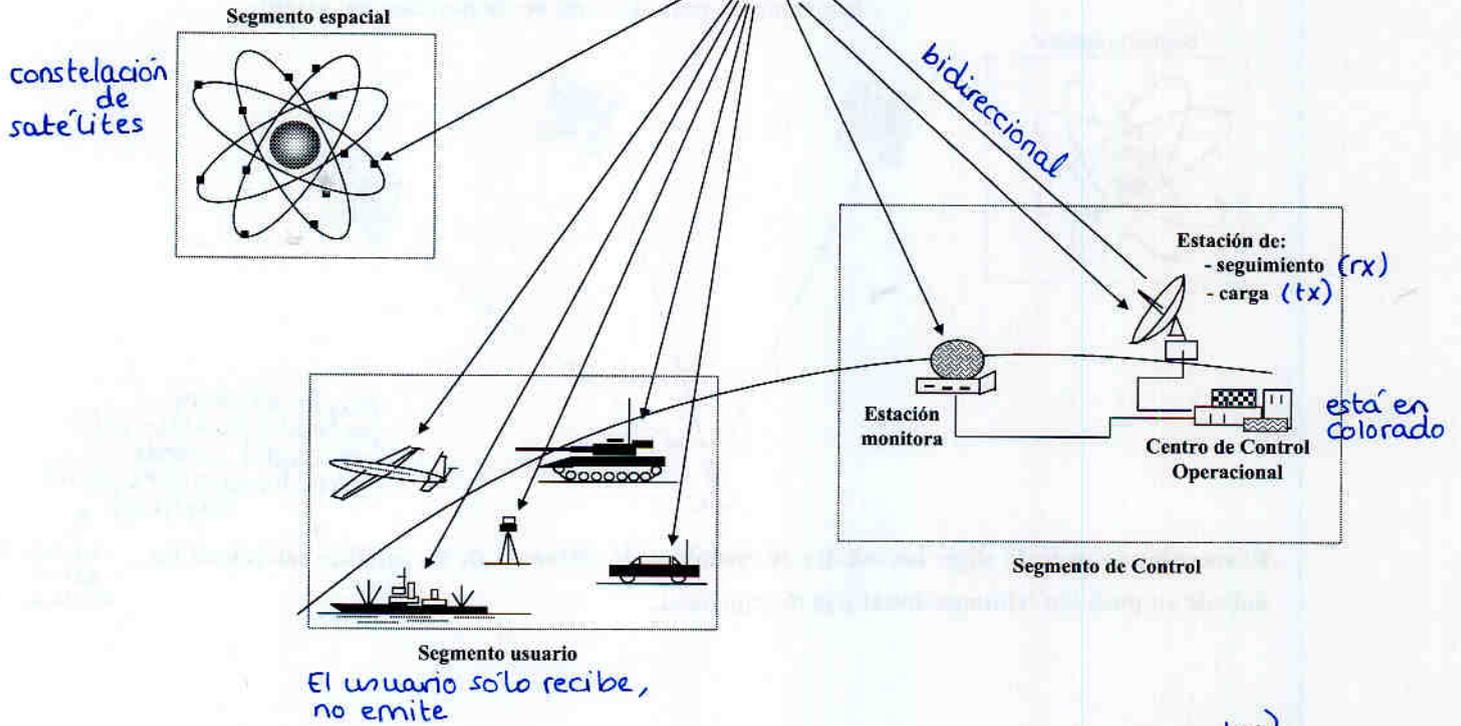
-----  
-----  
**Actualmente el sistema funciona con 4 satélites por órbita**

( 6 x 4 = 24 satélites + repuesto en cada órbita )



# INTRODUCCIÓN AL G.P.S.

Consiste en 3 segmentos {  
Espacial  
Control  
Usuario

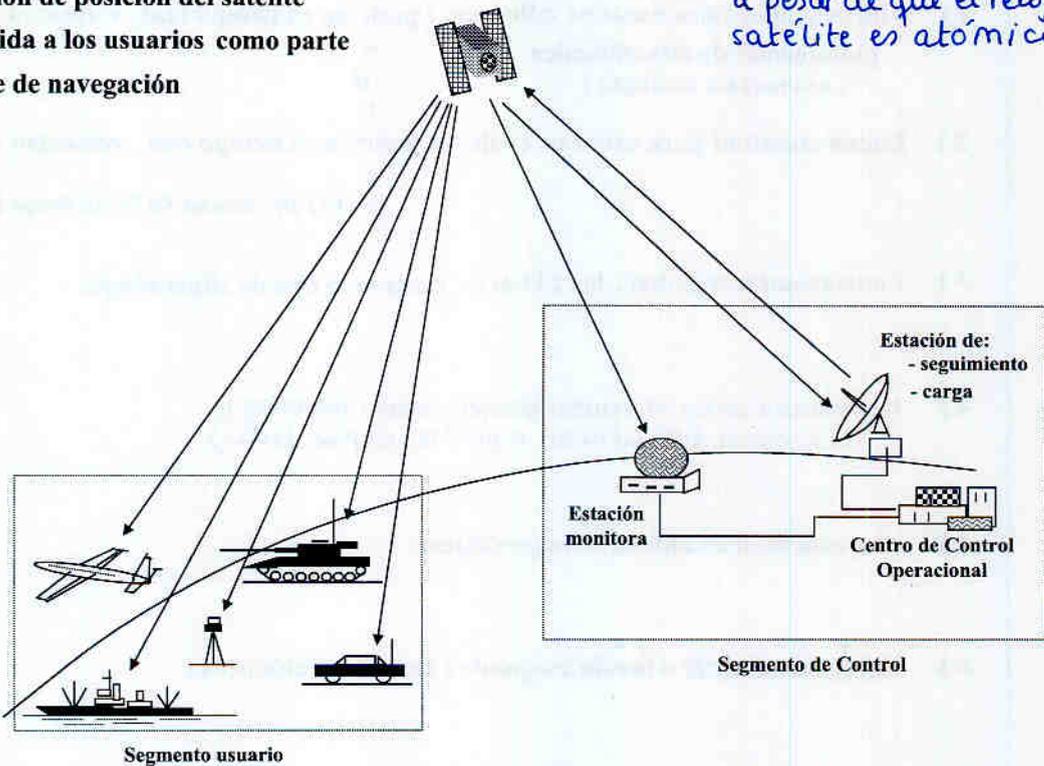


*modelo de órbita (Kepler) parámetros de efemérides*

El segmento de control sigue a cada satélite **efemérides**  
Periódicamente se carga al satélite con la **predicción de posición futura** y correcciones de reloj  
La predicción de posición del satélite es transmitida a los usuarios como parte del mensaje de navegación

*a pesar de que el reloj del satélite es atómico*

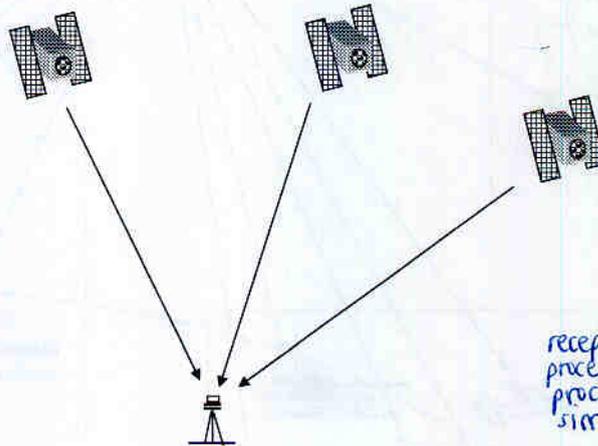
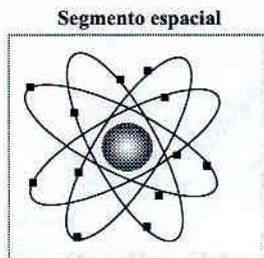
*el usuario tiene un reloj de cuarzo barato y con cierta deriva*



El segmento espacial consiste en 24 satélites repartidos en 6 órbitas

Cada satélite transmite la señal de medida de la distancia " ranging signal " para mandar el mensaje de navegación , el cual contiene :

- corrección del reloj del satélite
- información para determinar la posición del satélite



receptor GPS tiene procesador paralelo (el procesador atiende simultáneamente varios satélites)

inicialmente eran secuenciales

El receptor de usuario sigue las señales de medida de la distancia de los satélites seleccionados, calcula su posición tridimensional y el tiempo local.

### Requerimientos del Sistema G.P.S.

- 1) Alta exactitud para usuarios militares (plataformas de alta dinámica (aviones de combate))  
 $\sigma \leq 10 m$   
↑  
(posición en tiempo real, velocidad y tiempo)  
↓  
3D
- 2) Buena exactitud para usuarios civiles (posición en tiempo real, velocidad y tiempo)  
↑  
 $\approx 100 m$  más del 95 % del tiempo (con SA)
- 3) Funcionamiento global, las 24 horas y con todo tipo de climatología.
- 4) Resistente a las interferencias intencionadas (jamming).  
(la señal GPS utiliza espectro expandido)
- 5) Alta exactitud en aplicaciones geodésicas.
- 6) Equipo de usuario a precio asequible (sin relojes atómicos).

disponibilidad selectiva  
(introducir apostas error en el reloj)  
lo quitaron hace poco

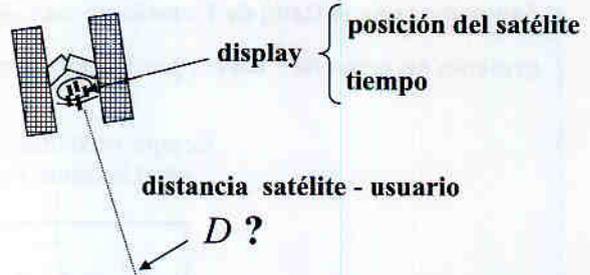
# Principio de posicionamiento en G.P.S.



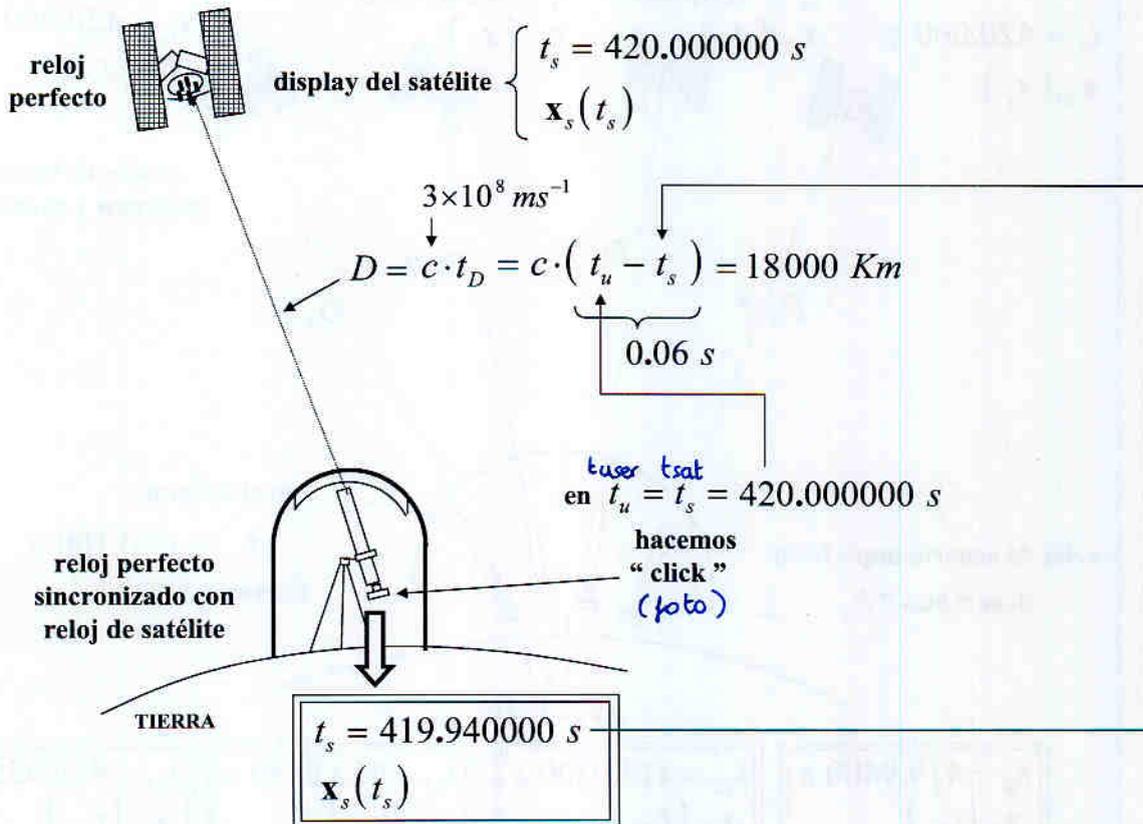
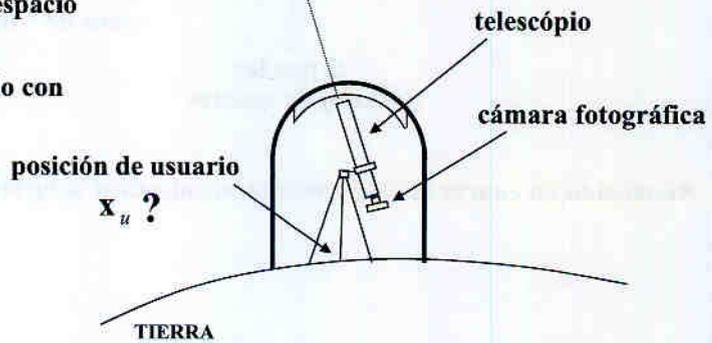
Medida de la distancia a un satélite por parte del usuario.

(ejemplo idealizado basado en un **simil óptico**)

El satélite posee un reloj perfecto y proporciona mediante un "display" información precisa de su posición en función del tiempo

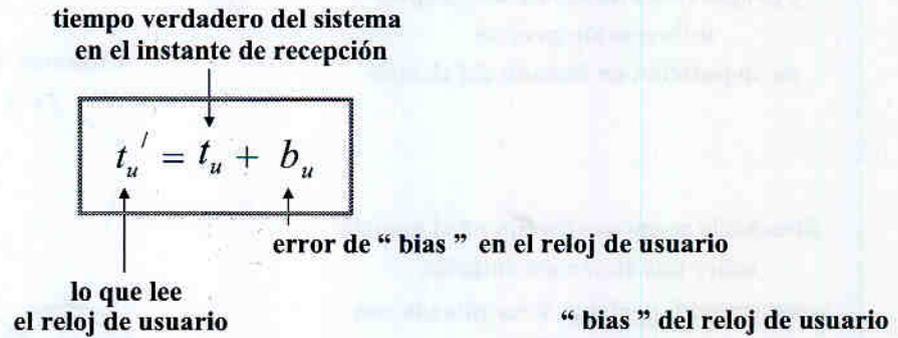


El usuario se encuentra fijo en el espacio sobre una tierra sin rotación y con un reloj perfecto sincronizado con el reloj del satélite



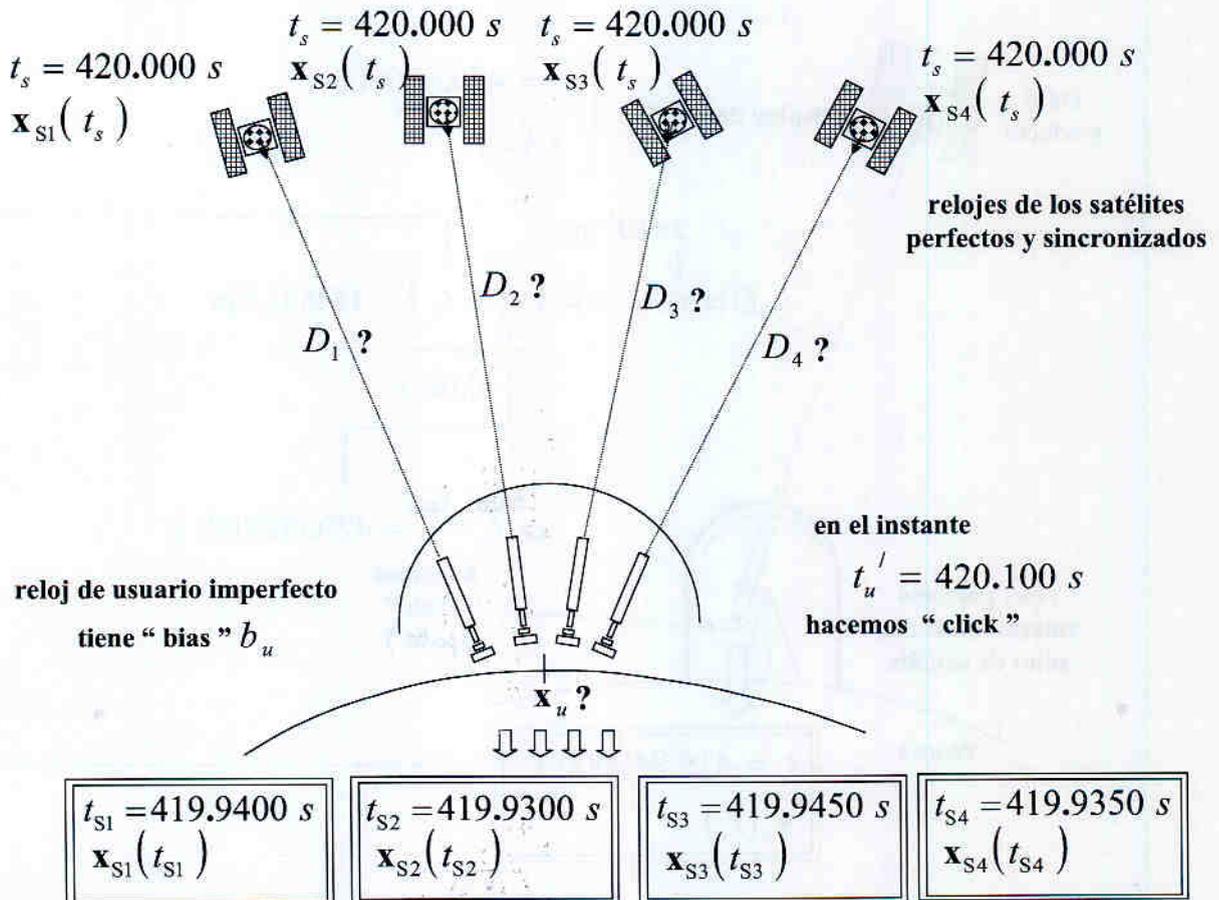
El mismo tipo de medida con **3 satélites simultáneamente**, obtendríamos la posición de usuario en 3D por la **intersección de 3 esferas**.

Asumamos que el Reloj de Usuario no está sincronizado con el tiempo GPS, esto es, presenta un error de "bias", por lo que el reloj de usuario lee  $t_u'$



**Añadiendo un cuarto satélite**, podremos encontrar solución para  $\mathbf{x}_u(t_u)$  y  $b_u$

posición de usuario en instante de recepción



$$t_{S1} = 419.9400 \text{ s}$$

$$\mathbf{x}_{S1}(t_{S1})$$

$$t_{S2} = 419.9300 \text{ s}$$

$$\mathbf{x}_{S2}(t_{S2})$$

$$t_{S3} = 419.9450 \text{ s}$$

$$\mathbf{x}_{S3}(t_{S3})$$

$$t_{S4} = 419.9350 \text{ s}$$

$$\mathbf{x}_{S4}(t_{S4})$$

$$t_u' = 420.100 \text{ s}$$

~~ecuaciones de las distancias~~  
ecuaciones de las pseudodistancias

tiempo verdadero del sistema en el instante de recepción  
tiempo verdadero del sistema en el instante de transmisión

*pseudo*

$$ps D_1 = (t_u' - t_{S1}) \cdot c = \underbrace{(t_u - t_{S1}) \cdot c}_{D_1} + b_u \cdot c$$

$$ps D_2 = (t_u' - t_{S2}) \cdot c = \underbrace{(t_u - t_{S2}) \cdot c}_{D_2} + b_u \cdot c$$

$$ps D_3 = (t_u' - t_{S3}) \cdot c = \underbrace{(t_u - t_{S3}) \cdot c}_{D_3} + b_u \cdot c$$

$$ps D_4 = (t_u' - t_{S4}) \cdot c = \underbrace{(t_u - t_{S4}) \cdot c}_{D_4} + b_u \cdot c$$

vayamos olvidando el símil óptico !!

posición de usuario  
 $\mathbf{x}_u$   
 $b_u$   
"bias" de reloj de usuario

Reloj de usuario no sincronizado  $\equiv$  tiene "bias"



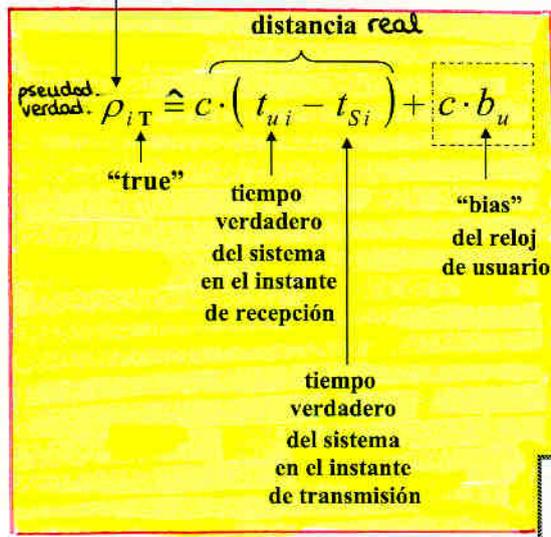
la diferencia de tiempos no marca la distancia, sino la PSEUDODISTANCIA

Pseudo distancia medida;

estará afectada por muchas cosas

Para el  $i$ -ésimo satélite tendremos:

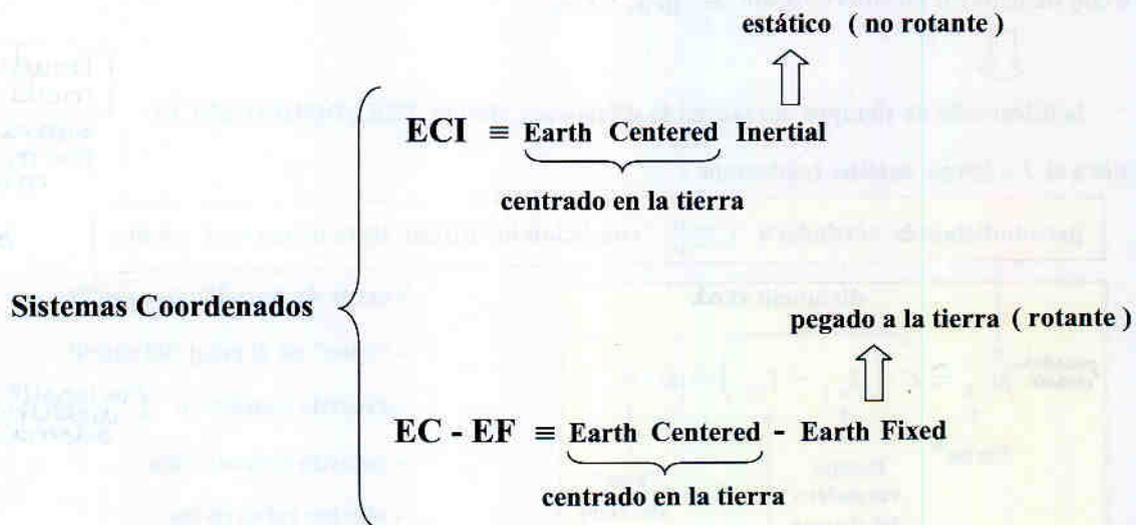
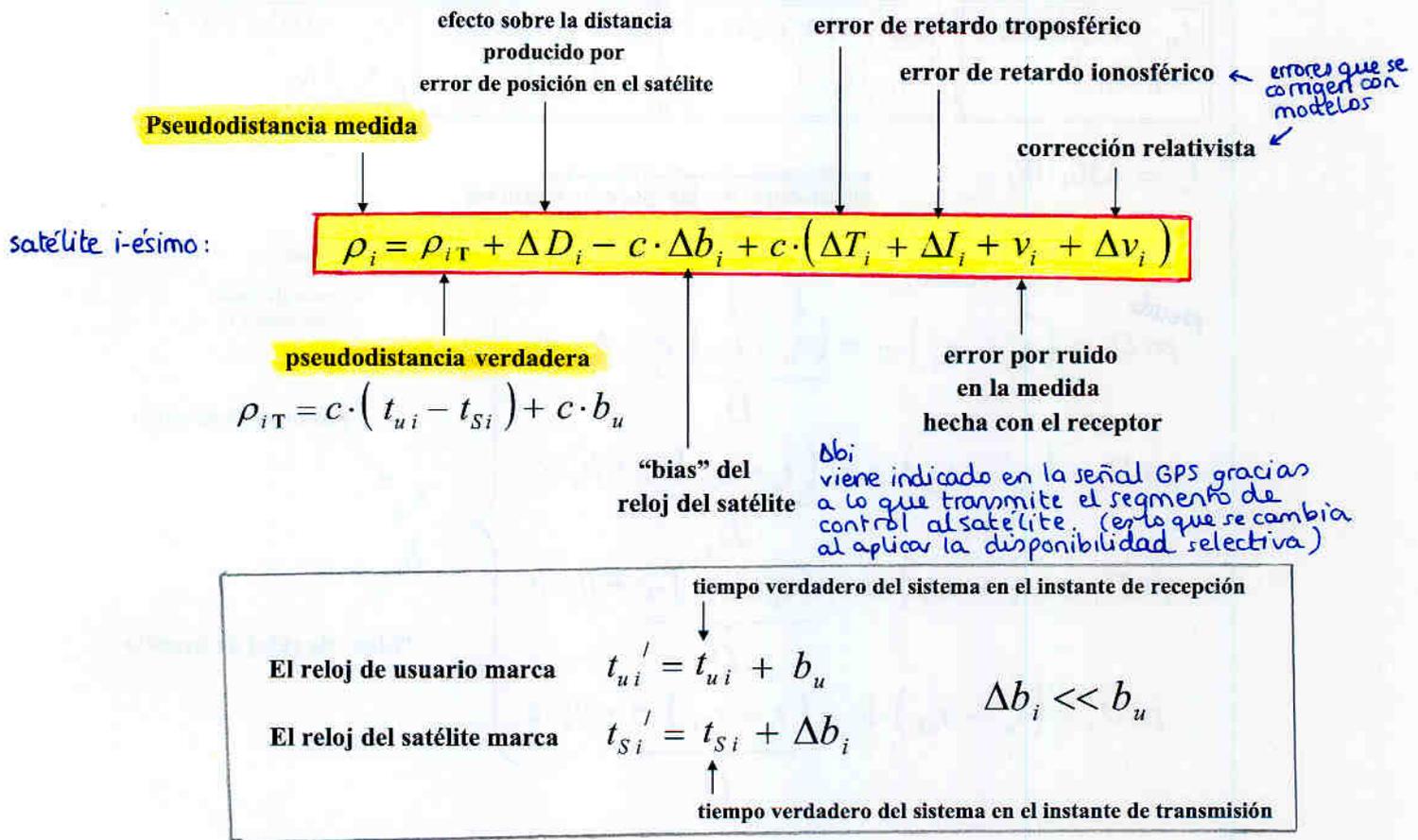
pseudodistancia verdadera  $\rightarrow$  condición idealizada libre de errores como:



- error de posición del satélite
- "bias" en el reloj del satélite
- retardo ionosférico (la ionosfera es un dieléctrico que además varía)
- retardo troposférico
- efectos relativistas
- ruido introducido por equipos
- etc...

pseudodistancia verdadera

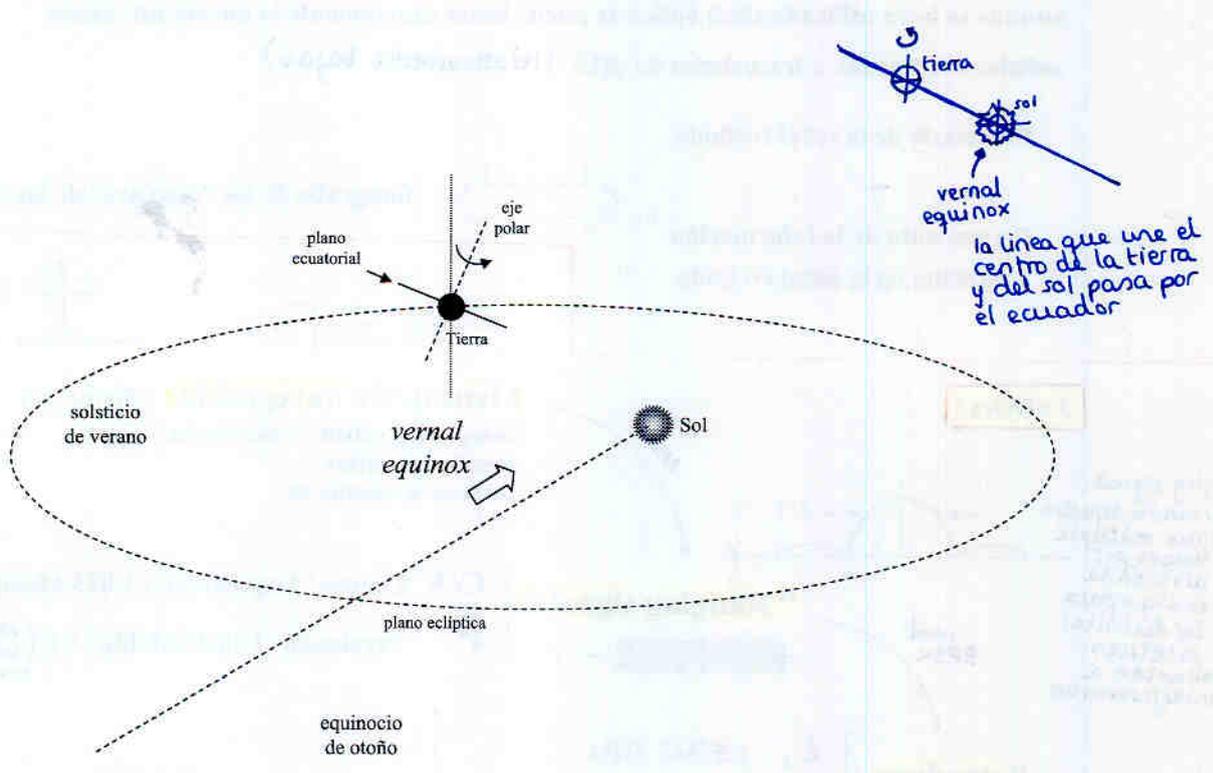
$$\rho_{iT} = c \cdot (t_{ui} - t_{Si}) + c \cdot b_u$$



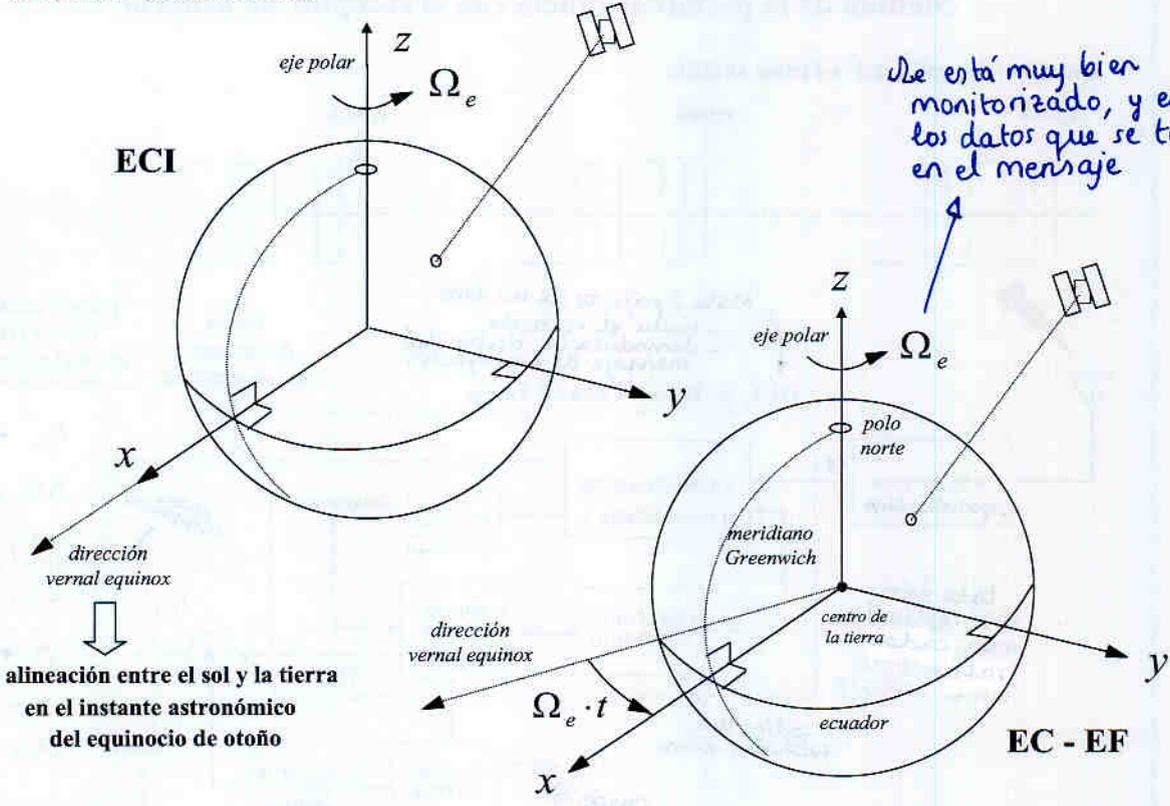
La posición de un satélite en su órbita la obtendremos a partir del mensaje de navegación emitido por el propio satélite y estará referida a un **ECI**

Teniendo en cuenta la rotación terrestre la referiremos a un **EC - EF**

La posición de usuario estará referida a un **EC - EF**



**Sistemas Coordinados**



alineación entre el sol y la tierra en el instante astronómico del equinocio de otoño

$\Omega_e \cdot t$

**EC - EF**

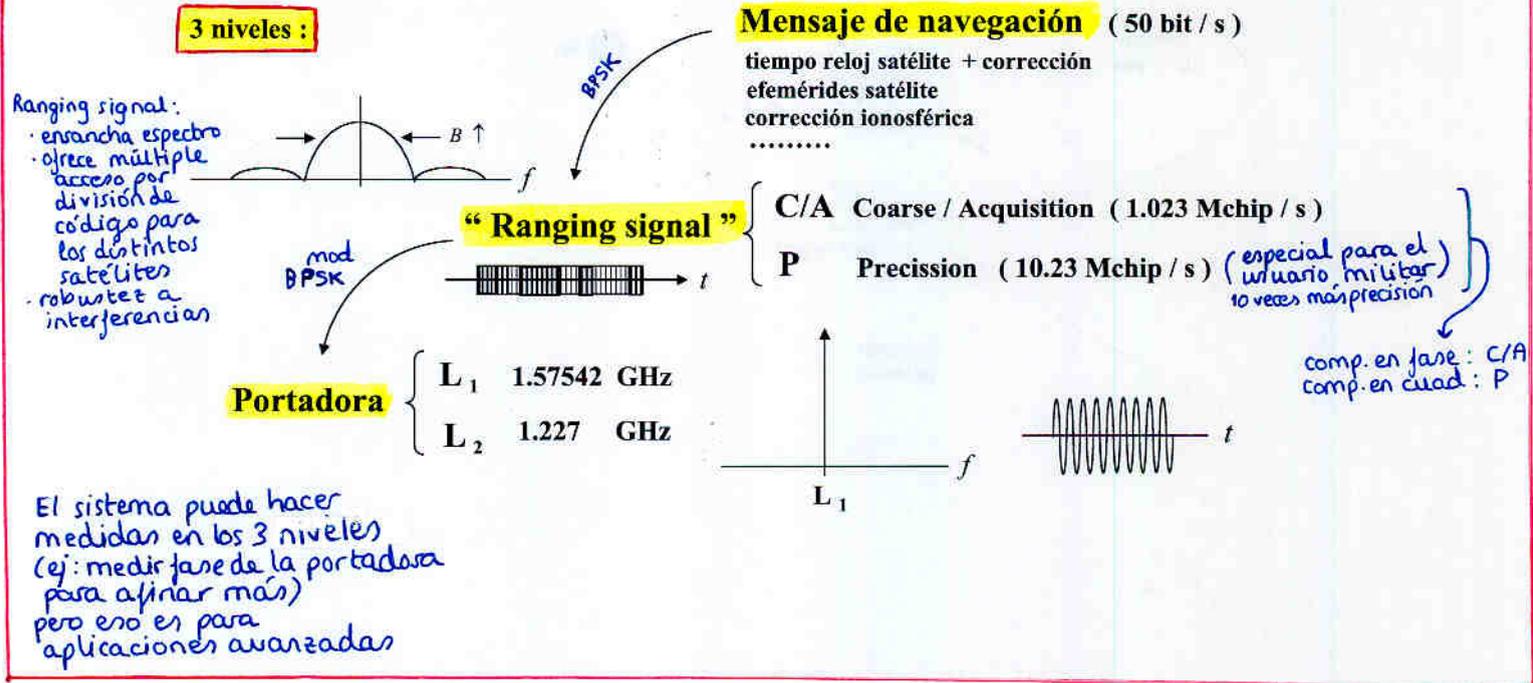
Aunque se haya utilizado similitud óptica se puede hacer exactamente lo mismo utilizando señales codificadas a frecuencias de  $\mu\text{O}$  (relativamente bajas)

Procesado de la señal recibida

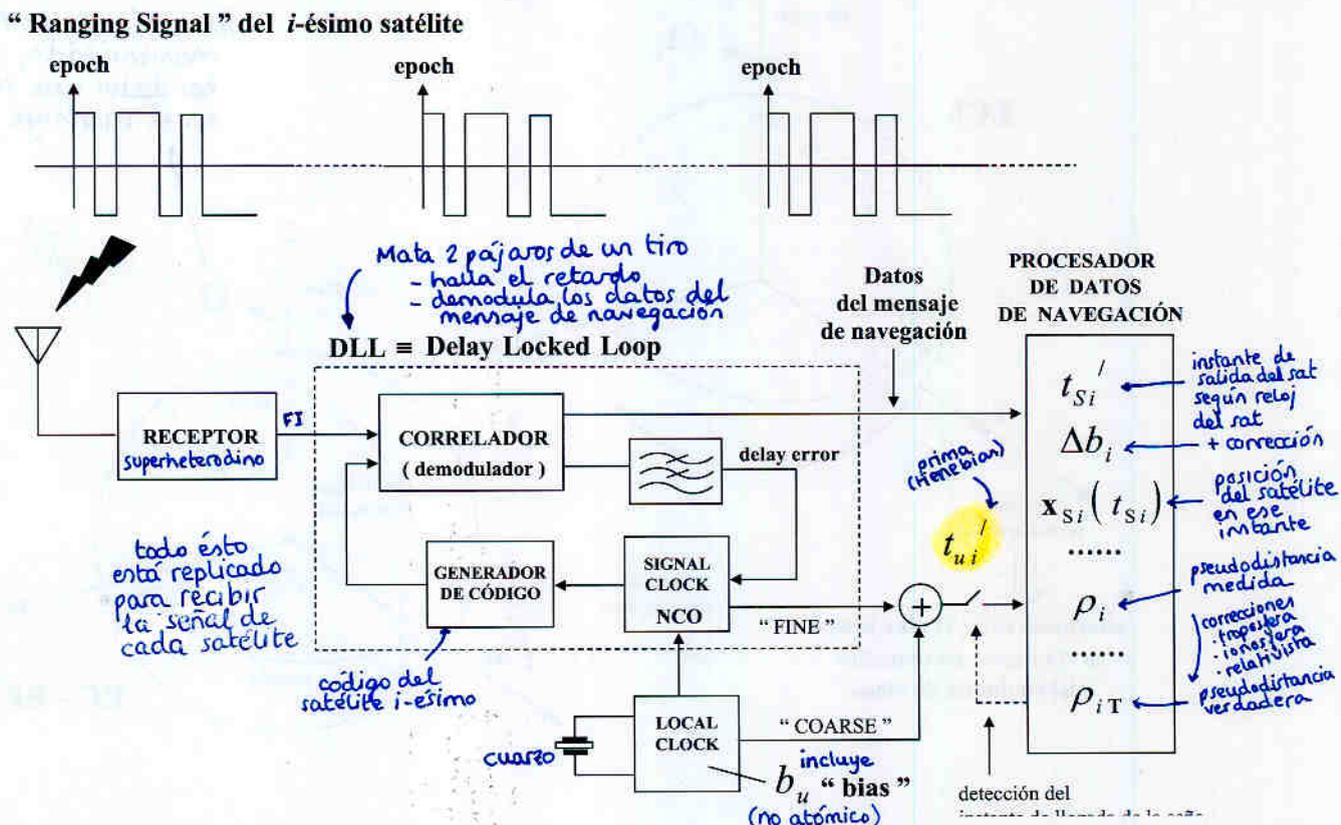
+

Tratamiento de la información contenida en la señal recibida

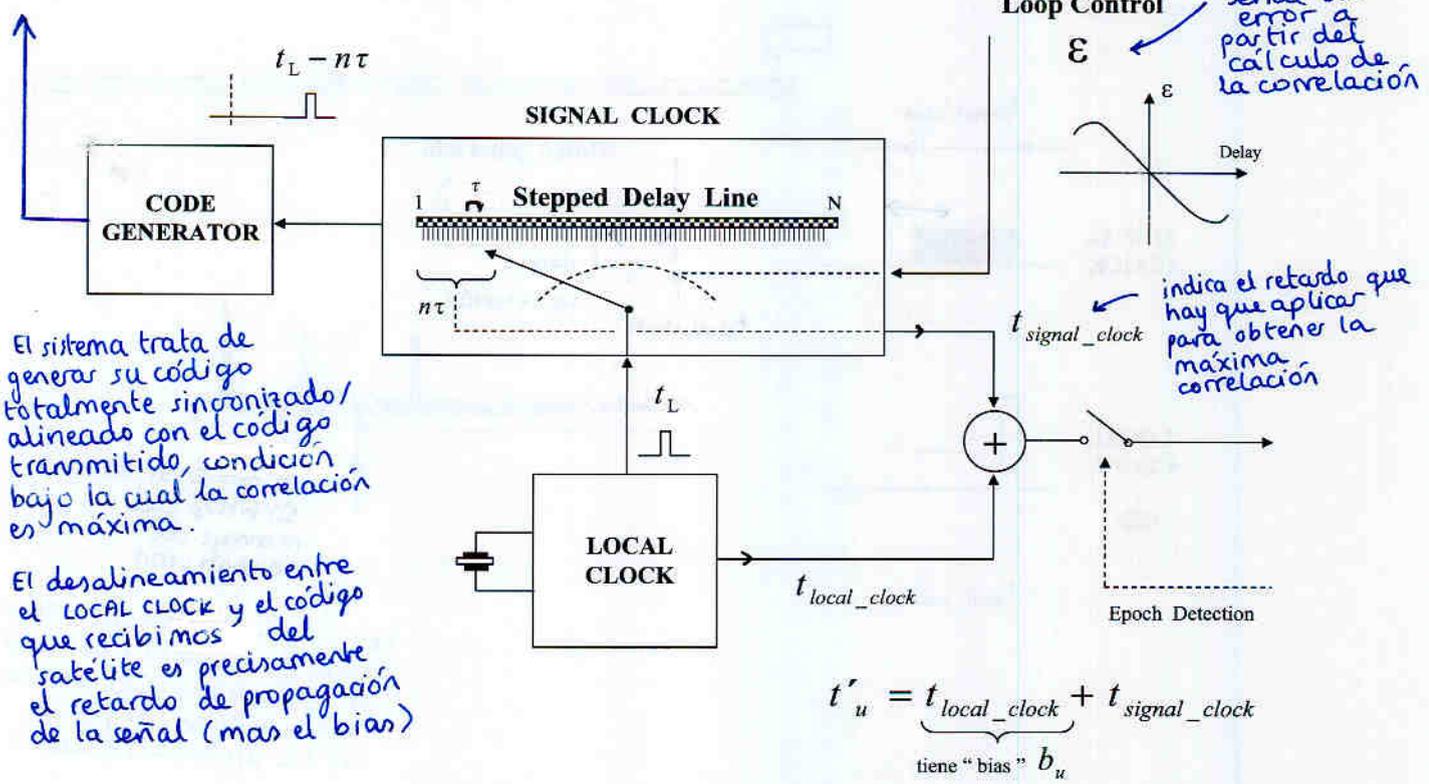
fotografía de los "displays" de los satélites



### Medida de la pseudodistancia con el receptor de usuario



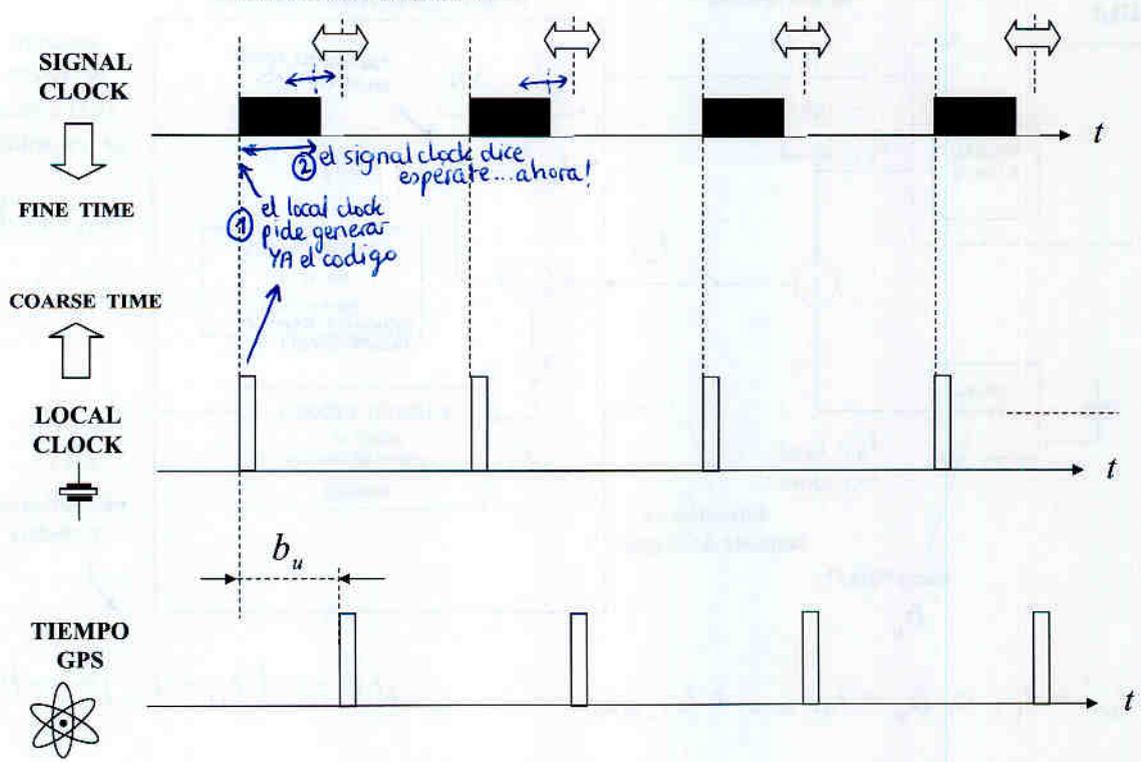
al correlador



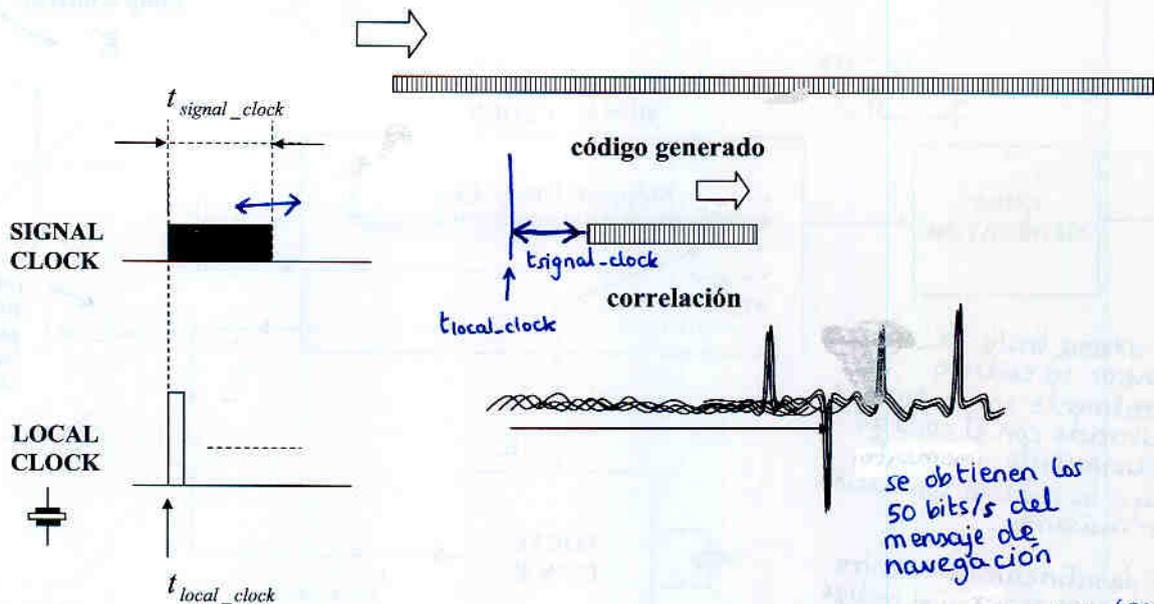
si te fijas es muy parecido al PLL pero a nivel de tratam. de la señal

tiempo que fluctúa al tratar de alinear la secuencia de código generada con la secuencia de código recibida

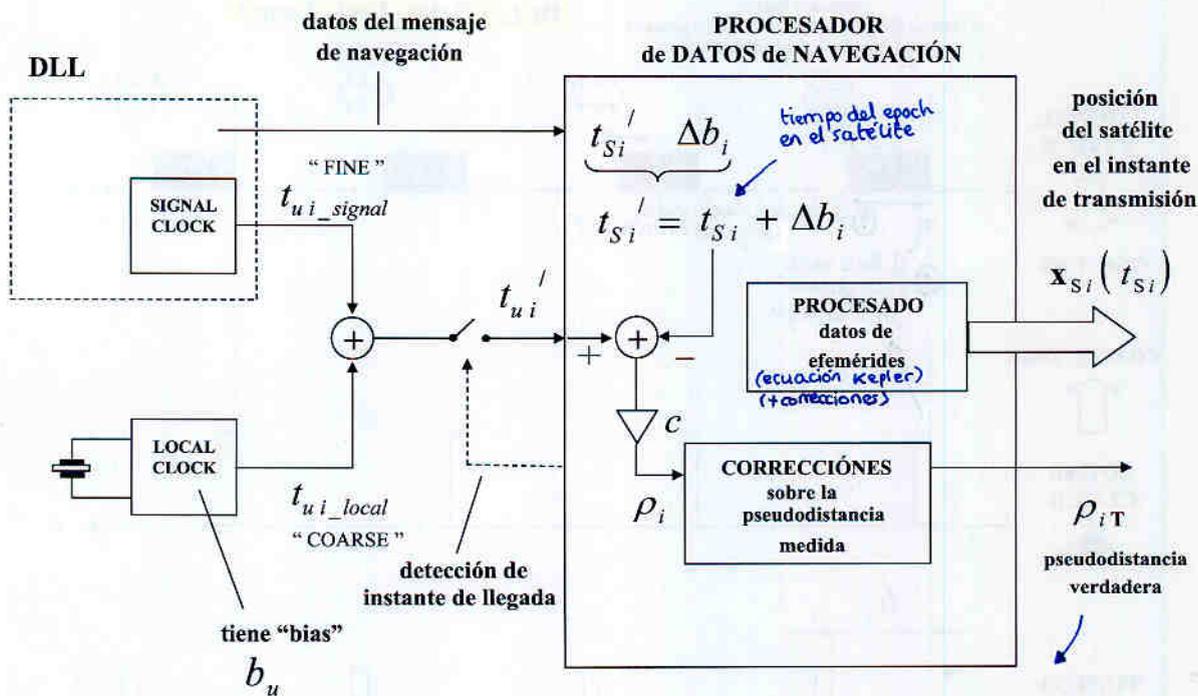
**DLL (Delay Lock Loop)**



**mensaje codificado recibido**

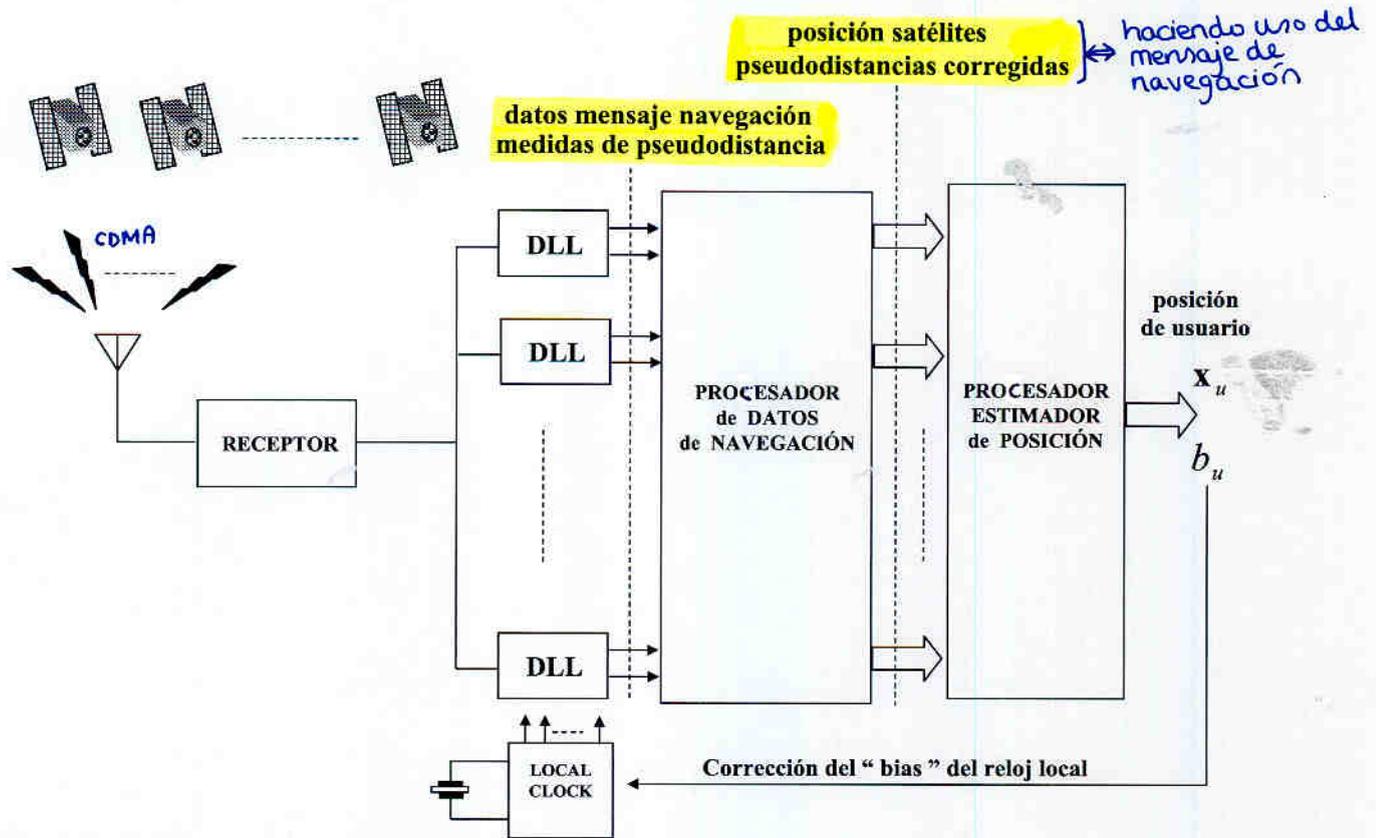


(en realidad cada bit (20ms) dura 20 códigos C/A (1ms) de 1023 chips, y por tanto cada bit son 20 picos en la autocorrelación)



$$t_{ui}' = t_{ui} + b_u = t_{ui\_local} + t_{ui\_signal}$$

$$\rho_{iT} = c \cdot (t_{ui} - t_{Si}) + c \cdot b_u$$

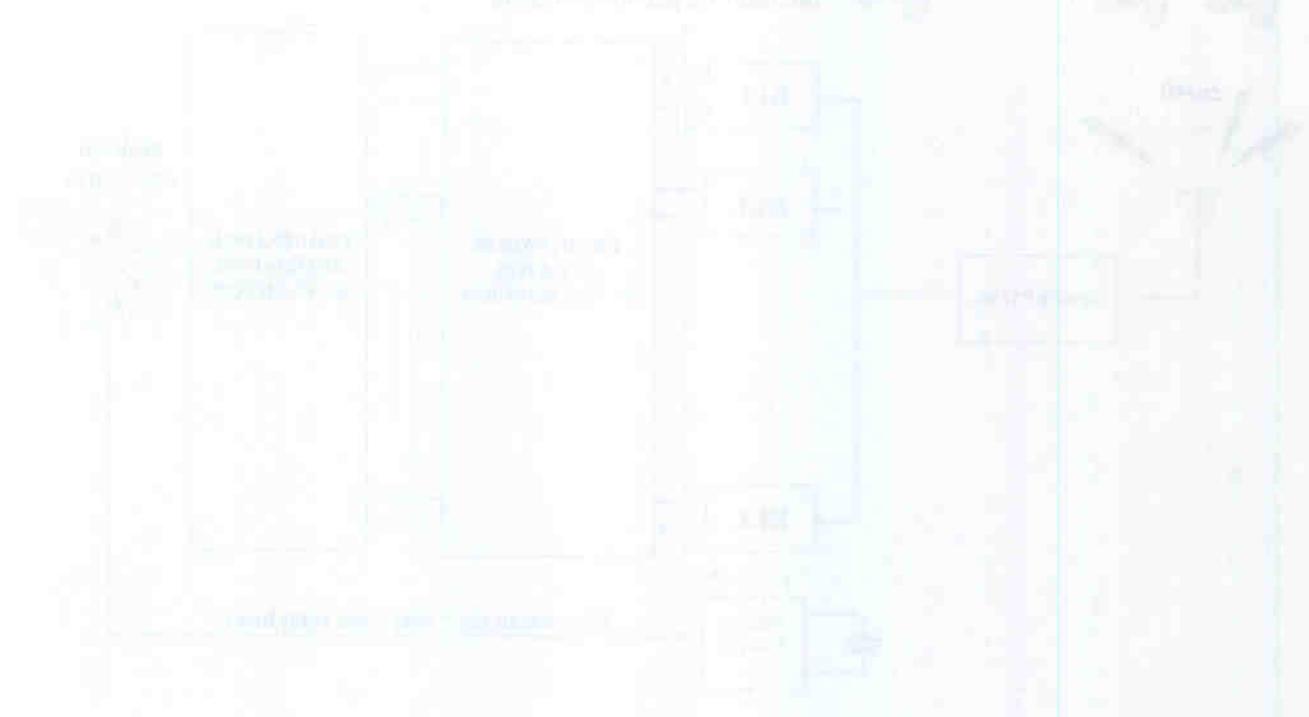


- Inicialmente sólo tenían un DLL que secuencialmente procesaba cada satélite
- Hoy día hay varios DLL en paralelo

Handwritten notes in the top left corner, possibly describing the circuit's function or components.

Handwritten notes in a yellow-highlighted box at the top center, likely providing specific component values or parameters.

Handwritten notes below the yellow box, possibly further specifications or a title for the circuit.



Handwritten notes at the bottom of the page, possibly a conclusion or a list of components used in the circuit.

nota: no ha querido que el tiempo GPS coincida con el tiempo UTC universal (porque no convenia)

**SEGMENTO ESPACIAL**

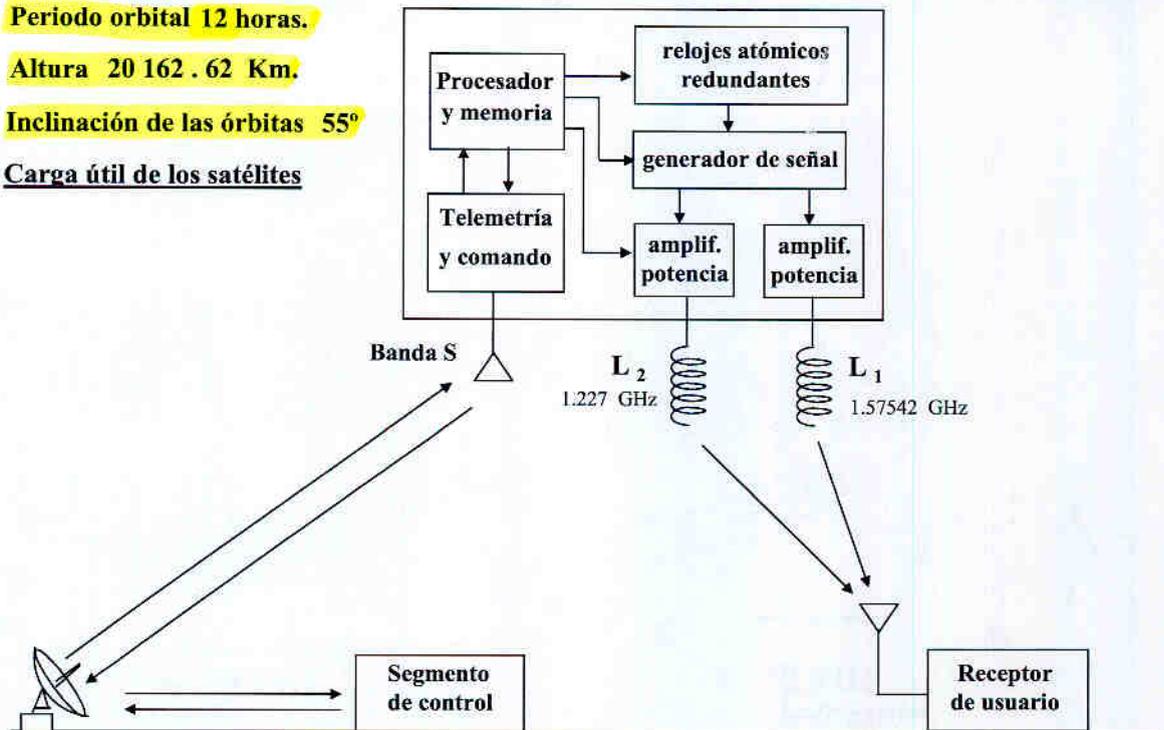
Constelación de 24 satélites en 6 planos orbitales.

Periodo orbital 12 horas.

Altura 20 162.62 Km.

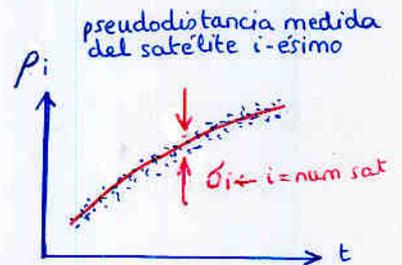
Inclinación de las órbitas 55°

Carga útil de los satélites



**SEGMENTO ESPACIAL**

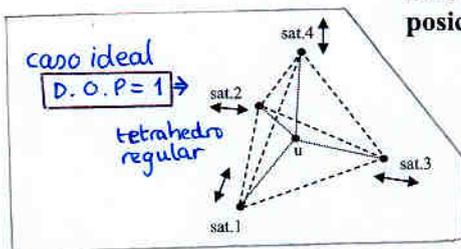
**Exactitud en la Medida de la Distancia y en el Posicionamiento**



$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{num\ sat} \sigma_i^2}$$

desv. típica o valor r.m.s. de las medidas de pseudodistancia

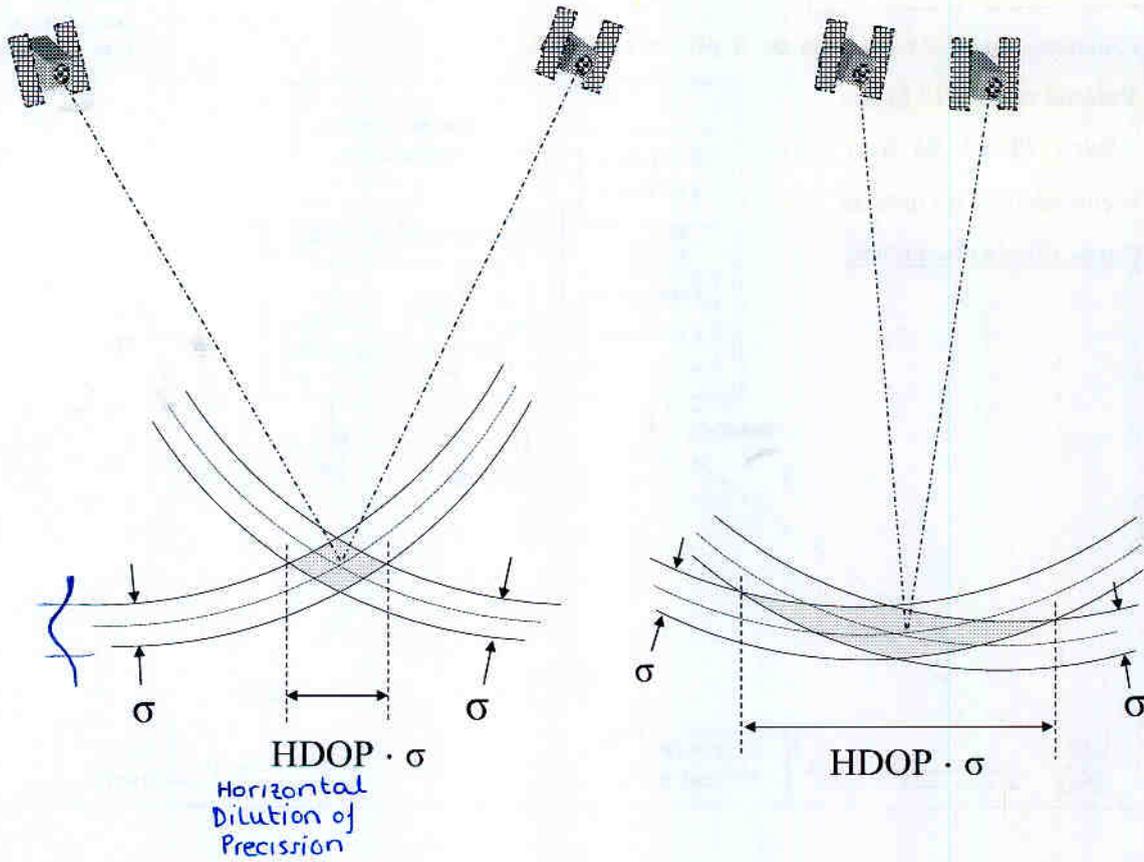
Error de posición =  $\underbrace{D.O.P.}_{\text{Dilution Of Precision}} \cdot \sigma$



“Dilution Of Precision”  
Depende de la geometría de los satélites  
varía entre 1 y 100  
debe ser < 6

“cómo se proyecta la incertidumbre de la medida sobre el output”

- Es un operador matricial
- H.D.O.P. ≡ Horizontal Dilution Of Precision
  - V.D.O.P. ≡ Vertical Dilution Of Precision (en USA hay en tierra pseudolites para mejorar la V.D.O.P. → ayuda en el aterrizaje en aviones)
  - P.D.O.P. ≡ Position Dilution Of Precision (V + H)
  - G.D.O.P. ≡ Geometric Dilution Of Precision (V + H + “bias reloj de usuario”)



**Ejemplos :**

$$\text{Error r.m.s. horizontal} = \text{H.D.O.P.} \cdot \sigma$$
 en coordenadas (x, y)

$$\text{Error r.m.s. vertical} = \text{V.D.O.P.} \cdot \sigma$$
 en coordenada z

$$\text{Error de posición r.m.s.} = \text{P.D.O.P.} \cdot \sigma$$
 en coordenadas (x, y, z)

desv. típica o valor r.m.s. de las medidas de pseudodistancia

**Ejemplo :**

geometría de los satélites H.D.O.P. = 3, queremos error horizontal < 10 m

¿ Qué exactitud se requiere en la medida del tiempo ?

( en espacio )  $H.D.O.P. \cdot \sigma_{[m]} < 10 \text{ m}$

( en tiempo )  $H.D.O.P. \cdot \sigma_{[s]} < 10 \text{ m} \times \underbrace{3.33 \text{ ns/m}}_{1/c} \Rightarrow \sigma < 11.1 \text{ ns}$

$\uparrow$   
 3

## SEGMENTO ESPACIAL

### Ampliación del G.P.S.

- Transmisores terrestres o "Pseudolites"

transmiten señales GPS como otro satélite de apoyo, pero en tierra aplic. para el aterrizaje de aviones

- Utilización de satélites "relé" equipados con transponders para reemitir señales procedentes de transmisores terrestres (similares en carga útil a los satélites).

W.A.A.S.  $\equiv$  Wide Area Augmentation System (utiliza satélites geostacionarios)

- GPS diferencial

estaciones diferenciales terrestres de amplia área

transmiten correcciones que deben aplicarse sobre la medida de la pseudodistancia

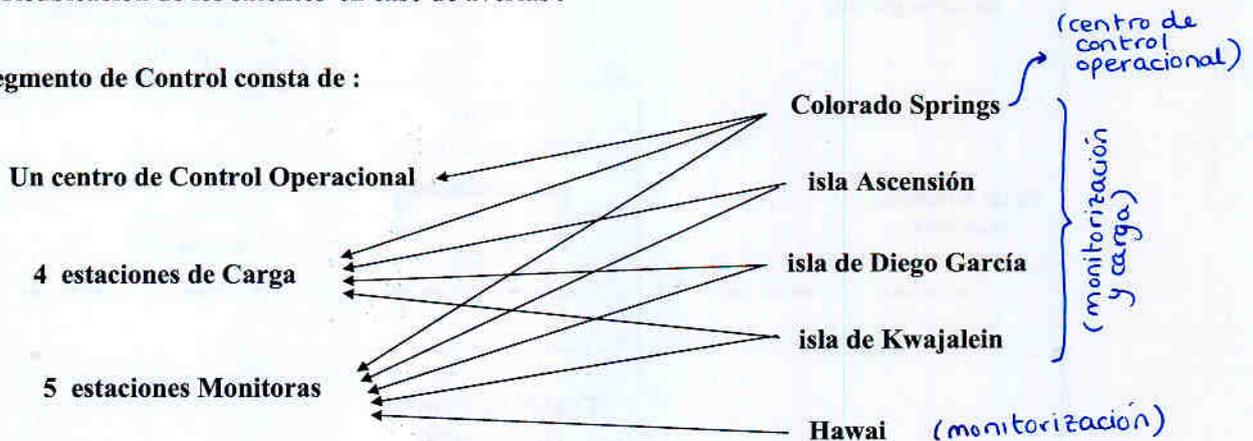
GPS contrata un transponder a un sat. geostacionario. Desde tierra monitorizan el satélite, elaboran el mensaje, y se lo envían al satélite para que lo retransmita

### SEGMENTO de CONTROL

Objetivos :

- Mantener a cada satélite en órbita (maniobras pequeñas y poco frecuentes).
- Correcciones y ajustes de los relojes de los satélites y de la carga útil (en general).
- Seguir a los satélites, generar y cargar el mensaje de navegación para cada satélite.
- Reubicación de los satélites en caso de averías.

El segmento de Control consta de :



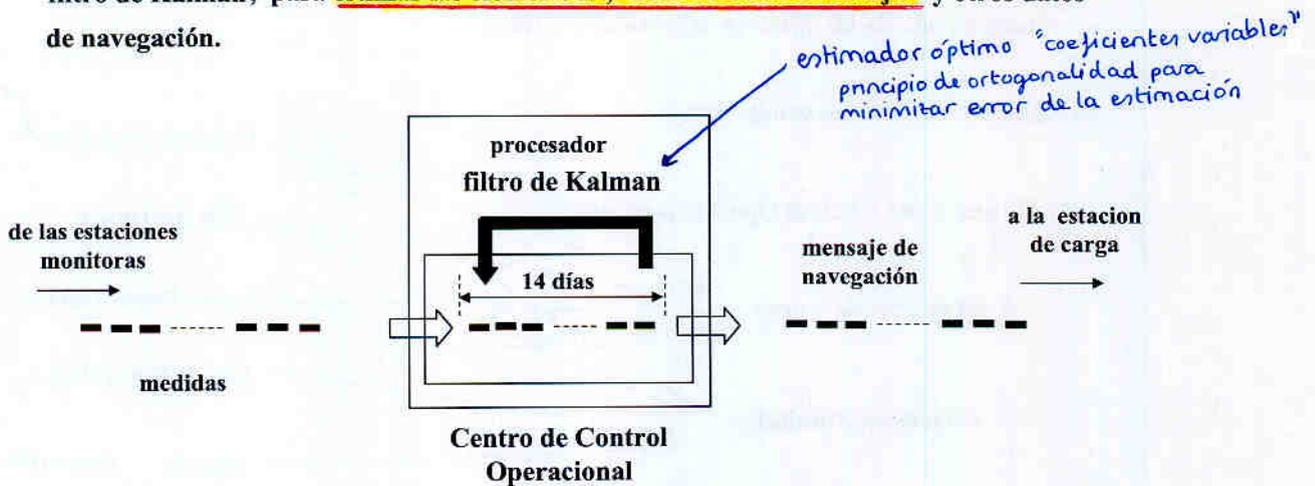
## ESTACIONES MONITORAS ( Segmento de Control )

- Múltiples receptores GPS de seguimiento para  $L_1$  y para  $L_2$ , en códigos C/A y P.
- Relojes atómicos redundantes
- A cada satélite visible se le mide :

- . retardo de reloj
  - . fase de la portadora
  - . pseudodistancia
  - . .....
- } muestreo , etiquetado temporal , multiplexado , ..... ,  
... , envío al Centro de Control Operacional.

## CENTRO de CONTROL OPERACIONAL ( Segmento de Control )

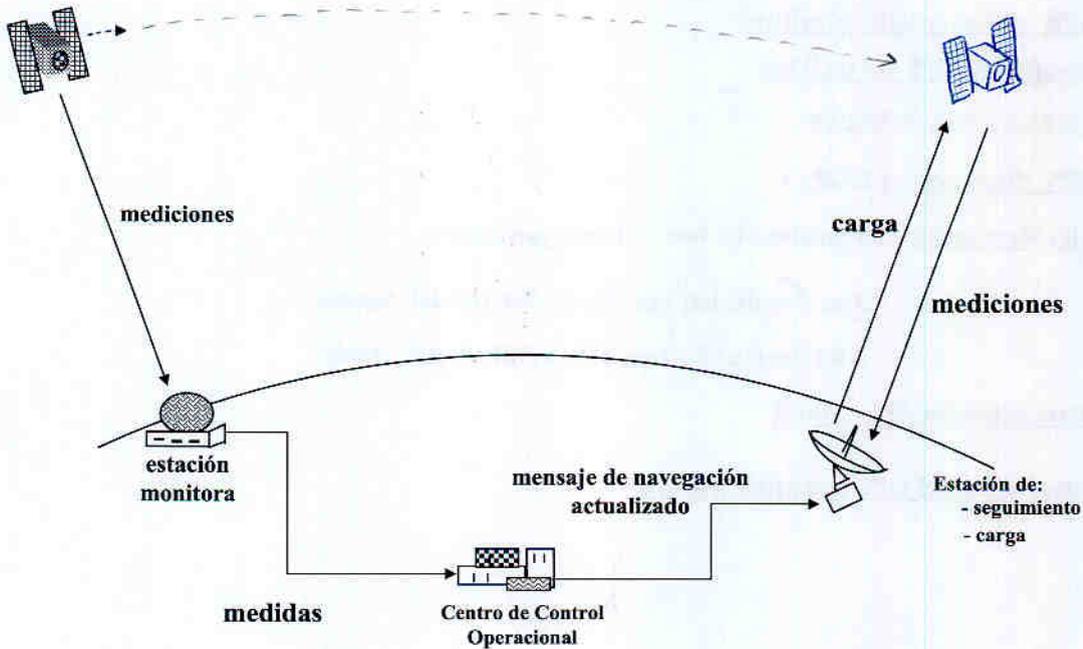
- Recibe de forma multiplexada las medidas de cada satélite , que proporcionan las estaciones monitoras.
- Durante unos 14 días , el Centro de Control Operacional procesa la información utilizando filtro de Kalman, para estimar las efemérides , los errores de los relojes y otros datos de navegación.



## ESTACIONES DE CARGA ( Ground Antenna & Upload Station )

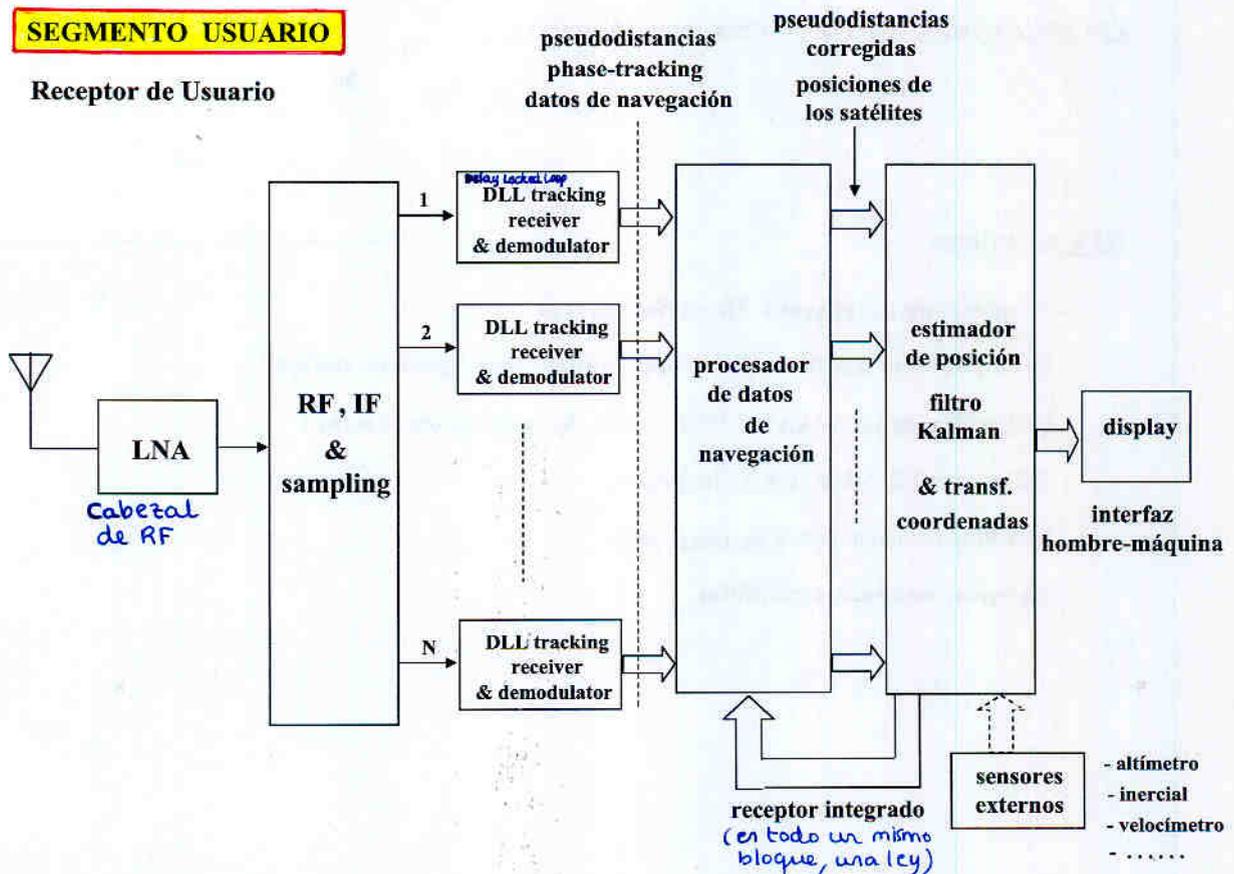
( Segmento de Control )

Cargan los datos de navegación a los satélites a través de enlace de Telecomando y Telemetría en banda - S



## SEGMENTO USUARIO

Receptor de Usuario



## **APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)**

GPS en Aviones

GPS en Navegación Terrestre

GPS en Navegación Marítima

Receptores GPS en satélites

Transferencia de tiempo

GPS diferencial ( DGPS )

Alta Resolución con medidas de fase sobre la portadora

Alta Resolución con Modo Diferencial Simple

Alta Resolución con Modo Diferencial Doble

Determinación de la Atitud

Integración del GPS con otros sistemas

## **APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)**



### GPS en Aviones

- Proporciona navegación 3D en tiempo real
- Se requiere un quinto satélite como mínimo para “paso de testigo”
- Utilización de los WAAS ( Wide Area Augmentation System )
- Soluciones híbridas GPS / Inercial
- Medidas Doppler sobre la portadora
- Receptor de canales múltiples

## APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

### GPS en Navegación Terrestre

la altura varía lentamente

- Posicionamiento bidimensional y tridimensional

se puede funcionar con 2 o 3 satélites en periodos prolongados de tiempo  
(en modo tracking en vez de adquisición)

- Frecuentes bloqueos, efectos de sombra por vegetación y edificios

- Ampliación del sistema integrando :

indicadores magnéticos de rumbo (ej. brújula)  
sistemas inerciales (ej. giróscopo)  
detectores de movimiento (ej. ruedas dentadas)  
etc...

## APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

### GPS en Navegación Marítima

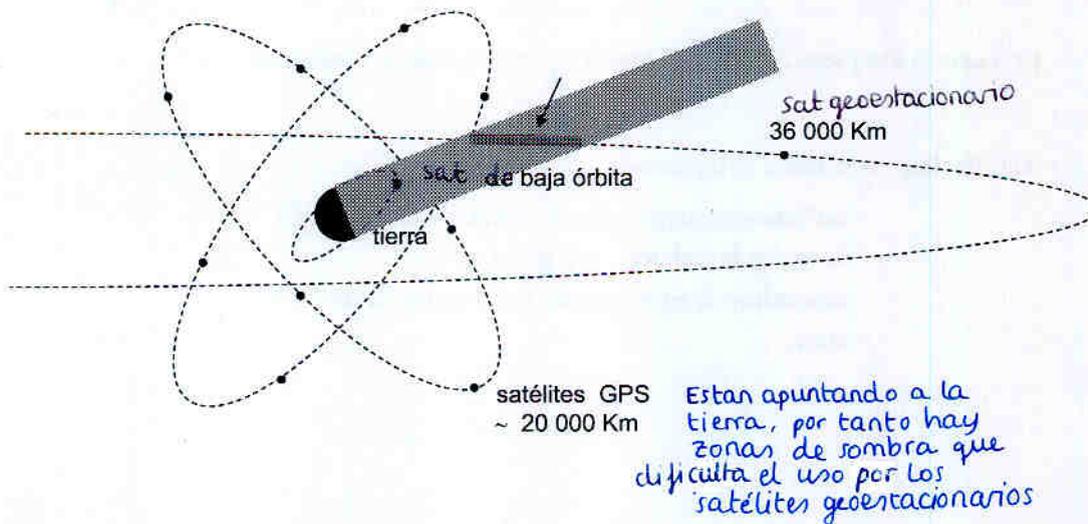
- **Altura constante** excepto mareas y cabeceo de la nave
- Se requiere un mínimo de 3 satélites  
(posibilidad de funcionar con 2 satélites con actualizaciones periódicas de un tercero)
- Navegación diferencial en puertos para mayor exactitud



## APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

### Receptores GPS en satélites

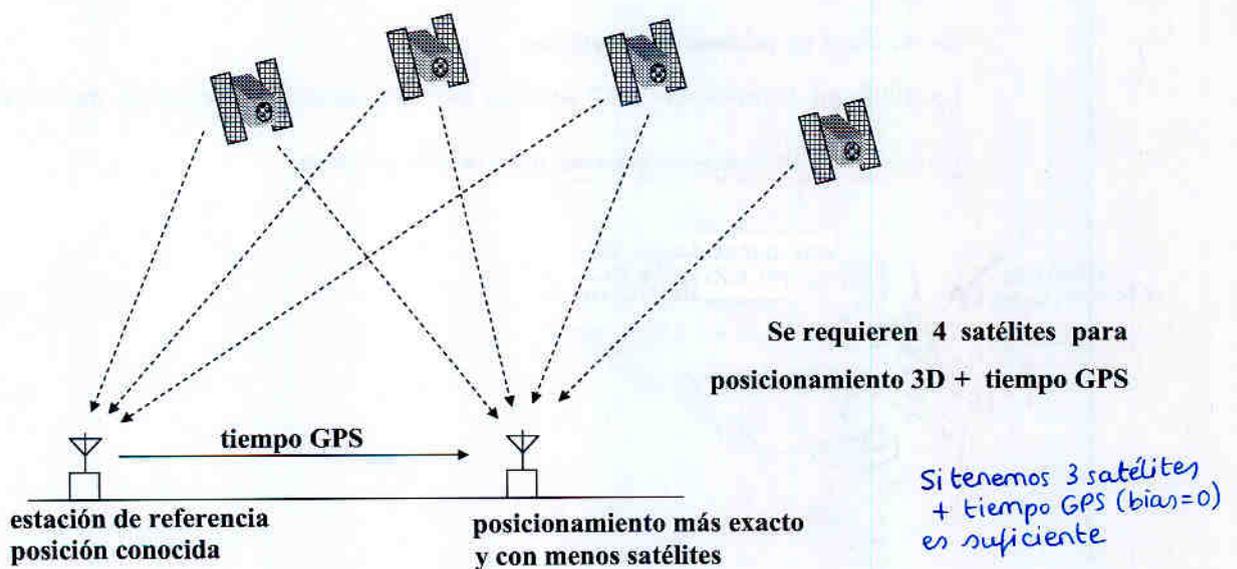
- Para satélites con órbitas cercanas a la tierra
- También para satélites geostacionarios →
  - señales muy débiles
  - zonas de sombra
  - mala GDOP



## APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

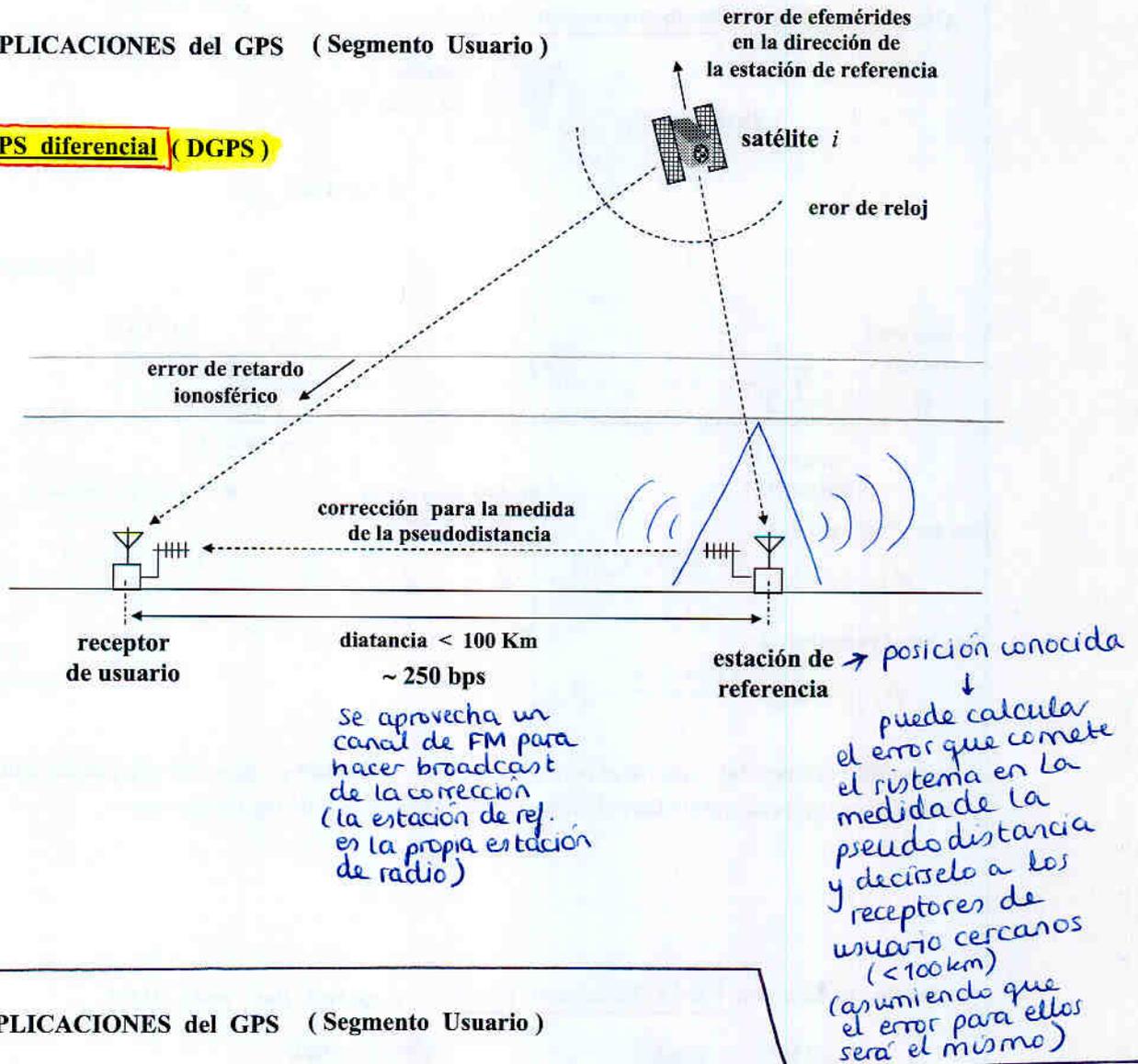
### Transferencia de tiempo

- El posicionamiento puede mejorarse si el tiempo del sistema se transfiere desde una estación de referencia de posición conocida



APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

**GPS diferencial (DGPS)**



APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

**Alta Resolución** con medidas de fase sobre la portadora → ej: útil para medir derivas de continentes

1.57542 GHz  $\Rightarrow$   $\lambda = 19 \text{ cm}$  si medimos la fase con precisión del 1%  $\Rightarrow$  2 mm

$\exists$  ambigüedad o problema  $n\lambda$  que resolvemos por técnica Diferencial (receptores muy próximos)

↑  
al no conocer la fase de la señal en origen  $\theta_{sj}$

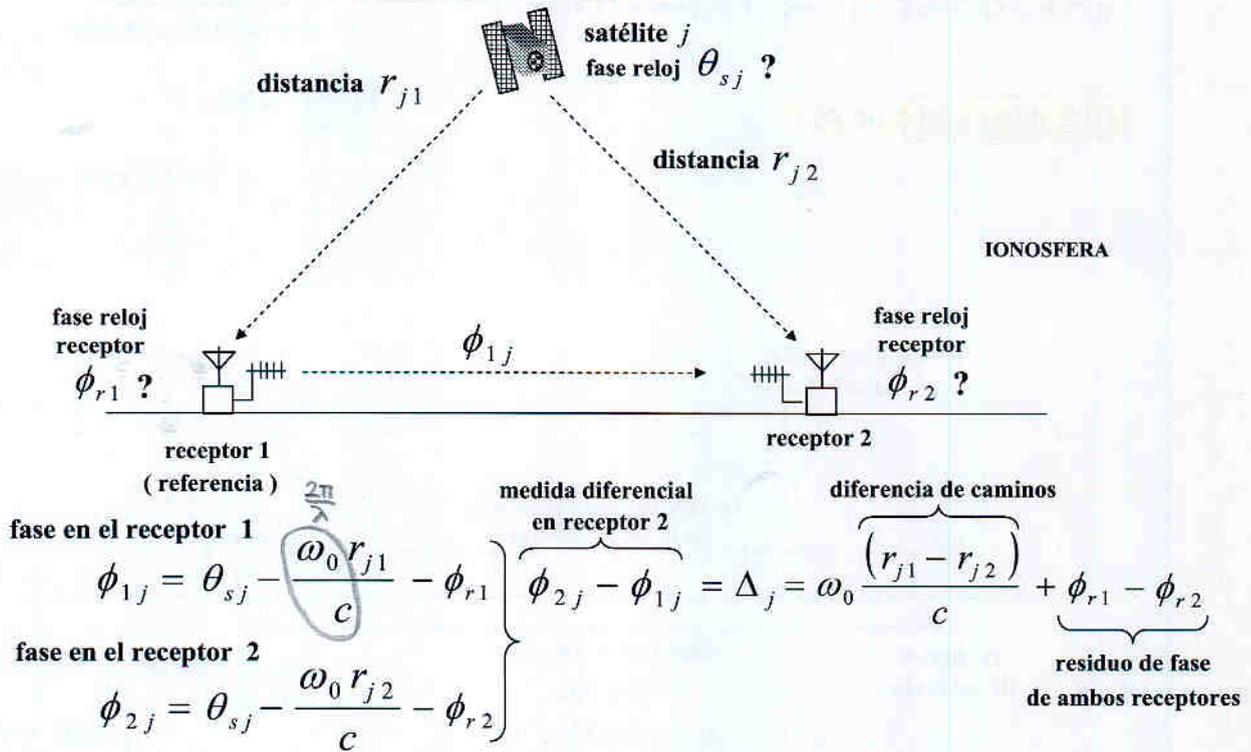
→ modo diferencial simple  $\Rightarrow$  se cancelan efectos atmosféricos  
se cancela el offset de fase que posee el reloj del satélite  $\theta_{sj}$   
todavía existe un error de fase de los receptores (no coherencia entre los osciladores de los receptores)

→ modo diferencial doble  $\Rightarrow$  se cancelan efectos atmosféricos  
se cancelan los offsets de fase de los relojes de los satélites  
se cancelan los offsets de fase de los relojes de los receptores

no conjundir con el GPS diferencial de la transp. anterior

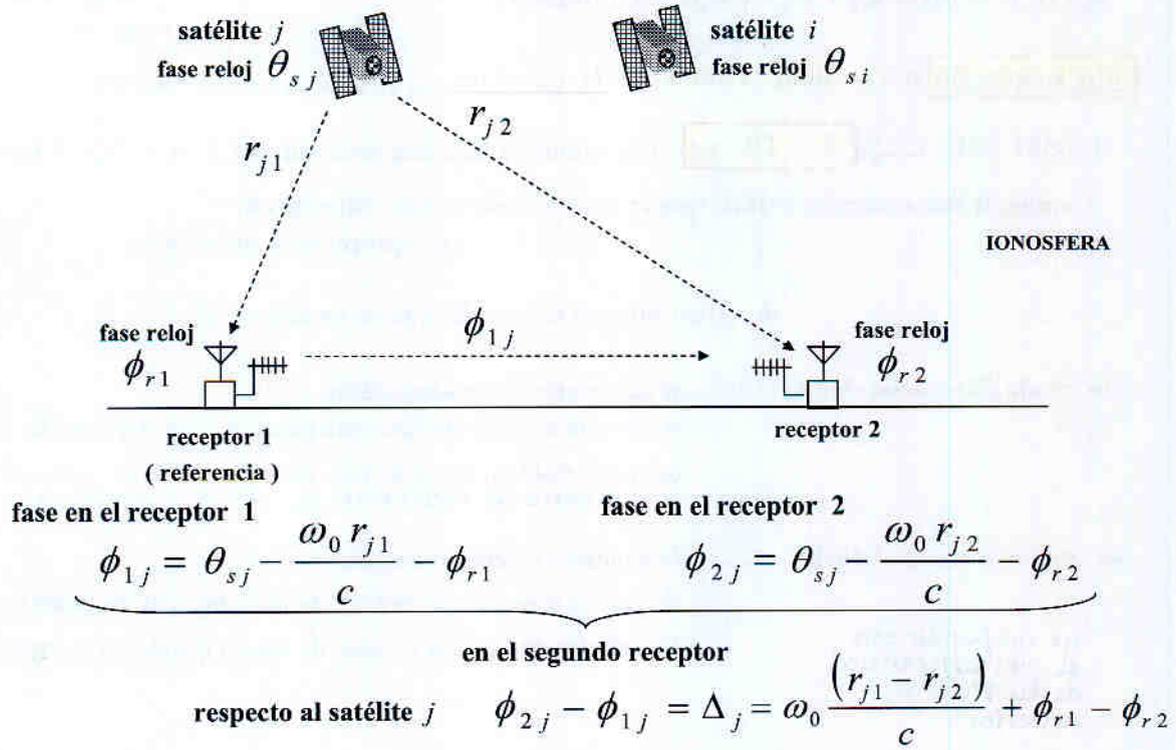
Se basa en medir la DIFERENCIA de la distancia

**Alta Resolución con Modo Diferencial Simple**

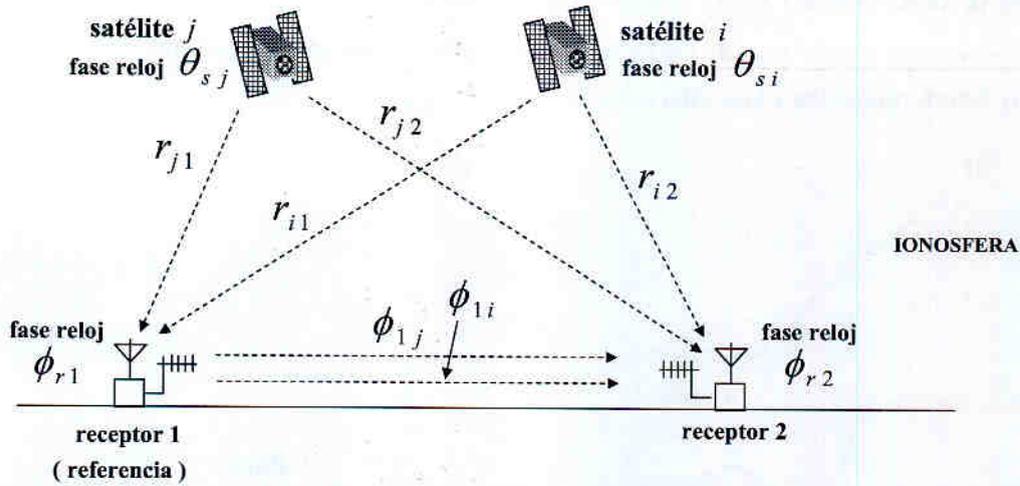


La medida diferencial cancela el error ionosférico y el offset de fase del reloj del satélite todavía hay un residual de fase debido a los offsets de fase de los receptores

**Alta Resolución con Modo Diferencial Doble** : requiere dos satélites



## Alta Resolución con Modo Diferencial Doble



$$\text{fase en el receptor 1} \quad \phi_{1i} = \theta_{si} - \frac{\omega_0 r_{i1}}{c} - \phi_{r1} \qquad \text{fase en el receptor 2} \quad \phi_{2i} = \theta_{si} - \frac{\omega_0 r_{i2}}{c} - \phi_{r2}$$

en el segundo receptor

$$\text{respecto al satélite } j \quad \phi_{2j} - \phi_{1j} = \Delta_j = \omega_0 \frac{(r_{j1} - r_{j2})}{c} + \phi_{r1} - \phi_{r2}$$

$$\text{respecto al satélite } i \quad \phi_{2i} - \phi_{1i} = \Delta_i = \omega_0 \frac{(r_{i1} - r_{i2})}{c} + \phi_{r1} - \phi_{r2}$$

$$\text{segunda diferencia} \quad \delta_{ij} = \Delta_j - \Delta_i = \omega_0 \frac{[(r_{j1} - r_{j2}) - (r_{i1} - r_{i2})]}{c}$$

los offsets de fase de ambos receptores se cancelan

medidas diferenciales de diferencia de caminos



DOBLEMENTE DIFERENCIAL

en la práctica son múltiplemente diferenciales (sistema interjerométrico)

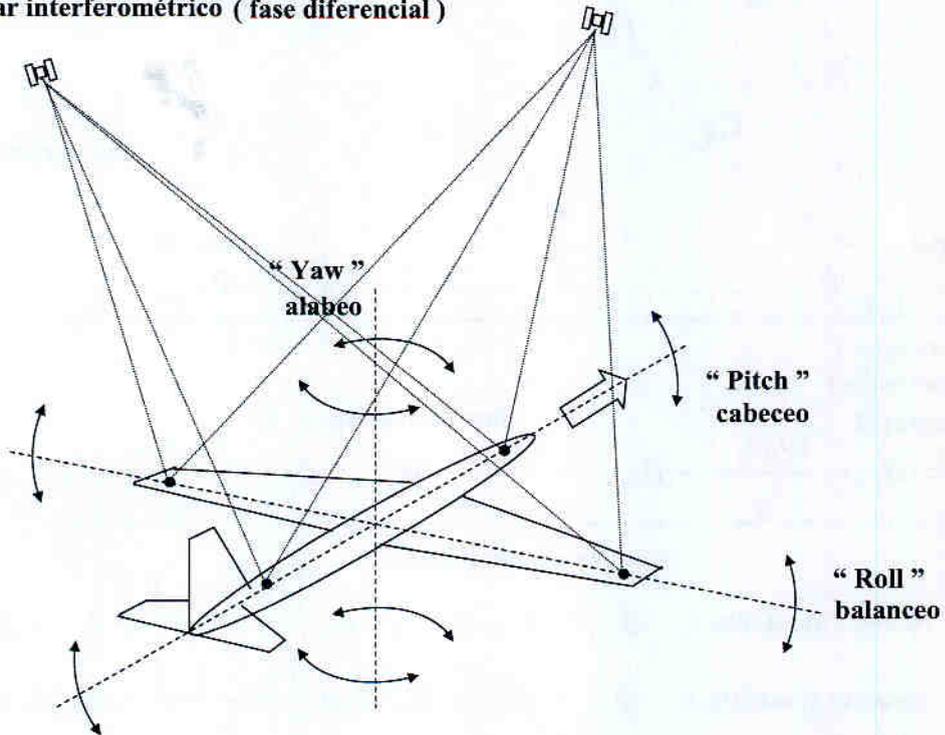
Se cancela el efecto ionosférico y los offsets de fase  $\theta_{si}$ ,  $\theta_{sj}$ ,  $\phi_{r1}$ ,  $\phi_{r2}$

APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

ATITUD

**Determinación de la Atitud** (orientación de la plataforma en navegación)

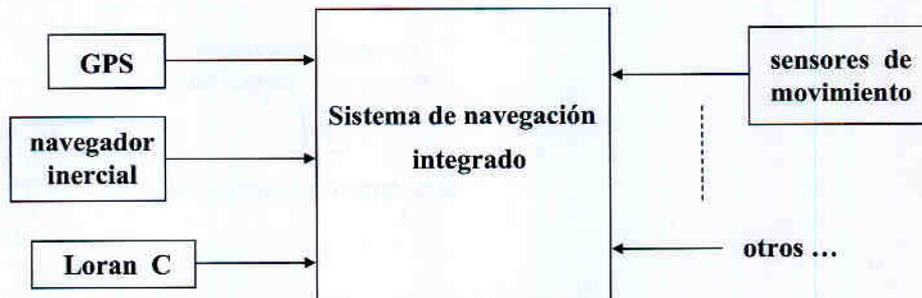
Par interferométrico (fase diferencial)



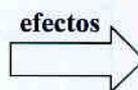
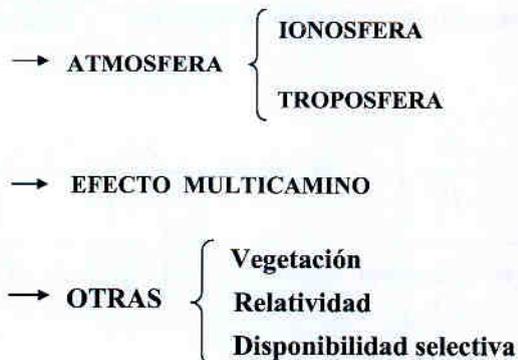
APLICACIONES del GPS (Segmento Usuario)

Integración del GPS con otros sistemas

se evita las interrupciones por sombras



## PERTURBACIONES de la SEÑAL GPS



- Atenuación
- Fluctuación de la señal
- Incremento del retardo

## EFECTO IONOSFÉRICO

Ionosfera es la región de gases ionizados a partir de 75 a 100 Km hasta 200 a 400 Km

Varía entre el día y la noche

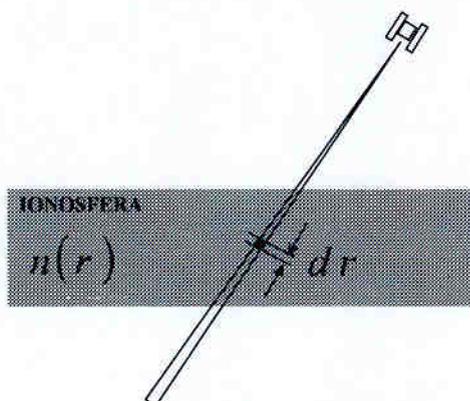
índice de refracción

$$n = \frac{c}{v}$$

$c$  ← velocidad de la luz en el vacío  
 $v$  ← velocidad de la luz en medio con índice de refracción  $n$

velocidad de propagación

$$v(r) = \frac{c}{n(r)}$$



retardo  $\Delta t = \frac{1}{c} \cdot n(r) \cdot dr$

retardo total  $\tau = \frac{1}{c} \cdot \int_{ionosfera} n(r) dr$

↑  
en el cenit durante el día

$\Delta\tau = 2 \sim 50 \text{ ns}$

$1 \text{ ns} \approx 3 \text{ m}$

Corrección Ionosférica utilizando  $L_1$  y  $L_2$

↳ sólo para usuarios militares; les permite caracterizar físicamente la ionosfera

1.57542 GHz      1.227 GHz

modelo:

$$\Delta \tau \cong \frac{A}{f^2}$$

↑  
aprox. de 1er orden

? depende del estado de la ionosfera

midiendo a dos frecuencias  $L_1$  y  $L_2$  se puede estimar el retardo ionosférico

(con 2 medidas hallamos A)

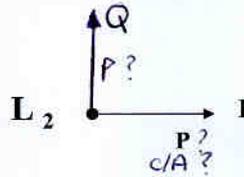
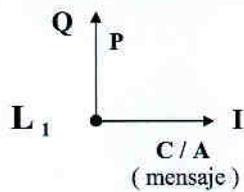
pseudodistancia medida con  $L_1$       pseudodistancia medida con  $L_2$

$$\rho_T = \rho_{m1} - c \cdot \left( \frac{A}{f_1^2} \right) = \rho_{m2} - c \cdot \left( \frac{A}{f_2^2} \right) \Rightarrow A = \frac{\rho_{m1} - \rho_{m2}}{c \cdot \left[ \frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right]}$$

↑  
pseudodistancia verdadera      error ionosférico con  $L_1$       error ionosférico con  $L_2$

Usuarios civiles solo funcionan con  $L_1$

en el mensaje de navegación se manda un modelo para calcular el error de retardo ionosférico



pueden hacer lo que quieran

protuberancia en la ionosfera con modelo cosenoidal perfectamente caracterizado con ciertos parámetros que se envían en el mensaje

Lo que sí está claro:

- componente en fase de  $L_1$ : ranging signal C/A modulada con el mensaje de navegación

**EFFECTO TROPOSFÉRICO**

(es constante y no requiere monitorización continua)

Índice de refracción  $n(h) = 1 + N(h) \cdot 10^{-6}$

↑  
refractividad troposférica

$$N(h) = 315 \cdot \exp(-0.136h)$$

modelo según CCIR

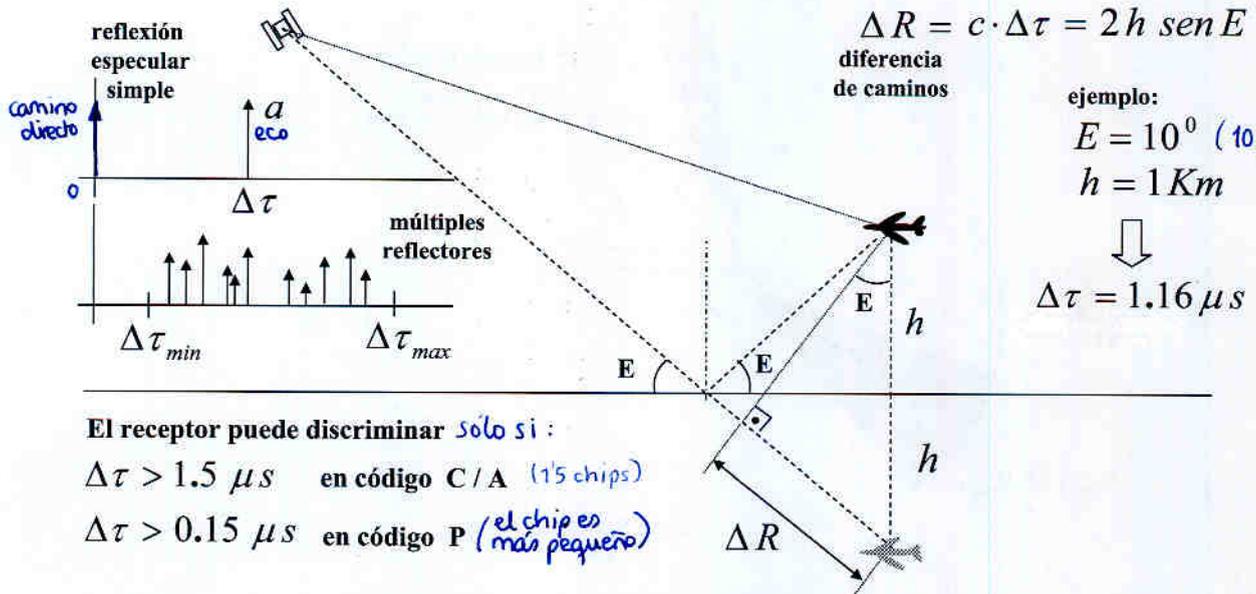
$\Delta \tau$  constante con la frecuencia hasta 15 GHz

$$\Delta \tau = \int_{\text{troposfera}} N(h) dh \times 10^{-6}$$

$$\Delta \tau \begin{cases} \cong 2.6 \text{ m en el cenit} \\ \cong 20 \text{ m a elevación } < 10^\circ \end{cases}$$

## EFECTO MULTICAMINO

Ocurre especialmente en aviones sobrevolando amplias superficies reflectantes



El receptor puede discriminar sólo si :

$\Delta \tau > 1.5 \mu s$  en código C/A (15 chips)

$\Delta \tau > 0.15 \mu s$  en código P (el chip es más pequeño)

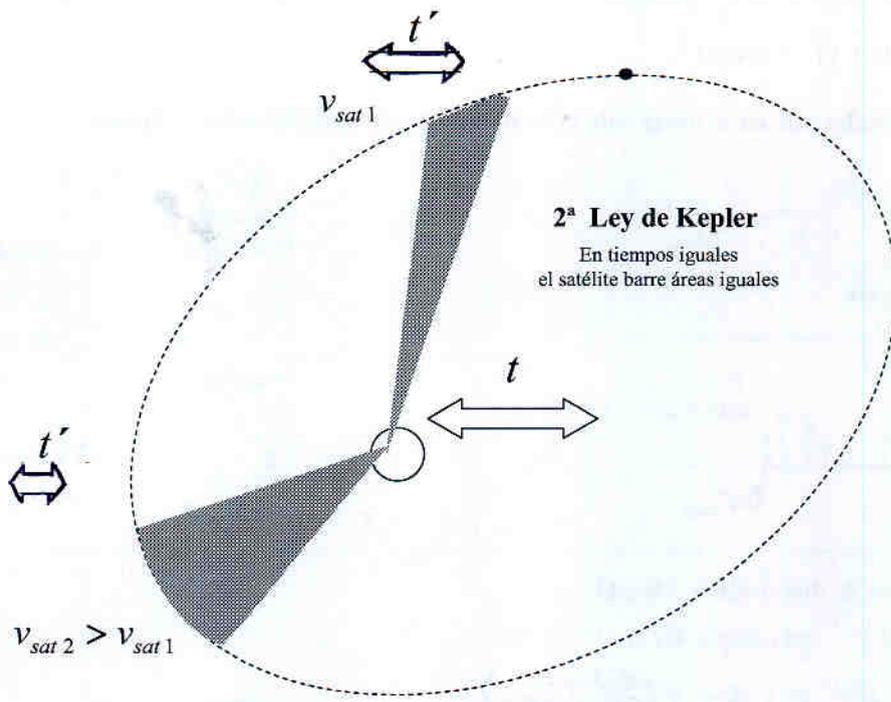
condición para poder discriminar reflexión por efecto multipath (C/A)

$$1.5 \mu s < \frac{2h}{c} \cdot \operatorname{sen} E = \Delta \tau \rightarrow \Delta R = 2h \operatorname{sen} E > (1.5 \mu s) \cdot c = 448 \text{ m}$$

### OTRAS PERTURBACIONES

- Efectos Relativistas
- Atenuación por vegetación (copas de árboles, etc...)
- Disponibilidad selectiva SA (Selective Availability)  
 (degradación aposta) (actualmente desactivada)

Velocidad del satélite → contracción del tiempo en el satélite

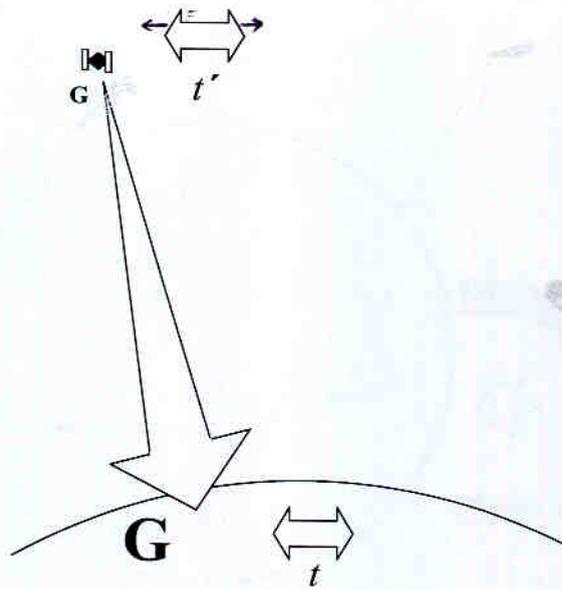


### OTRAS PERTURBACIONES

- Efectos Relativistas
- Atenuación por vegetación ( copas de árboles, etc... )
- Disponibilidad selectiva SA ( Selective Availability )

Velocidad del satélite → contracción del tiempo en el satélite (relat. especial)

Campo gravitatorio en el satélite → dilatación del tiempo en el satélite (relat. general)



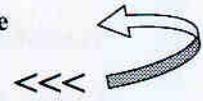
**OTRAS PERTURBACIONES**

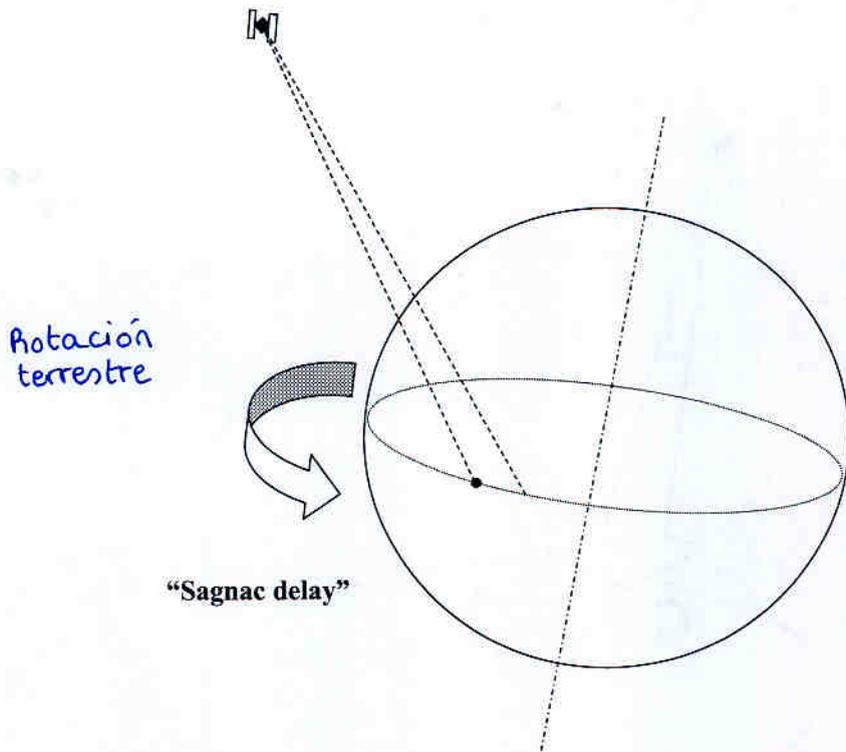
- Efectos Relativistas
- Atenuación por vegetación ( copas de árboles, etc... )
- Disponibilidad selectiva SA ( Selective Availability )

Velocidad del satélite → contracción del tiempo en el satélite

Campo gravitatorio en el satélite → dilatación del tiempo en el satélite

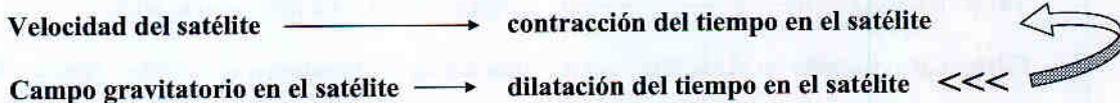
Rotación terrestre





**OTRAS PERTURBACIONES**

- Efectos Relativistas
- Atenuación por vegetación ( copas de árboles, etc... )
- Disponibilidad selectiva SA ( Selective Availability )



Rotación terrestre

Movimiento del usuario

Deben ser cuantificados y finalmente aplicar corrección sobre

" bias de reloj de satélite"

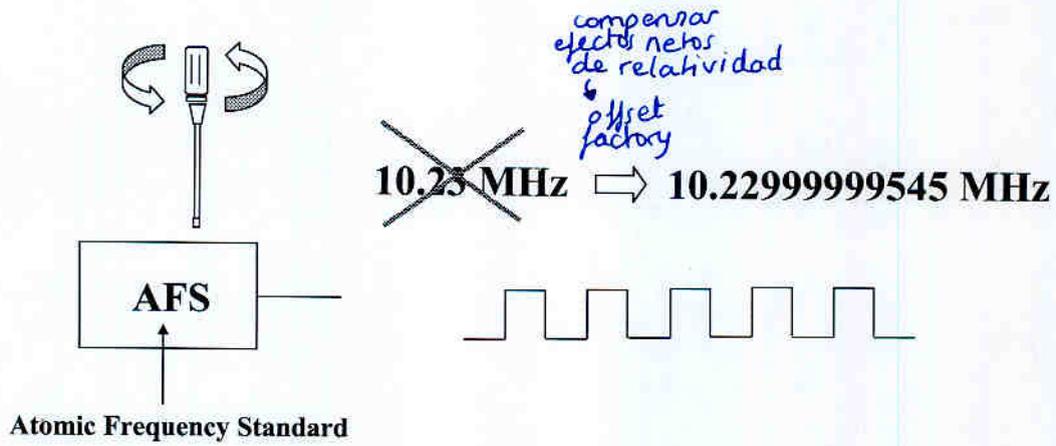


$$\Delta b_i$$

↑  
satélite *i*

Efecto neto de contracción de tiempo en el satélite que fluctúa por encima de un "offset "mínimo"

Este "offset" mínimo se corrige en el reloj del satélite **antes de ser lanzado** "offset factory"



AFS (Atomic Frequency Standard) is a highly accurate time and frequency reference. It is used to provide a stable reference for the satellite's clock. The AFS is typically a cesium or rubidium atomic clock.

Handwritten section header or title.

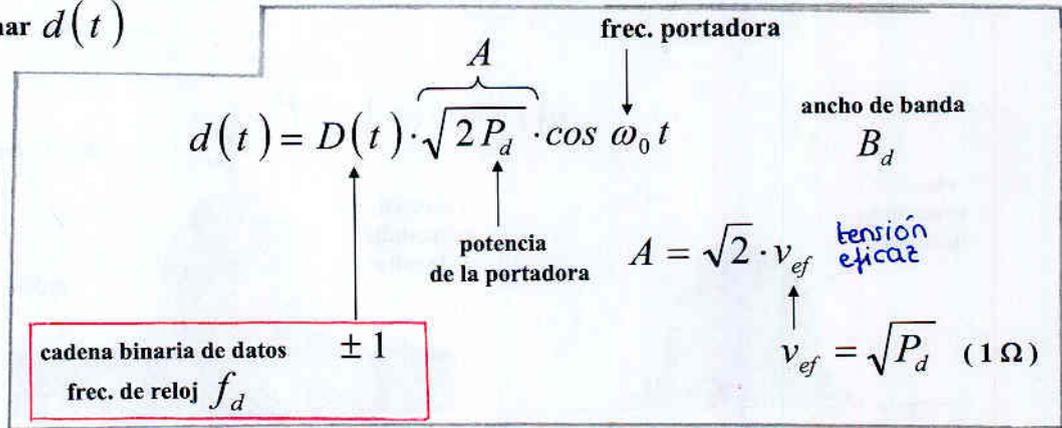
Handwritten text block, possibly a date or a specific reference.

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

# ESTRUCTURA de la SEÑAL

## Fundamento del "SPREAD SPECTRUM"

Sea la señal de datos  $D(t)$  con ancho de banda  $B_d$  la que modula una portadora para formar  $d(t)$



Multiplicando esta señal  $d(t)$  por la forma de onda  $s(t)$  se consigue la expansión del espectro a  $B_s$  donde

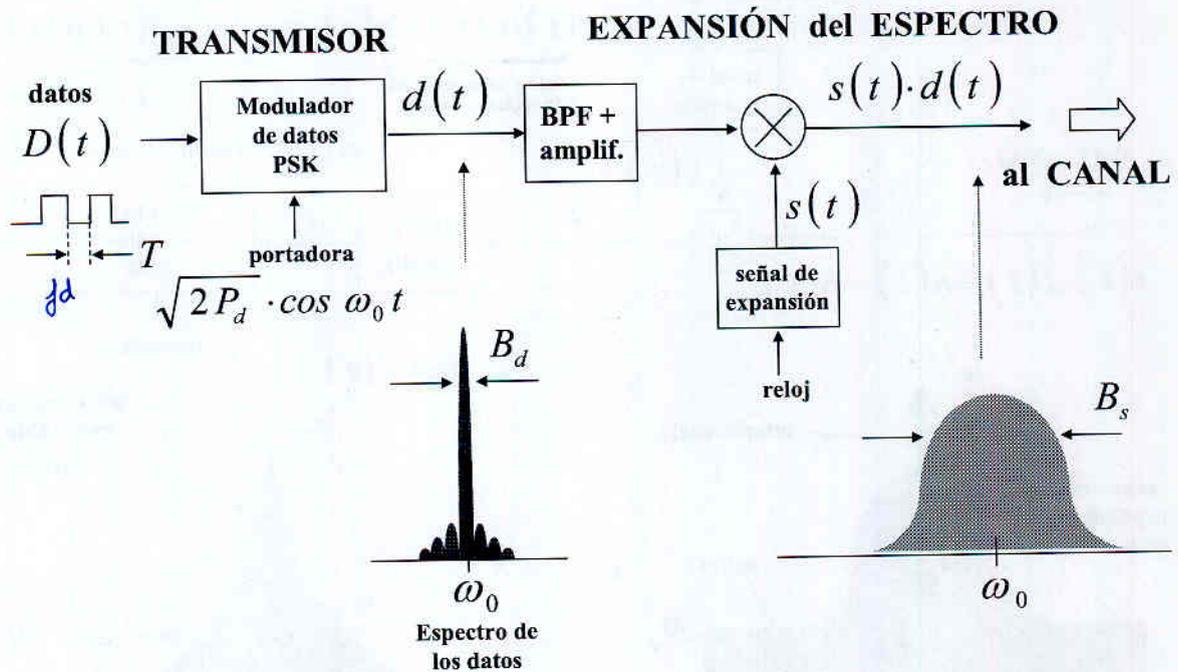
$$B_s \gg B_d$$

$$f_c \gg f_d$$

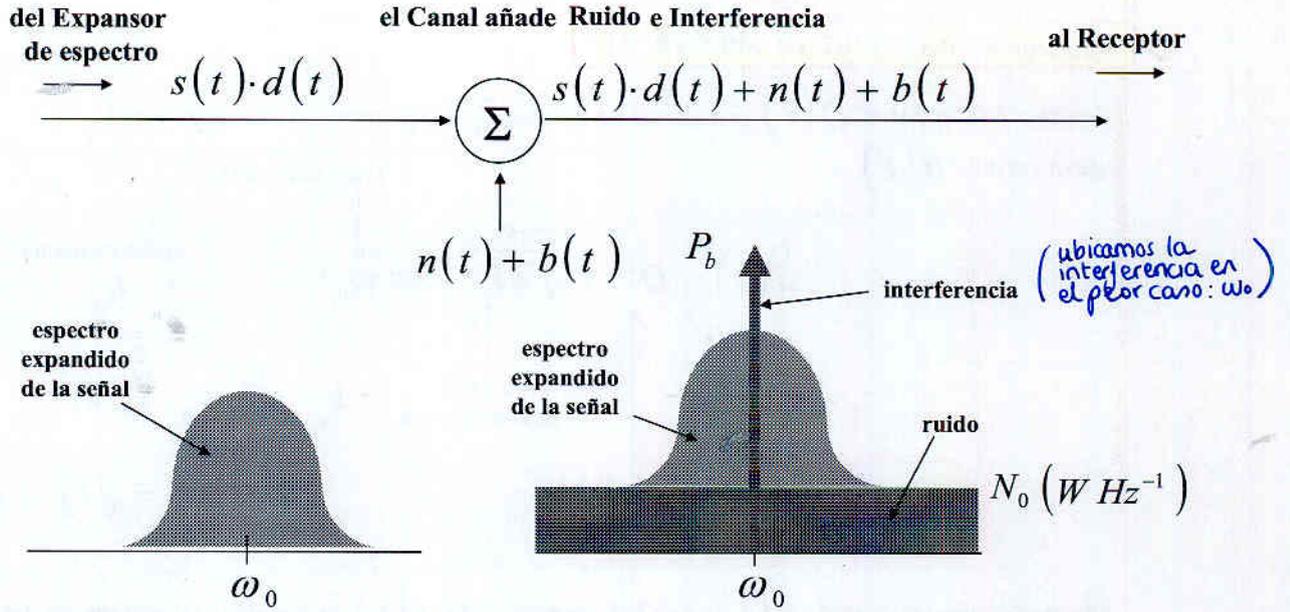
señal de banda expandida

$$s(t) = \pm 1 \text{ frec. de reloj } f_c \gg f_d$$

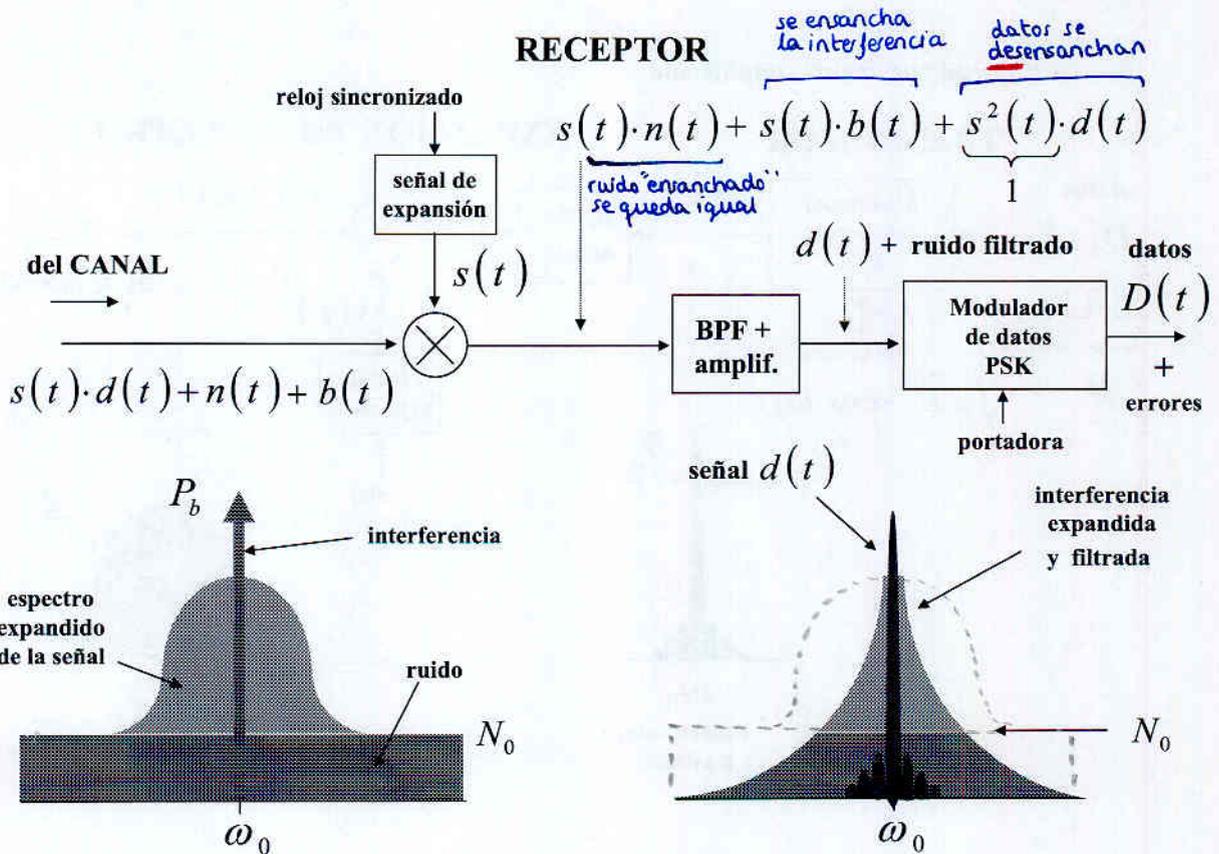
### Enlace "Spread Spectrum" simplificado

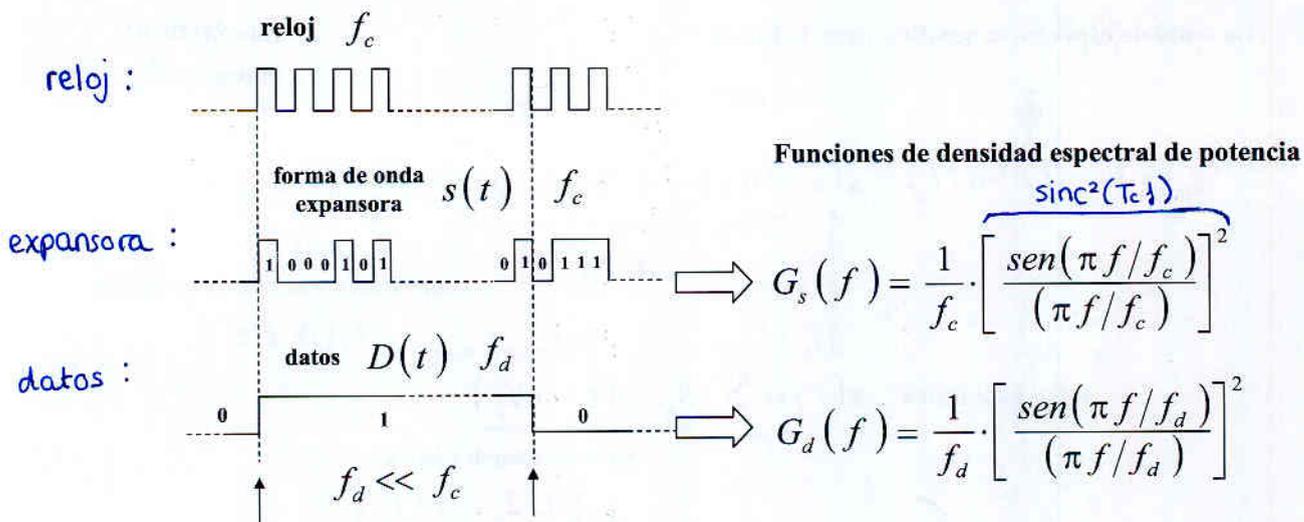


## CANAL



## RECEPTOR

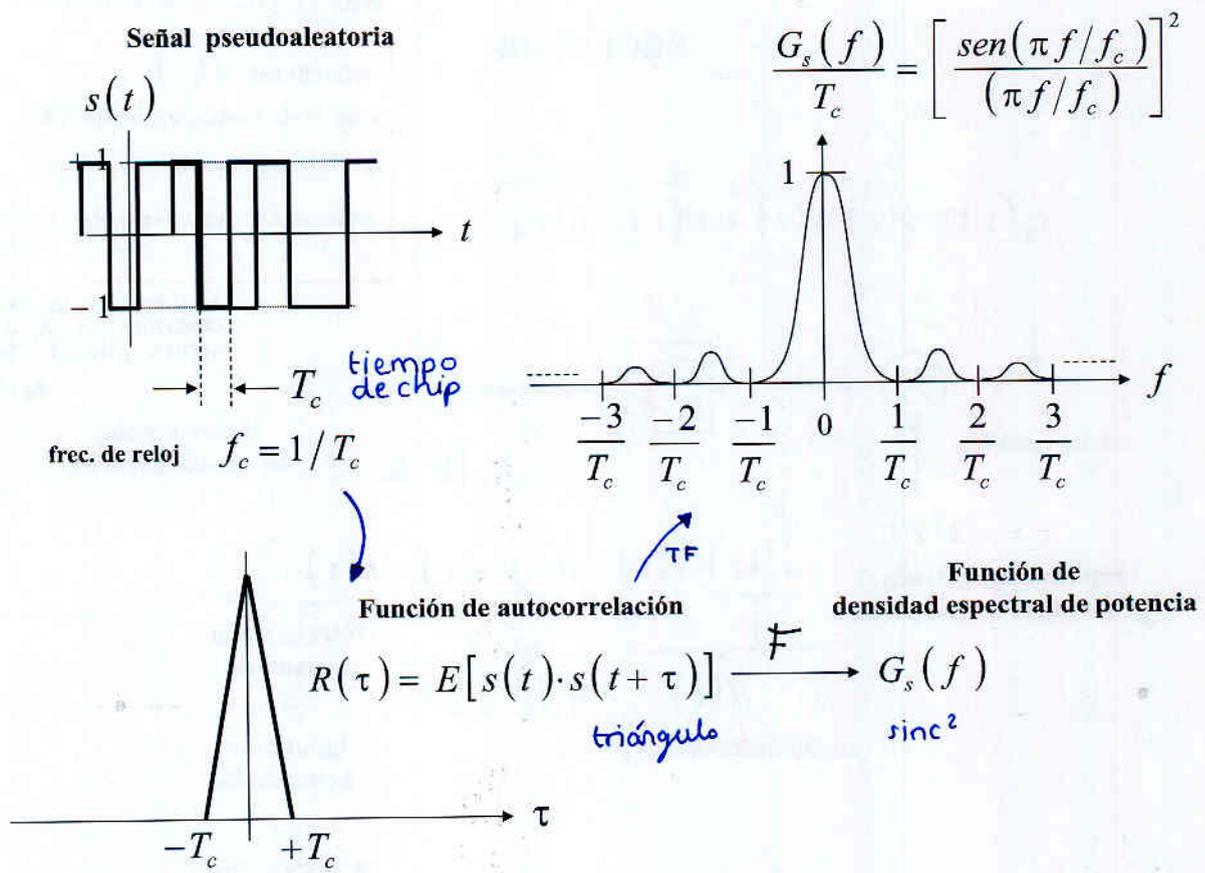




tanto los datos como la señal expansora están sincronizados con el reloj (coherencia)

$\Downarrow$

$D(t) \cdot s(t)$  tiene exactamente el mismo espectro que  $s(t)$



La señal de espectro expandido tiene la forma

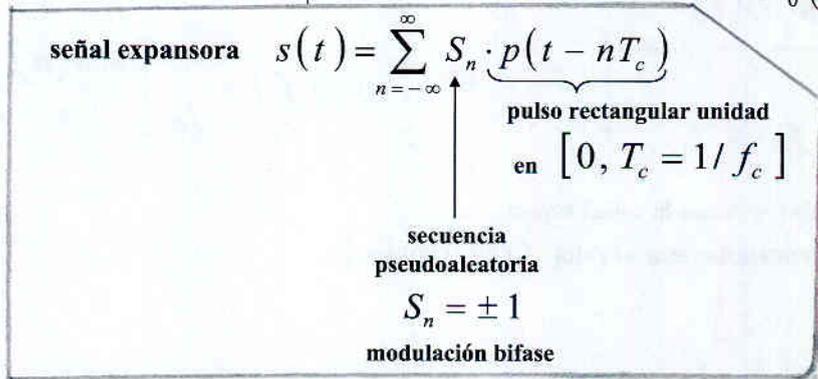
$$s_0(t) = s(t) \cdot d(t) = s(t) \cdot D(t) \cdot \sqrt{2P_d} \cdot \cos \omega_0 t + n(t) + b(t)$$

interferencia potencia  $P_b$

datos      portadora

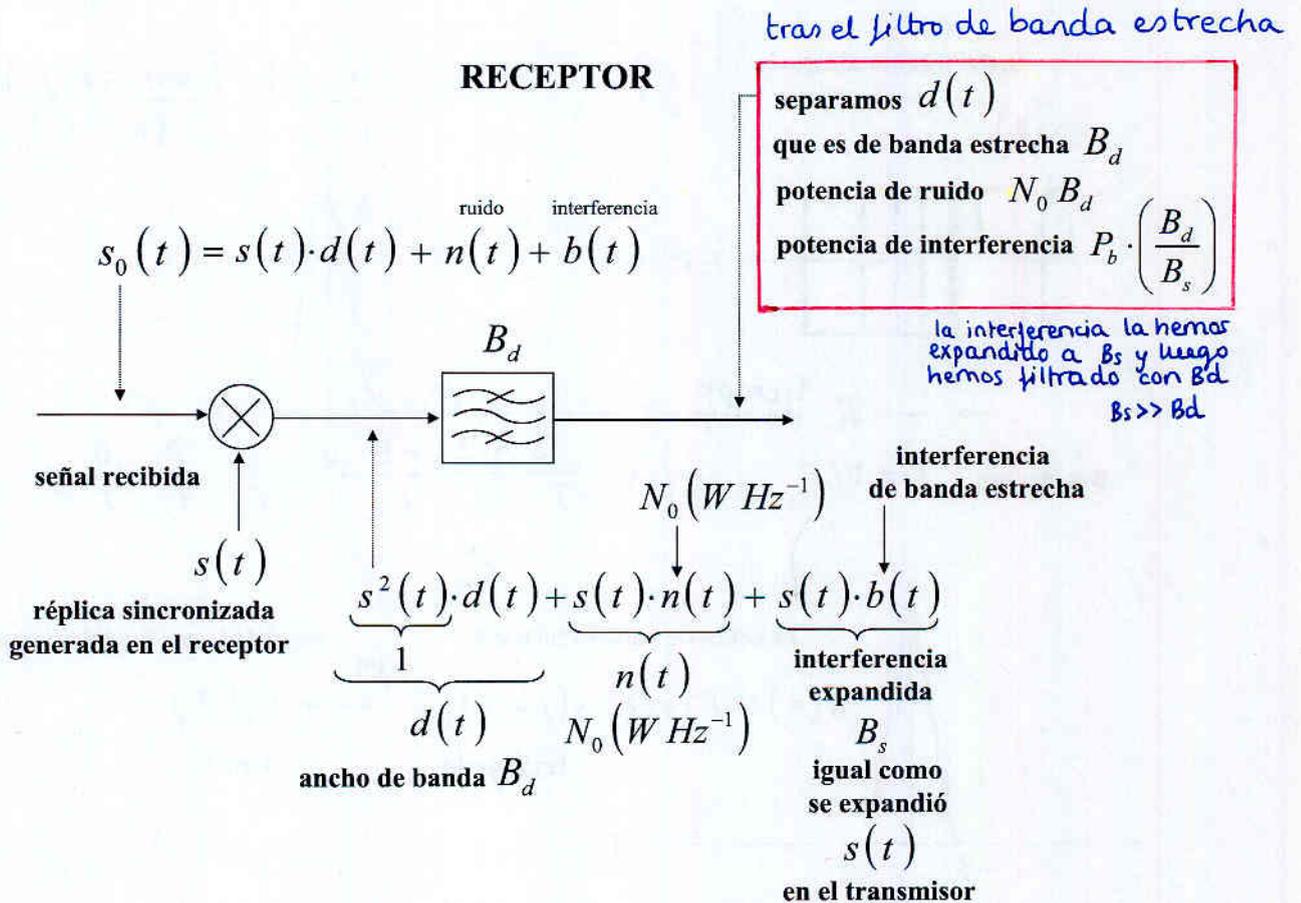
$d(t)$

ruido  
densidad espectral de potencia  $N_0 (W Hz^{-1})$



El canal añade ruido e interferencia

El receptor genera una réplica de  $s(t)$  sincronizada con la  $s(t)$  contenida en la  $s_0(t)$  recibida



El funcionamiento frente a tonos interferentes es realmente bueno, ya que la potencia del tono interferente queda reducida por la relación de velocidades de reloj  $f_c/f_d$

$$\begin{array}{l}
 \cancel{P_b} \longrightarrow \frac{P_b}{\left( \frac{f_c}{f_d} \right)} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{velocidad binaria del ruido pseudoaleatorio} \\ \longleftarrow \text{velocidad binaria de los datos} \end{array} \quad f_c \gg f_d \\
 \\
 \frac{P_b}{\left( \frac{f_c}{f_d} \right)} = \frac{P_b}{\left( \frac{B_s}{B_d} \right)} \quad B_s \gg B_d
 \end{array}$$

$\frac{f_c}{f_d}$  también se llama "ganancia de procesamiento" del "spread spectrum"

$\frac{f_d}{f_c}$  parámetro que indica cuanta fracción de potencia interferente pasa a la salida

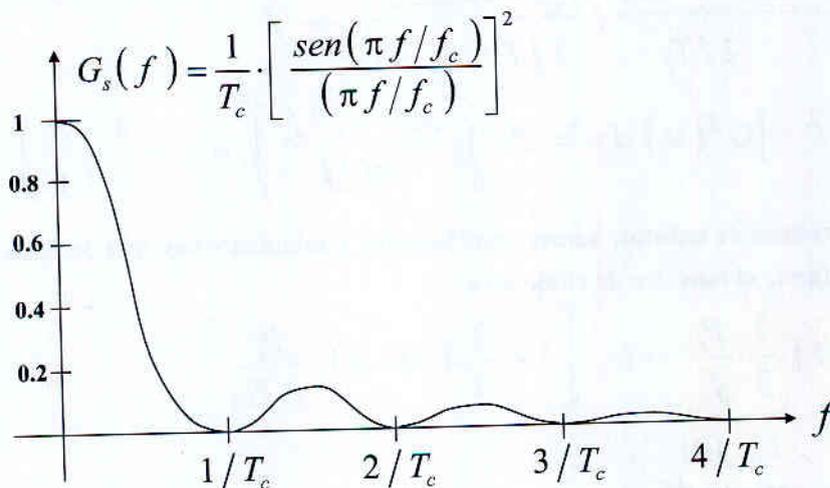
### MÚLTIPLE ACCESO con "SPREAD SPECTRUM"

Múltiples señales comparten una misma frecuencia de canal con mínima interferencia entre ellas

#### CDMA (Code Division Multiple Access)

Supongamos que recibimos por antena  $M$  señales de la misma potencia  $P_s$

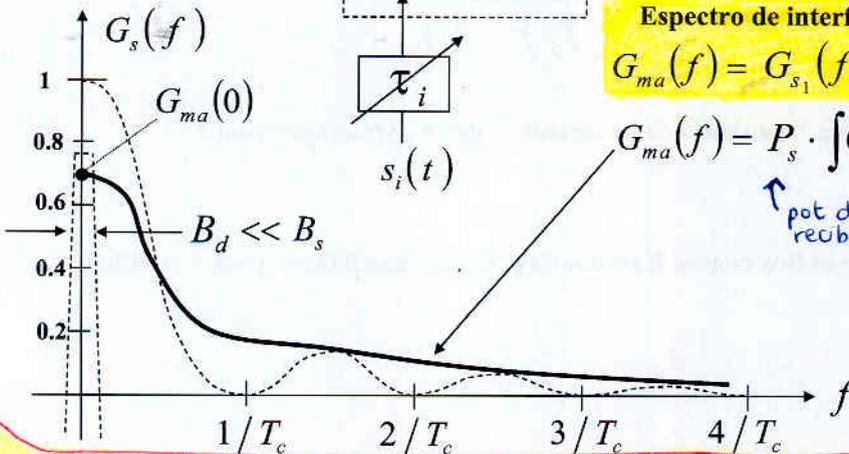
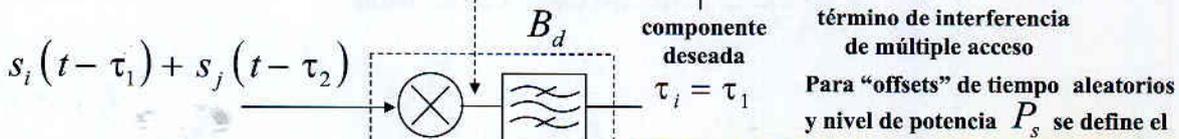
Examinando dos de ellas  $s_i(t)$ ,  $s_j(t)$  con códigos pseudoaleatorios incorrelados y con el mismo espectro  $G_s(f)$ , transmitidas a la misma frecuencia y con temporizaciones aleatorias e independientes



Para la primera señal  $s_i(t)$  el receptor correlaciona cruzadamente la suma de las dos señales recibidas  $s_i(t) + s_j(t)$  con el código de la señal deseada como referencia

Ignorando los datos que modulan las portadoras y el ruido, tendremos

$$s_i(t - \tau_i) \cdot [s_i(t - \tau_1) + s_j(t - \tau_2)] = 1 + \underbrace{s_i(t - \tau_1) \cdot s_j(t - \tau_2)}_{\text{término de interferencia de múltiple acceso}}$$



Espectro de interferencia de Múltiple Acceso

$$G_{ma}(f) = G_{s_1}(f) * G_{s_2}(f)$$

$$G_{ma}(f) = P_s \cdot \int G_s(v) \cdot G_s(v-f) dv$$

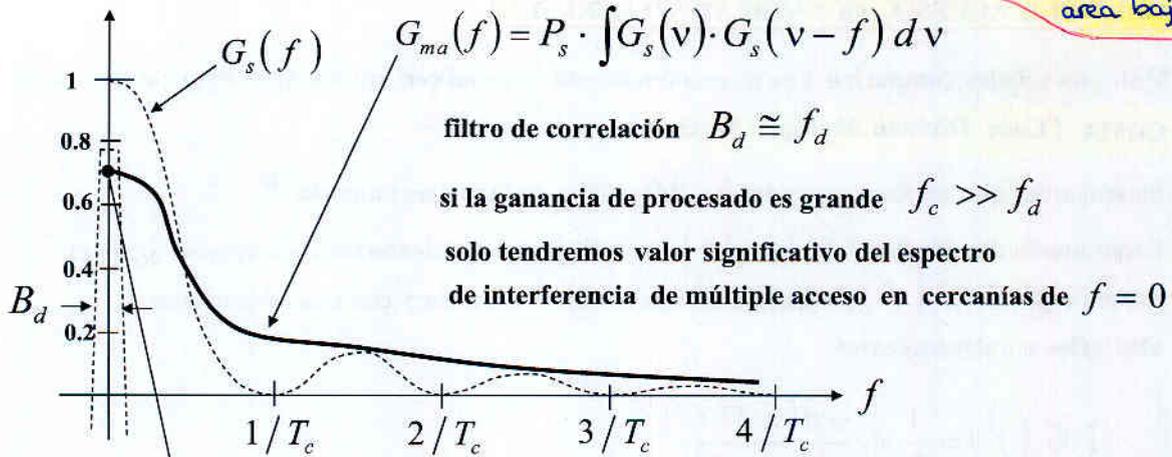
pot de la señal recibida

Es como volver a ensanchar la señal ensanchada

es tan ancha que solo nos importa el valor en cero

$$G_{ma}(f=0) = P_s \cdot G_{s_1}(f) * G_{s_2}(f) \Big|_{f=0} = P_s \int_0^\infty G_s^2(v) dv$$

area bajo sinc<sup>4</sup> =  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{f_c}$



$$G_{ma}(0) = P_s \cdot \int G_s^2(v) dv = P_s \cdot \int_0^\infty \left( \frac{\text{sen } \pi f / f_c}{\pi f / f_c} \right)^4 df = \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{P_s}{f_c} \right)$$

como tenemos  $M-1$  señales de múltiple acceso interferentes y solamente hay una deseada el efecto neto incrementando el espectro de ruido será

densidad espectral de ruido equivalente

$$N_{0eq} = N_0 + (M-1) \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{P_s}{f_c}}_{G_{ma}(0)} = N_0 \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot (M-1) \cdot \frac{P_s}{f_c N_0} \right]$$

espectro de interferencia de múltiple acceso en la frec. central

determina la "tasa de error" de salida

$$\frac{E_b}{N_{0eq}} = \frac{P_s \cdot T_d}{N_0 \left[ 1 + \frac{2}{3} (M-1) \frac{P_s}{f_c N_0} \right]} = \frac{P_s}{N_0 f_d} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{2}{3} (M-1) \frac{P_s}{f_c N_0} \right]}$$

energía por bit  
↑  
densidad espectral de ruido equivalente por múltiple acceso

Para:

- modulación bifase
- sin codificación para corrección de errores

se tolera  $\Rightarrow \frac{E_b}{N_{0eq}} \cong 10$

Por debajo de 10 la cosa va mal (si no hay técnicas de corrección de errores)

Número de señales de igual potencia para el múltiple acceso

$$\frac{E_b}{N_{0eq}} = \frac{P_s}{N_0 f_d} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{2}{3} (M-1) \frac{P_s}{f_c N_0} \right]} = 10$$

$$M < \frac{3}{2} \left( \frac{N_0 f_c}{P_s} \right) + 1 = \frac{3}{2} \left( \frac{N_0 f_c}{E_b f_d} \right) + 1 = \frac{3}{20} \left( \frac{f_c}{f_d} \right) + 1$$

$f_c \uparrow \Rightarrow M \uparrow$   
frecuencia de chips

$$M < \frac{3}{20} \left( \frac{f_c}{f_d} \right) + 1 \Rightarrow M = 3070$$

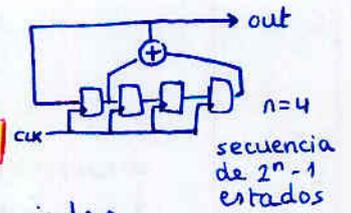
1.023 × 10<sup>6</sup> M cps en código C/A  
50 bps

Interesante en comunicaciones móviles de 3ª generación

En el caso de GPS no es ninguna limitación

nº de señales en el múltiple acceso  
↓  
En GPS, frecuentemente  $M - 1 = 9$   
↑  
la seleccionada

# GENERACIÓN de la SEÑAL de "SPREAD SPECTRUM" con LFSDR



## LFSDR (Linear Feedback Shift Register)

ejemplo:

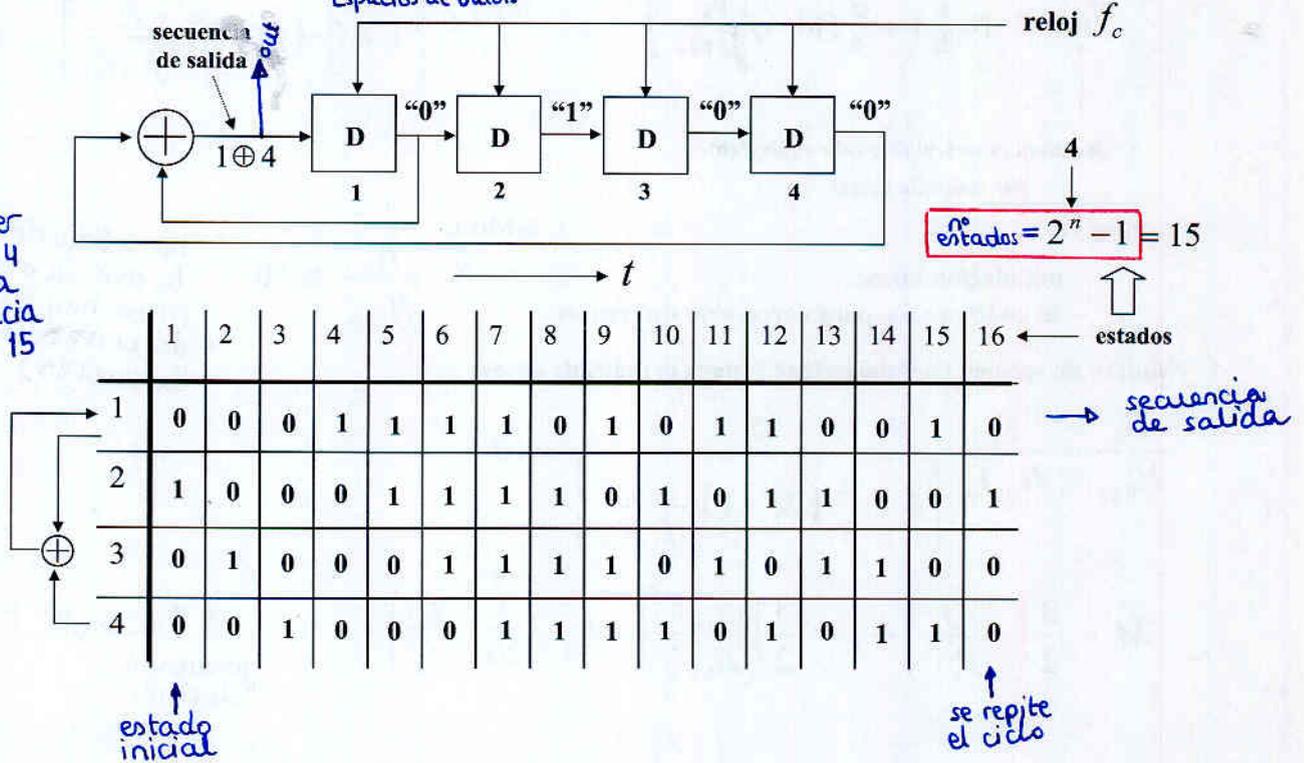
Teoría de códigos "Espacios de Galois"

$$1 + x + x^4$$

polinomio asociado a este código

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

ejemplo:  
shift register de tamaño 4 que genera una secuencia de tamaño 15



Cada estado lo representamos con un vector de estado

ejemplo:

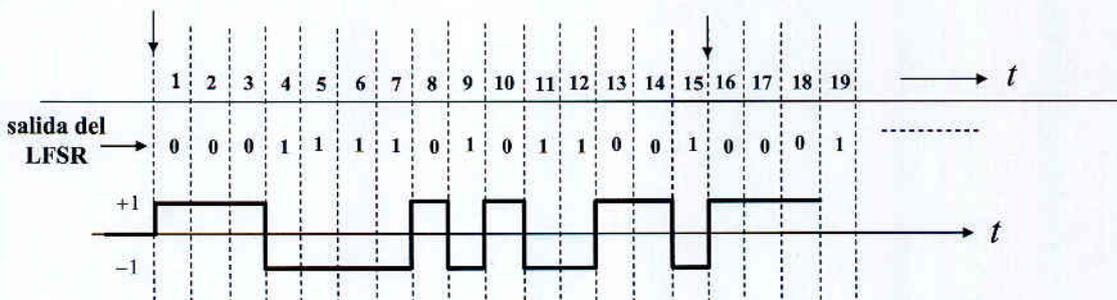
$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tan pronto como evitemos el estado "todo cero", se producirá una secuencia de  $2^4 - 1 = 15$  combinaciones o estados

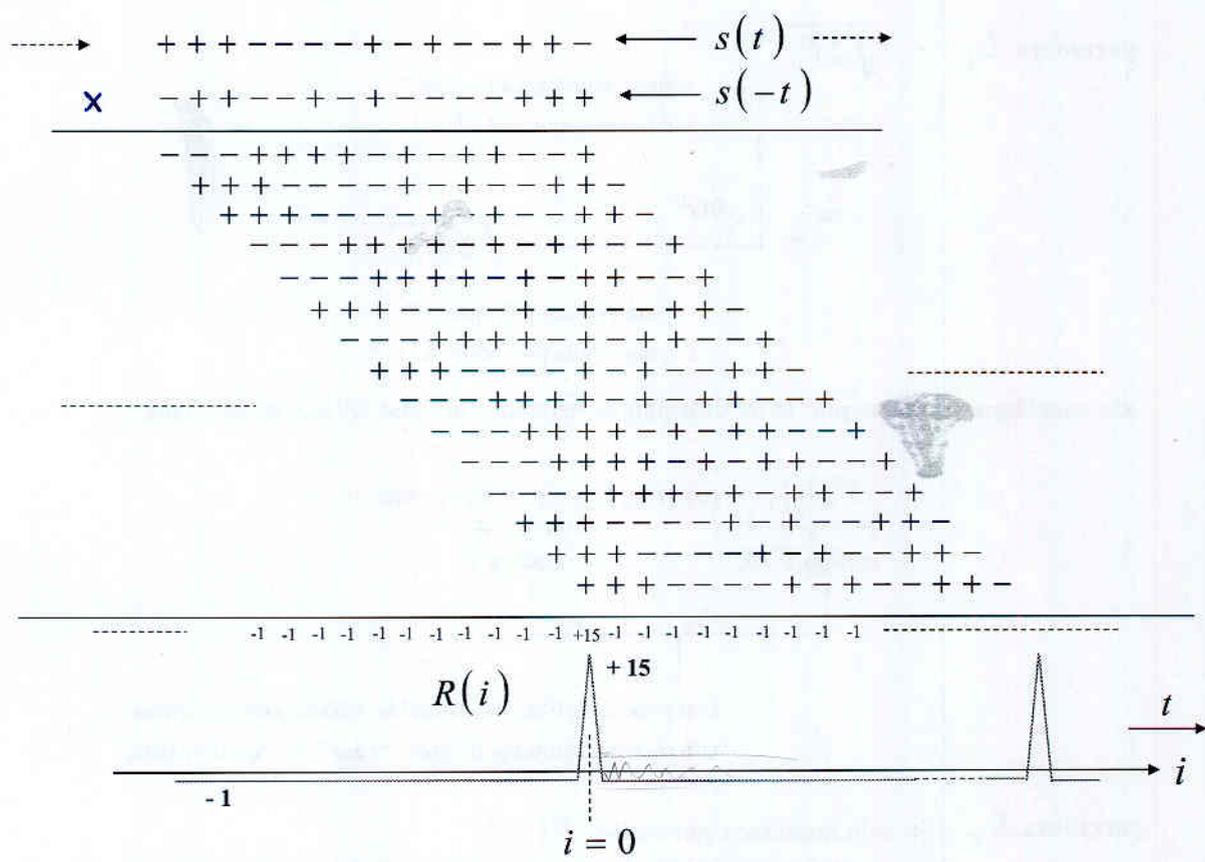
En general, para un registro de tamaño  $n \rightarrow 2^n - 1$  estados

Autocorrelación de una secuencia PN (Pseudo-random Noise) donde  $s(t) = \pm 1$

$$R(i) = \frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} s(t) \cdot s(t+i) dt$$



# Autocorrelación de la secuencia PN (Pseudorandom Noise)



cuando la señal modula esta secuencia (cambiandole la polaridad a la secuencia o no según se tx 0 ó 1), al hacer la correlación saldrían los picos con una u otra polaridad, correspondiente a los bits del mensaje

## ESTRUCTURA de la SEÑAL GPS

- Para usuarios autorizados ( militares )

error de posición ( rms ) < 10 m

si PDOP  $\cong$  3  $\implies$  error en la medida de la pseudodistancia ( rms ) < 11 ns

“ ranging signal ” en código P a 10.23 Mcps ( i.e. masterclock )

“ chip ” y no “ bit ” de información

el código P suele encriptarse AS AntiSpoof  $P(Y) \longrightarrow Y$

Así un enemigo no puede engañarles haciéndose pasar por "satélite"

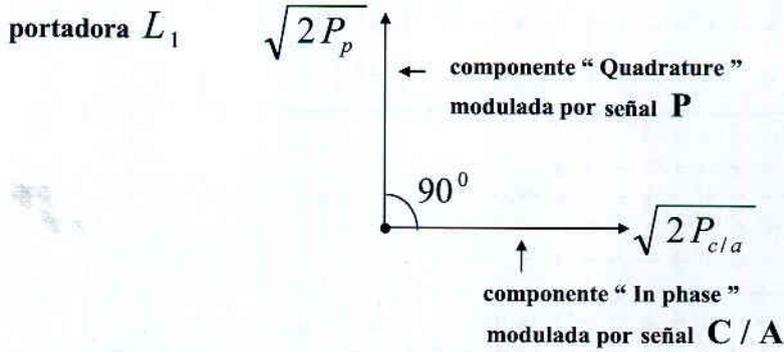
- Para usuarios civiles

“ ranging signal ” en código C/A ( Coarse / Acquisition ) a 1.023 Mcps

los usuarios civiles no tienen acceso al código P

Ambas señales están multiplexadas sobre una misma portadora  $L_1$  ( 1575.42 MHz )

Para usar el código P primero hay que usar el C/A (por eso se llama Acquisition)  
 Ya que el código P dura una semana, es impensable el procedimiento de sincronizar el código generado en el rx con el transmitido por decalaje (DWT).  
 Por tanto la info de C/A incluye datos para ayudar a sincronizar el código P



sin considerar el efecto por la modulación de los datos la señal GPS es de la forma

$$\underbrace{X G_i(t)}_{\text{código C/A}} \cdot \cos \omega_0 t + \underbrace{X P_i(t)}_{\text{código P}} \cdot \sin \omega_0 t$$

todavía se aplica modulación bifase con los datos sobre ambas componentes "fase" y "cuadratura"

portadora  $L_2 \rightarrow$  solo modulada por código P(Y)  
puede haber, o no haber modulación con los datos de navegación

### CORRECCIÓN IONOSFÉRICA

Se requieren las dos frecuencias

$$L_1 = 1575.42 \text{ MHz} = 154 \times 10.23 \text{ MHz}$$

$$L_2 = 1227.6 \text{ MHz} = 120 \times 10.23 \text{ MHz}$$

Master clock

relación de coherencia

Guardan relación de coherencia respecto al master clock :

- las portadoras de RF
- la frecuencia de reloj para generar las señales de código (10'23 Mchips/s / 1'023 Mchips/s)
- los datos del mensaje de navegación (50 bps)

La separación entre  $L_1$  y  $L_2$  es de 347.82 MHz ó del 28.3%, lo suficiente para poder estimar el retardo de grupo ionosférico

retardo diferencial

$$\Delta \tau = \tau_{GD L_2} - \tau_{GD L_1} = \frac{A}{f_{L_2}^2} - \frac{A}{f_{L_1}^2} = \frac{A}{1.5457 \cdot f_{L_1}^2}$$

$$\tau_{iono} = \tau_{GD L_1} = \frac{A}{f_{L_1}^2}$$

$\tau_{iono} = 1.54573 \cdot \Delta \tau$

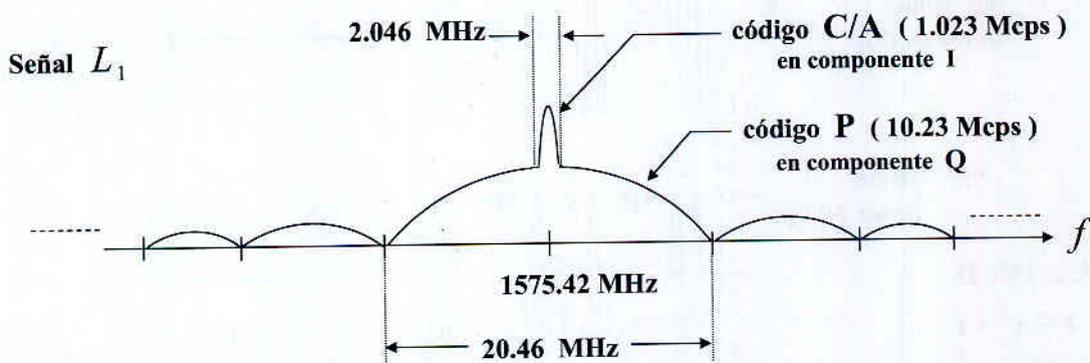
retardo diferencial entre  $L_1$  y  $L_2$  medible !

aproximación de primer orden del efecto ionosférico

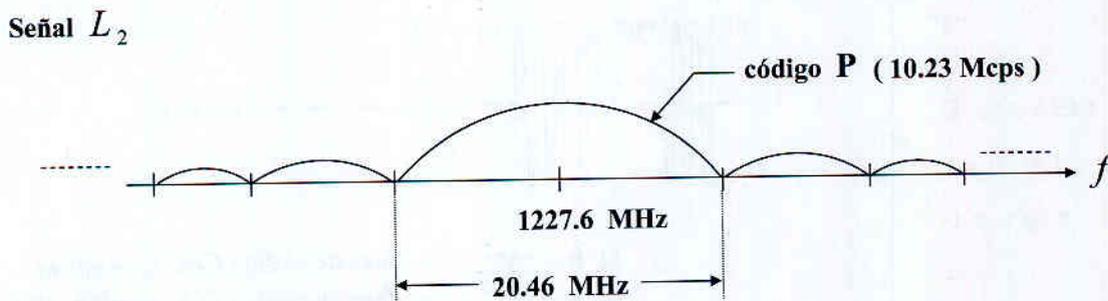
recuerda que no es EXACTAMENTE 10'23 MHz para compensar la ionosfera

Transit ya operaba con 2 frecuencias para compensar la ionosfera

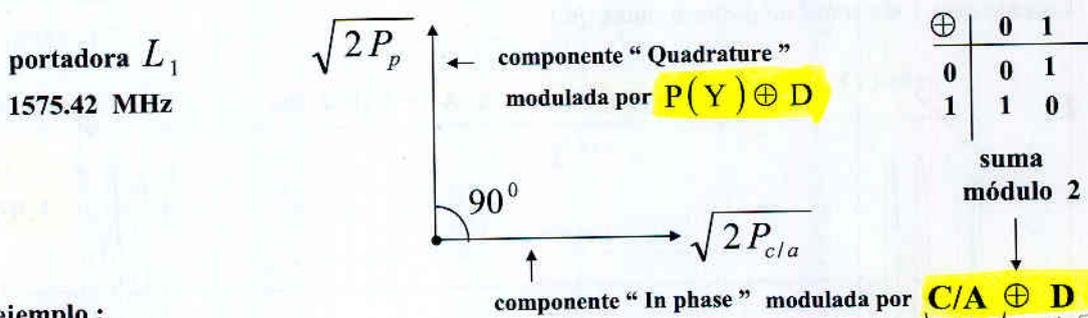
DENSIDADES ESPECTRALES de POTENCIA  $\propto \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2$



en realidad esto está por debajo del nivel de ruido

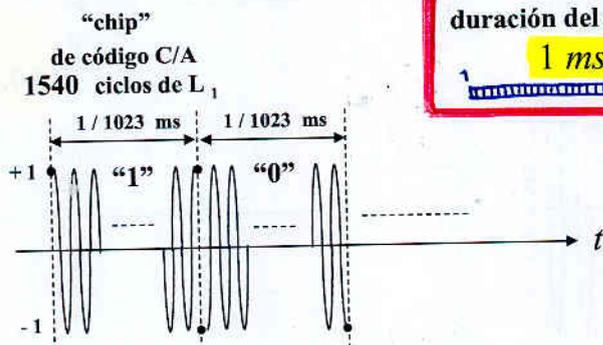


MODULACIÓN por la SEÑAL de CÓDIGO y por la SEÑAL de DATOS



ejemplo :

veamos dos "chips" de la secuencia de código C/A



**Código C/A**

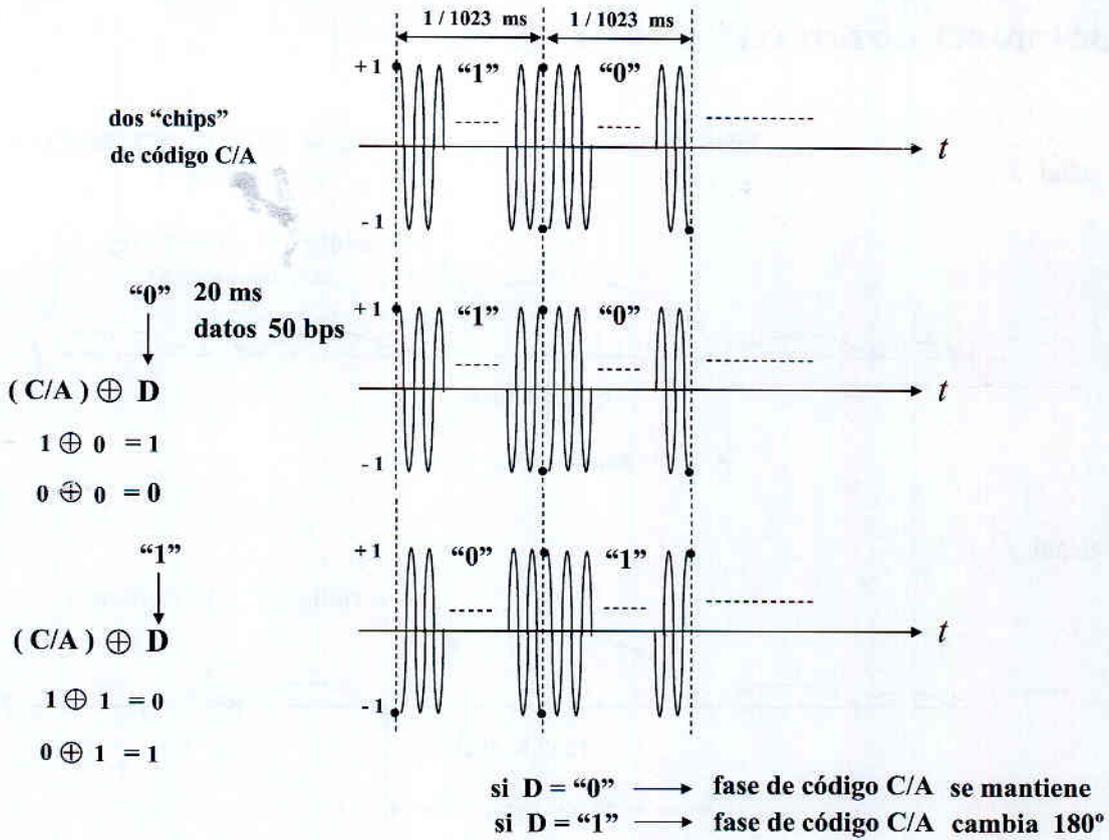
duración del código **1 ms**

$f_c = 1.023 \text{ Mcps}$

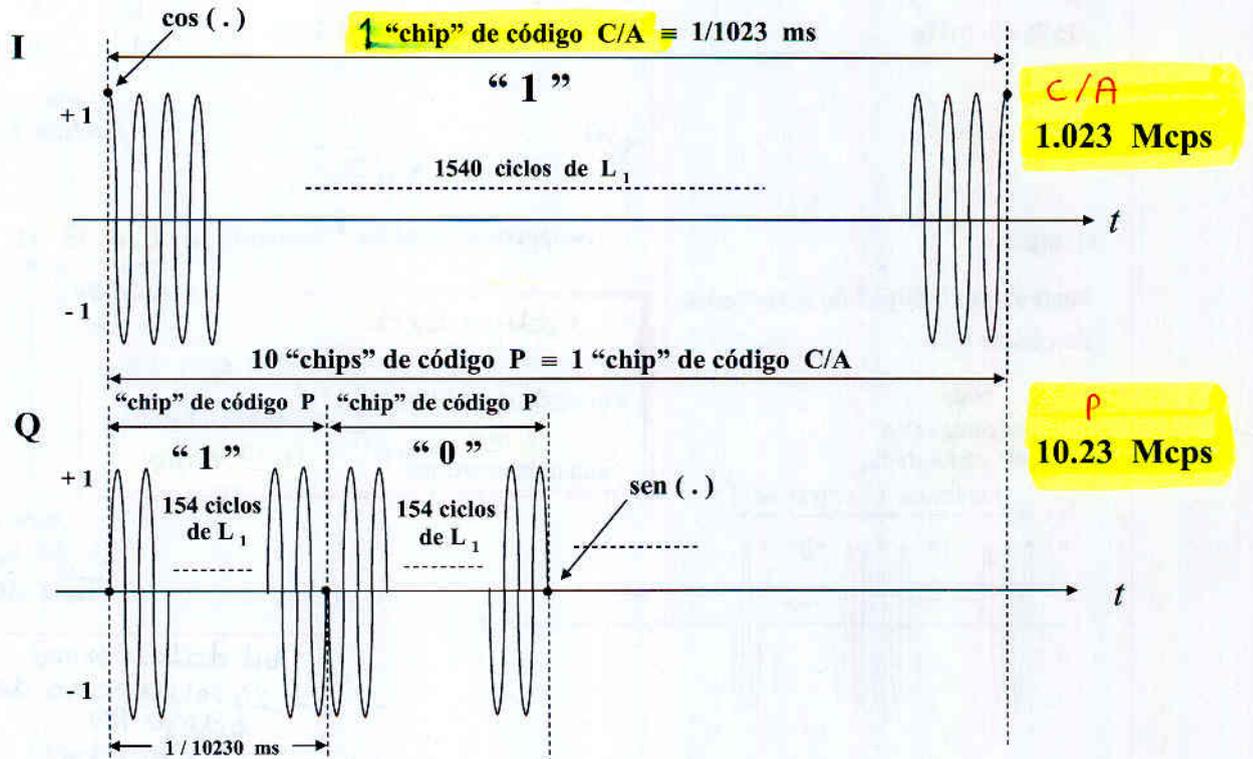
tamaño del código **1023 chips**

datos 50 bps  
 $T_b = 20 \text{ ms}$

1 bit datos (20 ms)  
= 20 secuencias de código PN  
(20 x 1023 chips)  
i.e. 20 picos en la autocorrelación



Representación temporal de las componentes I-Q de  $L_1$  moduladas por las señales de código únicamente (sin señal de datos o mensaje) " ranging signals "



**Expresión analítica :**

$$S_{L_1 i}(t) = \sqrt{2P_{c/a}} \cdot \underbrace{XG_i(t)}_{\substack{\text{señal de código} \\ \text{C/A} \\ \text{"gold code"} \\ 1023 \text{ chips} \equiv 1 \text{ ms} \\ 1.023 \text{ Mcps}}} \cdot \underbrace{D_i(t)}_{\substack{\text{datos a 50 bps} \\ 1 \text{ bit} \equiv 20 \text{ ms}}} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi) + \sqrt{2P_p} \cdot \underbrace{XP_i(t)}_{\substack{\text{secuencia} \\ \text{pseudoaleatoria} \\ 10.23 \text{ Mcps}}} \cdot \underbrace{D_i(t)}_{\substack{\text{ruido de fase} \\ \text{del oscilador}}} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi)$$

potencia de la componente fase

$$P_{c/a}(\text{dBm}) = P_p(\text{dBm}) + 3 \text{ dB (el doble)}$$

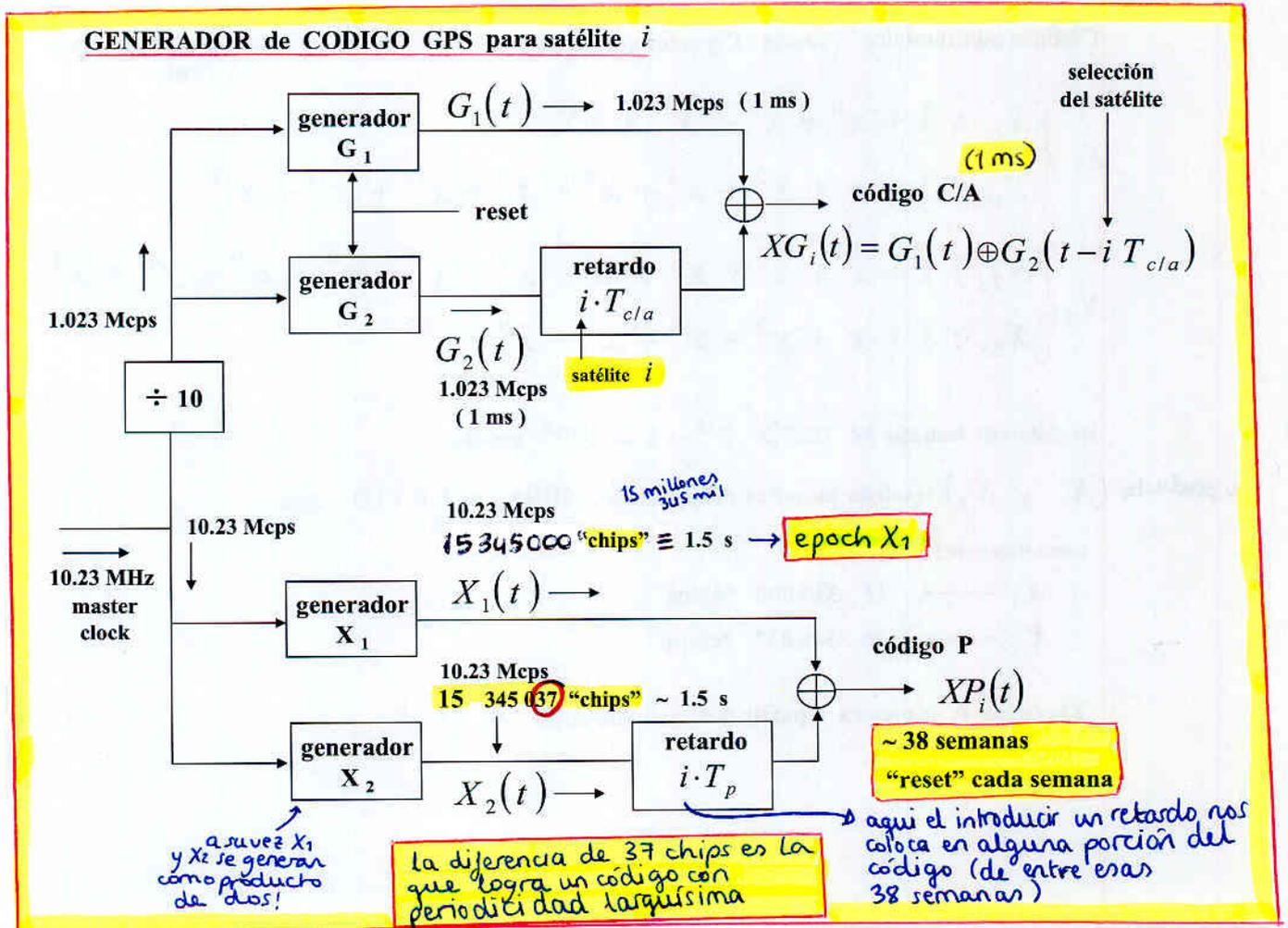
los códigos C/A y P son de los llamados del tipo "producto" → diferentes retardos entre subcódigos factores

$$T_{c/a} = 10 \cdot T_p$$

duración del "chip" en código C/A      duración del "chip" en código P

determina el código específico de cada satélite

*i.e. se sintetiza el código de cada satélite como producto de dos subcódigos (uno de ellos con un retardo específico para cada satélite)*



## CÓDIGO P (código de precisión)

Para cada satélite  $i$ , lo obtenemos a partir del producto de dos códigos PN  
(PN = Pseudo-random Noise),  $X_1(t)$ ,  $X_2(t + n_i T)$

$X_1$  → periodo ~ 1.5 s ó 15,345 000 "chips"

$X_2$  → periodo ~ 1.5 s ó 15,345 037 "chips"

ambas secuencias se "resetean" al empezar la semana (sábado → domingo, 00:00:00)  
en el mismo instante "epoch  $X_1$ " (marca de 1.5 s)

GPS tiene un "segundero" de 1.5 seg.

ambas tienen un "chip rate"  $f_p = \frac{1}{T_p} = 10.23 \text{ MHz}$  (master clock)

$$XP_i(t) = \underbrace{X_1(t)}_{\pm 1} \cdot \underbrace{X_2(t + n_i T)}_{\pm 1} \quad 0 \leq n_i \leq 36$$

cada uno se generan con dos  
LFSR (Linear Feedback Shift Register)  
de 12 etapas

A su vez  $X_1$  y  $X_2$  se generan  
mediante producto de subcódigos

Códigos polinomiales (teoría: Espacios de Galois)

el polinomio nos da  
las posiciones de realimentación  
del LFSR

$$X_1 \begin{cases} X_{1A} : 1 + x^6 + x^8 + x^{11} + x^{12} \\ X_{1B} : 1 + x + x^2 + x^5 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} \end{cases}$$

$$X_2 \begin{cases} X_{2A} : 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} \\ X_{2B} : 1 + x + x^3 + x^4 + x^8 + x^9 + x^{12} \end{cases}$$

Registro de tamaño 12  $\implies 2^{12} - 1 = 4095$  estados

Los productos ( $X_1$  y  $X_2$ ) tendrán tamaños del orden de  $4095^2 \approx 1.6 \cdot 10^7$  chips

concretamente:

$X_1$  → 15,345 000 "chips"

$X_2$  → 15,345 037 "chips"

El código P se genera a partir del producto entre  $X_1$  y  $X_2$

$$15,345,000 \times 15,345,037 = 2.35469592765 \times 10^{14} \text{ chips}$$

a razón de 10.23 Mcps tenemos un periodo de  $\approx 38$  semanas

Cada semana se aplica un "reset" al generador de código P

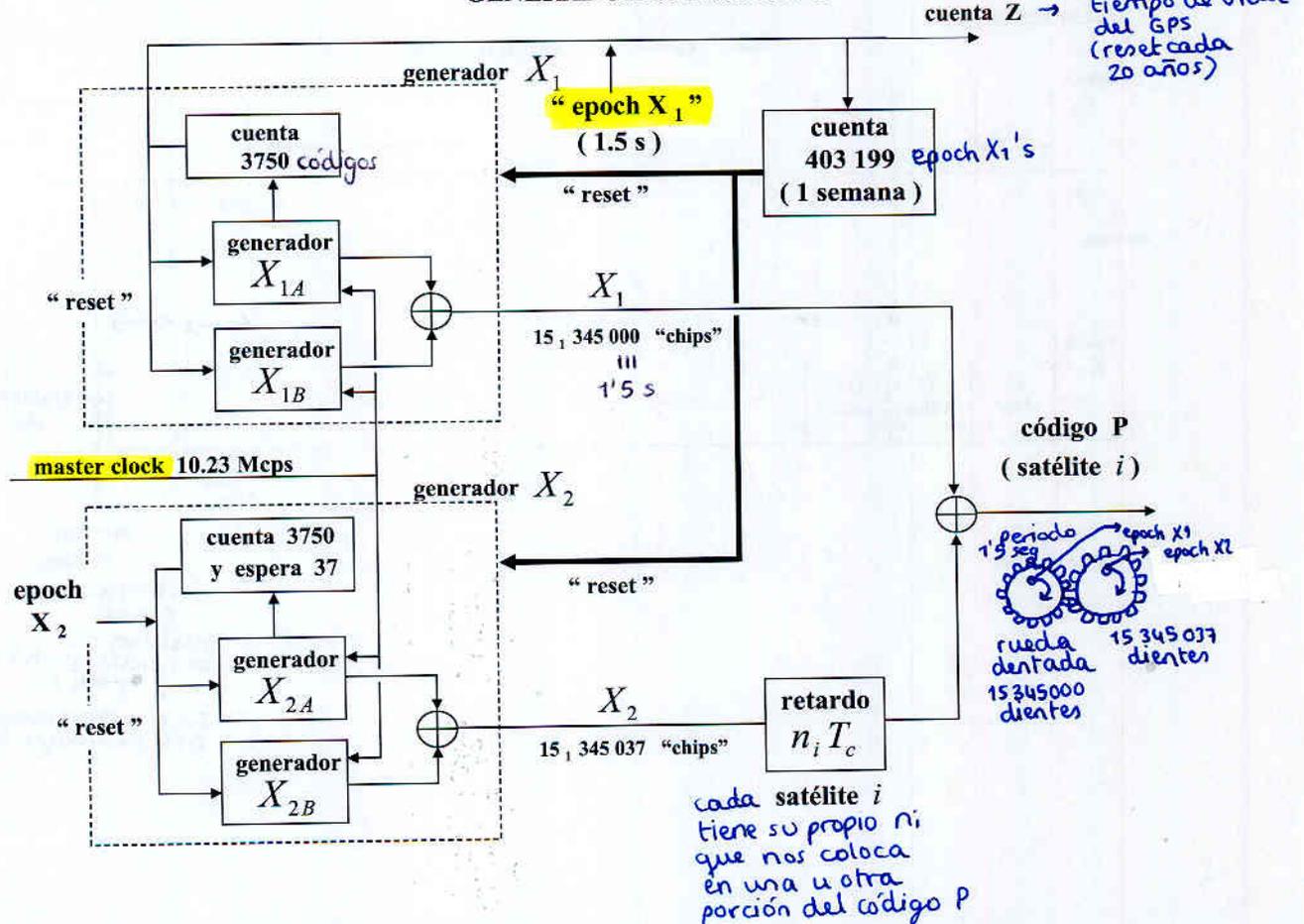
(sábado  $\rightarrow$  domingo, 00:00:00)

en este reset El tiempo GPS se ajusta al tiempo UTC

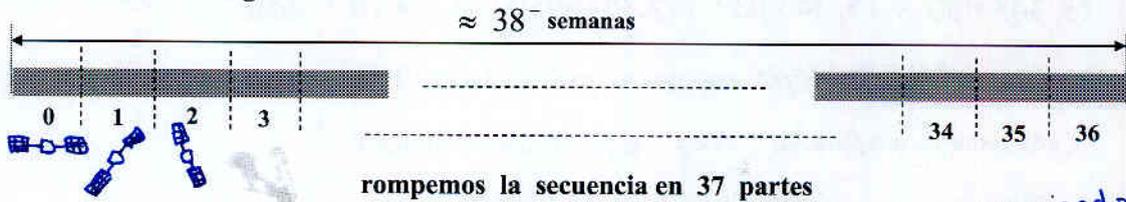
↑  
**Tiempo Universal Coordinado**  
 Utilizado por  
 U.S. Naval Observatory  
 referenciado al tiempo en  
 el meridiano de Greenwich  
 Sujeto a correcciones de  $0.5 \text{ s} \pm 1 \text{ s}$   
 $\pm$  cada 6 ó 12 meses  
 (leap seconds)  
para ajustarse al tiempo sideral

hace que el GPS no pueda usar directamente el tiempo UTC  
 pero en el mensaje GPS se manda modelo para convertir el tiempo GPS en tiempo UTC

### GENERADOR de CÓDIGO P



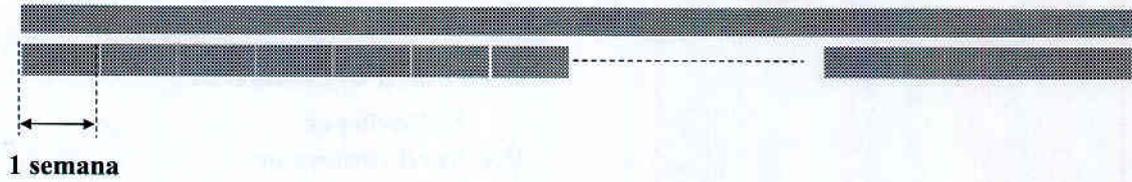
### Generación del código P



rompemos la secuencia en 37 partes

hacemos que cada satélite genere una porción del código P

*escogiendo el retardo de  $X_2$*



El offset  $n_i T_c$  aplicado por el satélite  $n_i$  determina el segmento de código P que genera

$$0 \leq n_i \leq 36 \implies 37 \text{ segmentos}$$

En el mensaje de navegación existe un campo "HOW" para facilitar la adquisición del código P

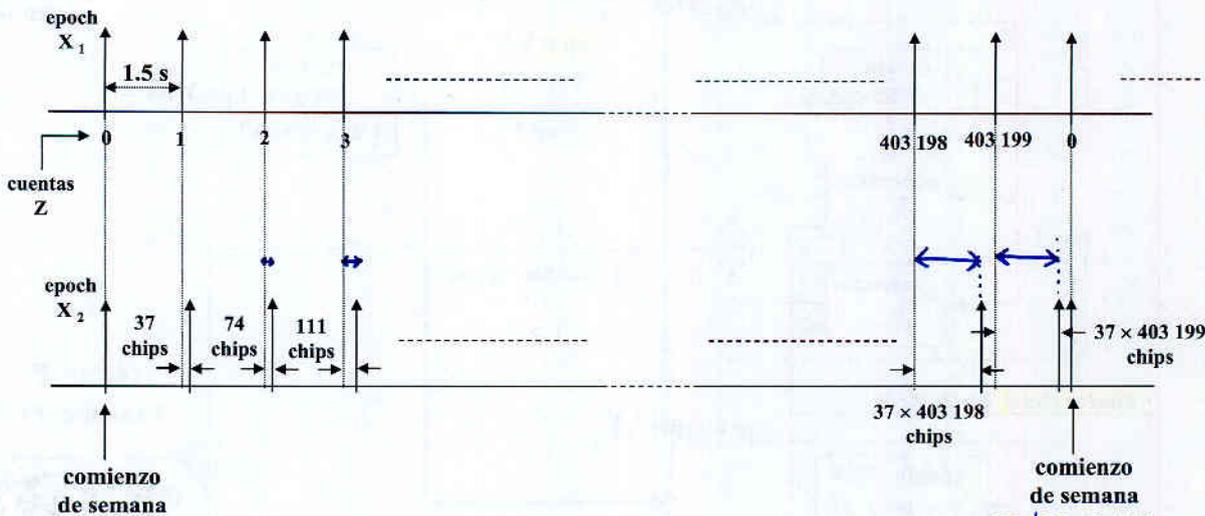
*↑  
obtenido al decodificar los datos en C/A*

↓  
Hand Over Word

*(para no tener que hacer la adquisición con el DLL ajustando el decalaje hasta un pico de la autocorrelación)*

### Cronograma

Los "epoch  $X_1$ " están a 1.5 s



*aún no ha superado los 1'55*

- vuelven a coincidir epoch  $X_1$  y epoch  $X_2$*
- se ajusta tiempo GPS al tiempo UTC*

## CÓDIGO C/A ( Coarse / Acquisition )

Se genera con LFSRs ( Linear Feedback Shift Register ) de tamaño 10

Tamaño de la secuencia  $2^{10} - 1 = 1023$  chips

“Chip rate” 1.023 Mcps  $\Rightarrow$  periodo 1 ms código corto !

para facilitar la adquisición

función de autocorrelación  
con lóbulos secundarios bajos

Los códigos C/A son una familia de códigos llamada “Gold Codes” formados por el producto de dos códigos PN ( Pseudo-random Noise ) de 1023 chips,  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  dando lugar a un código de 1023 chips.

$$XG(t) = \overbrace{G_1(t)}^{1023 \text{ chips}} \cdot \overbrace{G_2[t + N_i(10 \cdot T_c)]}^{1023 \text{ chips}}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 offset de fase en “chips C/A” entre  $G_1(t)$  y  $G_2(t)$       duración del “chip” en código P

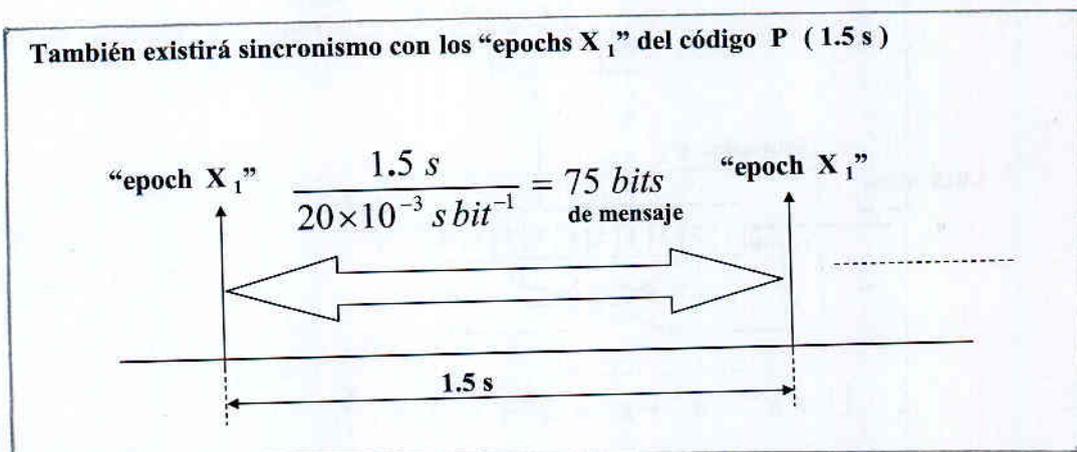
$$G_1 : G_1(x) = 1 + x^3 + x^{10}$$

$$G_2 : G_2(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

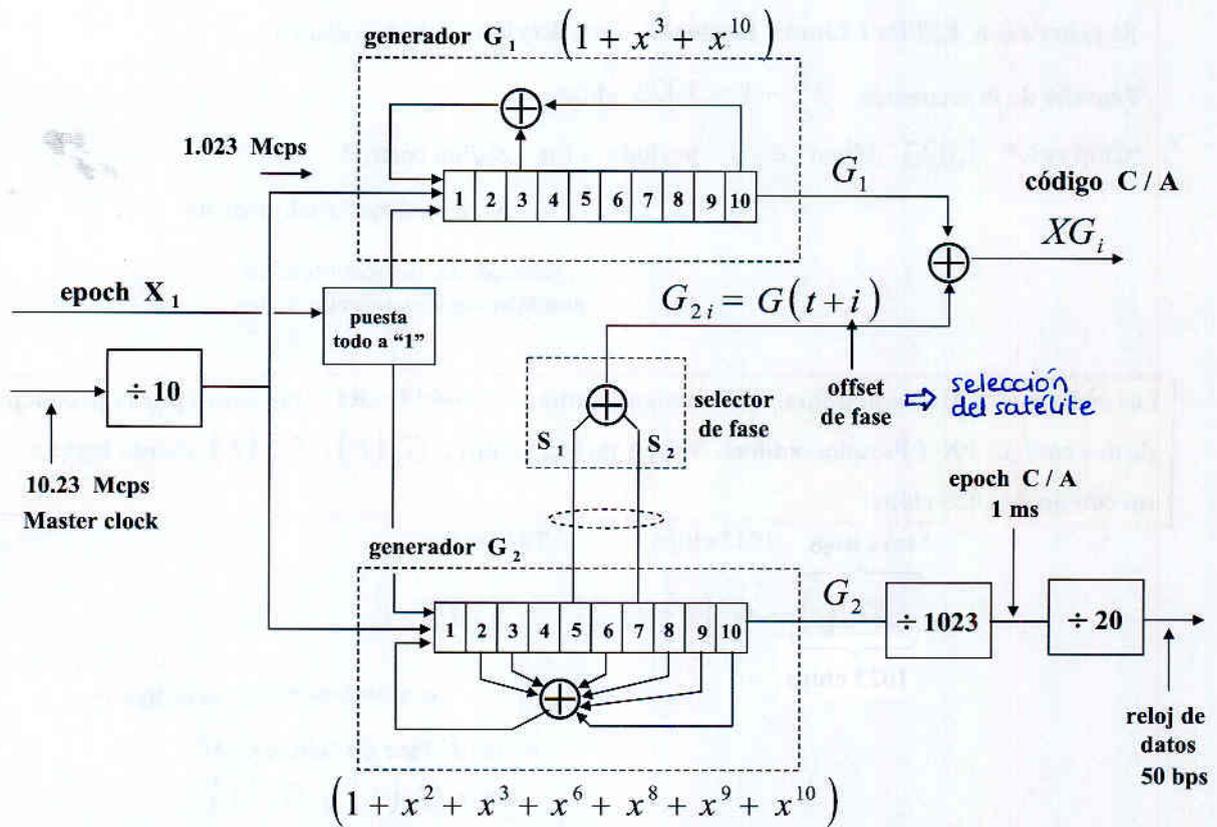
El mensaje de navegación a 50 bps está sincronizado con el periodo del “Gold Code” de 1 ms

$$\frac{1}{50 \text{ bps}} = 0.02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

Cada bit ( datos del mensaje de navegación ) corresponde a 20 “epochs” de código C/A



# GENERACIÓN de los códigos C/A



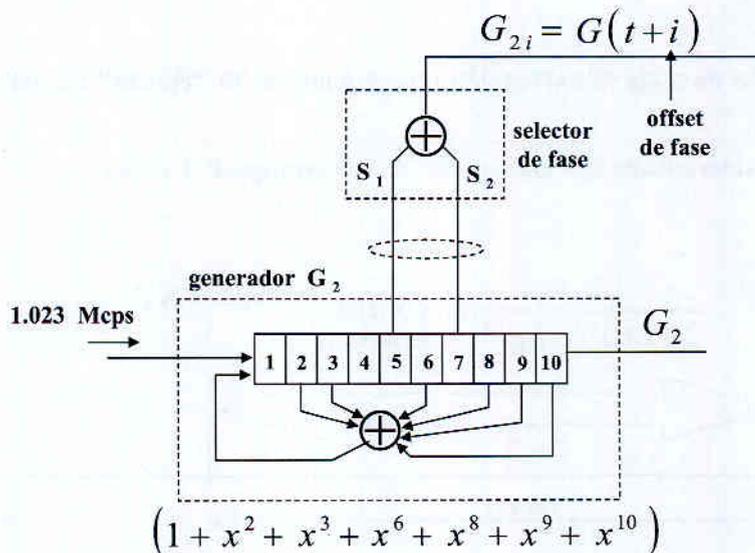
$G_2$  es del tipo LMLSR (Linear Maximal Length Shift Register)

poseen la propiedad "cycle - and - add"



La suma de dos versiones decaladas en el tiempo de un mismo código proporciona una versión desplazada del mismo (es lineal)

LFSR  $\equiv$  Linear Feedback Shift Register



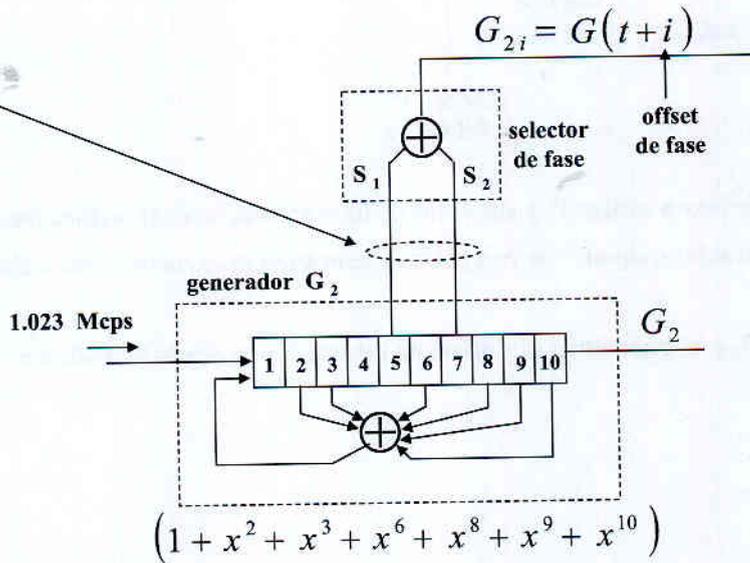
las posibles posiciones del selector de fase serían :

$$C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45$$

de los que solamente se utilizan 37 (norma GPS- ICD-200)

combinaciones de 10 elementos tomados de 2 en 2 (no importa el orden)

*secuencias disponibles*

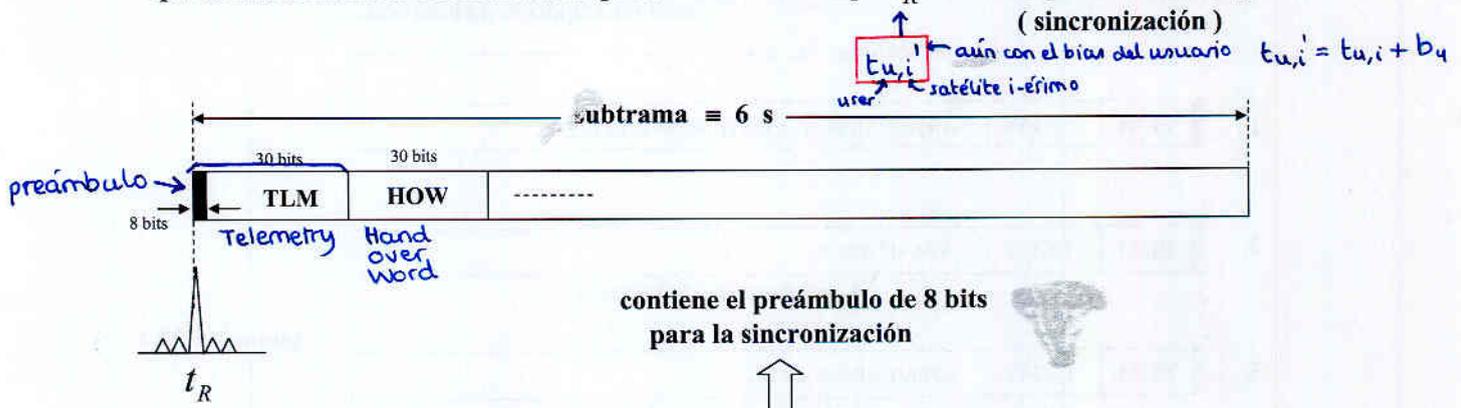


GPS - ICD - 200

identificador del satélite	selección de fase para código $G_2$
1	$2 \oplus 6$
2	$3 \oplus 7$
3	$4 \oplus 8$
4	$5 \oplus 9$
5	$1 \oplus 9$
...	...
30	$2 \oplus 7$
31	$3 \oplus 8$
32	$4 \oplus 9$
33	} ground transmitters "pseudolites"
...	
37	

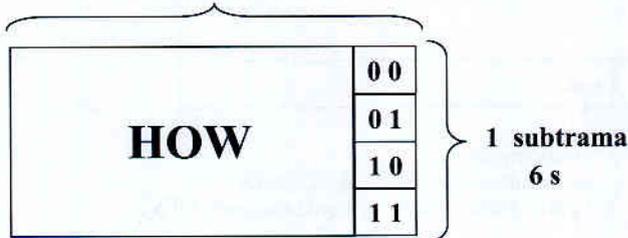


Los 8 bits de preámbulo, se repiten en cada subtrama, se trata un código de Barker que al autocorrelarse en un filtro adaptado marca el tiempo  $t_R$  de la recepción del mensaje (sincronización)



Las palabras 1 y 2, son las palabras de TELEMETRÍA y la HANDOVER WORD

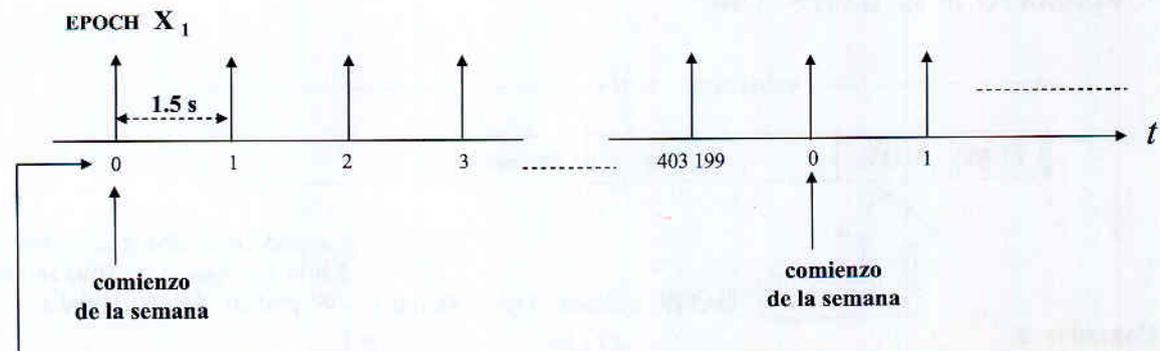
**TOW**  $\equiv$  Time of Week



para enganchar de manera síncrona con la generación de código P

Marca el instante de transmisión  $t_T$

$t_{s,i} = t_{s,i} + \Delta b_i$   
 ↓  
 se indica en el mensaje

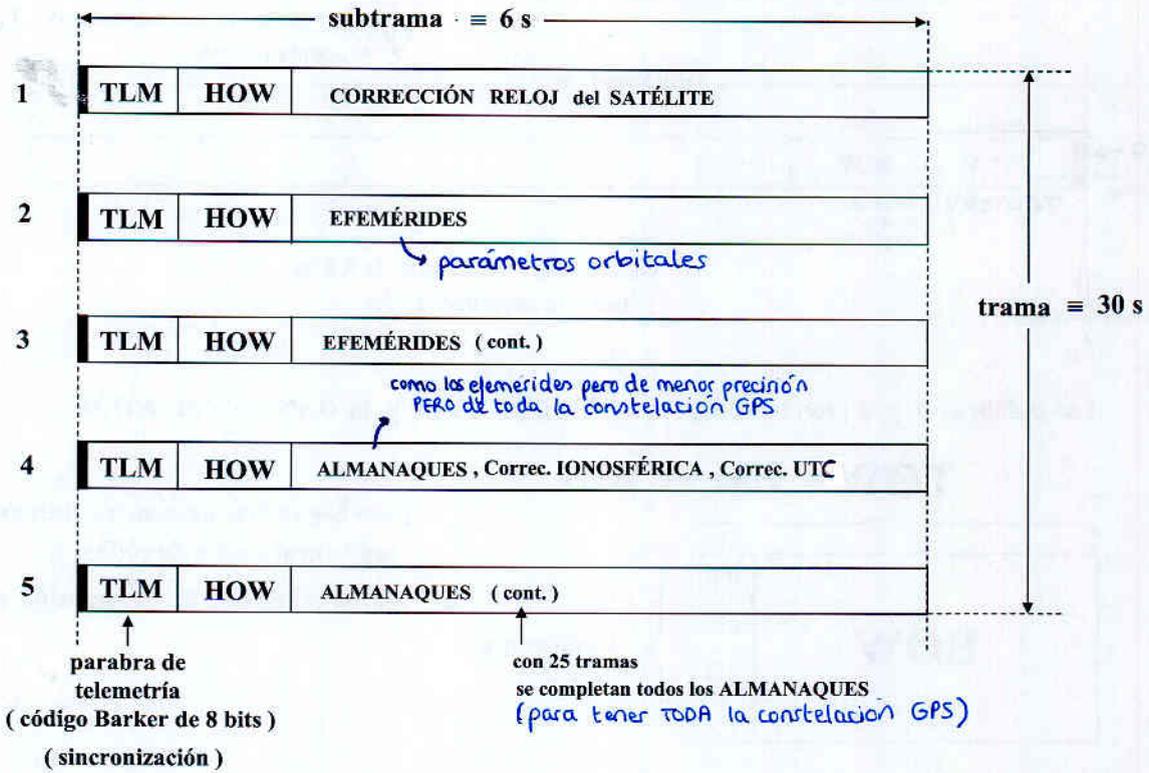


**TOW**  $\equiv$  Time of Week  $\Rightarrow$  da el instante de tiempo marcado por el reloj del satélite al transmitir el mensaje

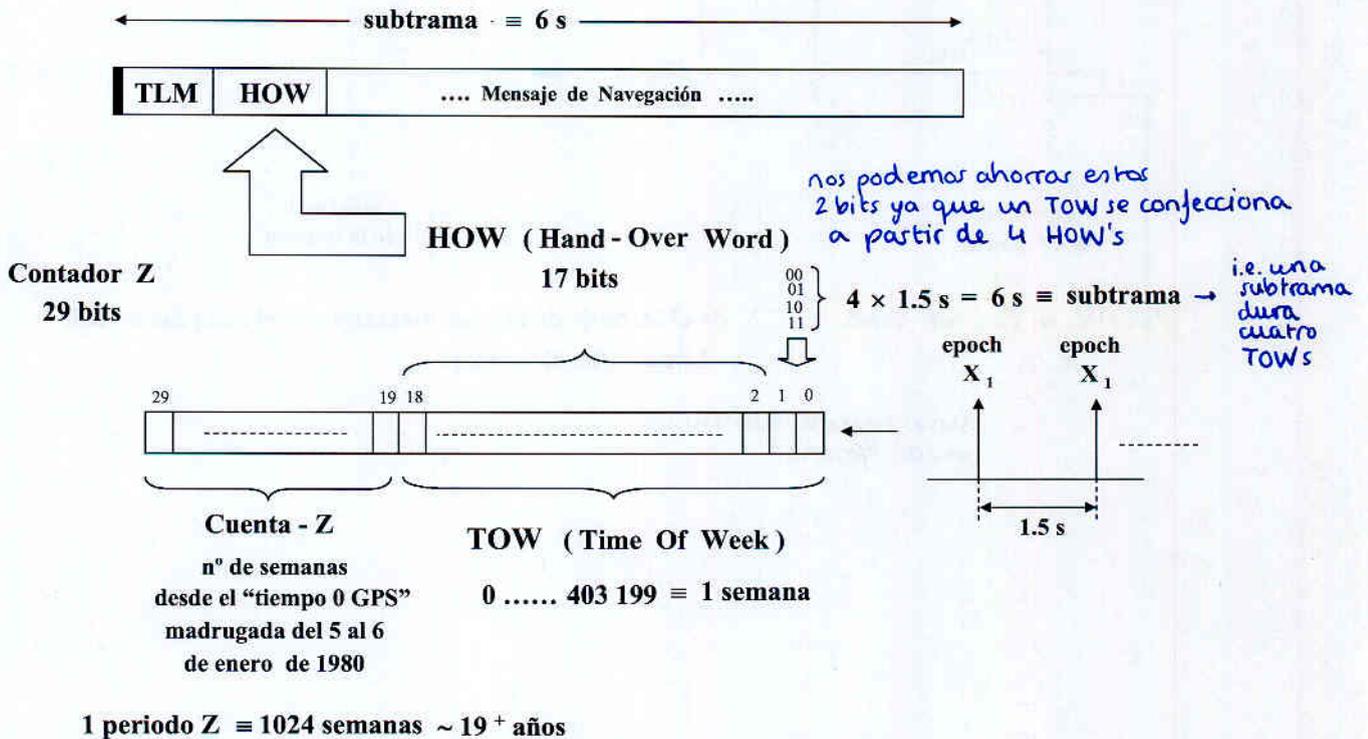
una nueva subtrama cada epoch X1

**FORMATO de los DATOS GPS**  
Estructurados en 5 subtramas de 6 s

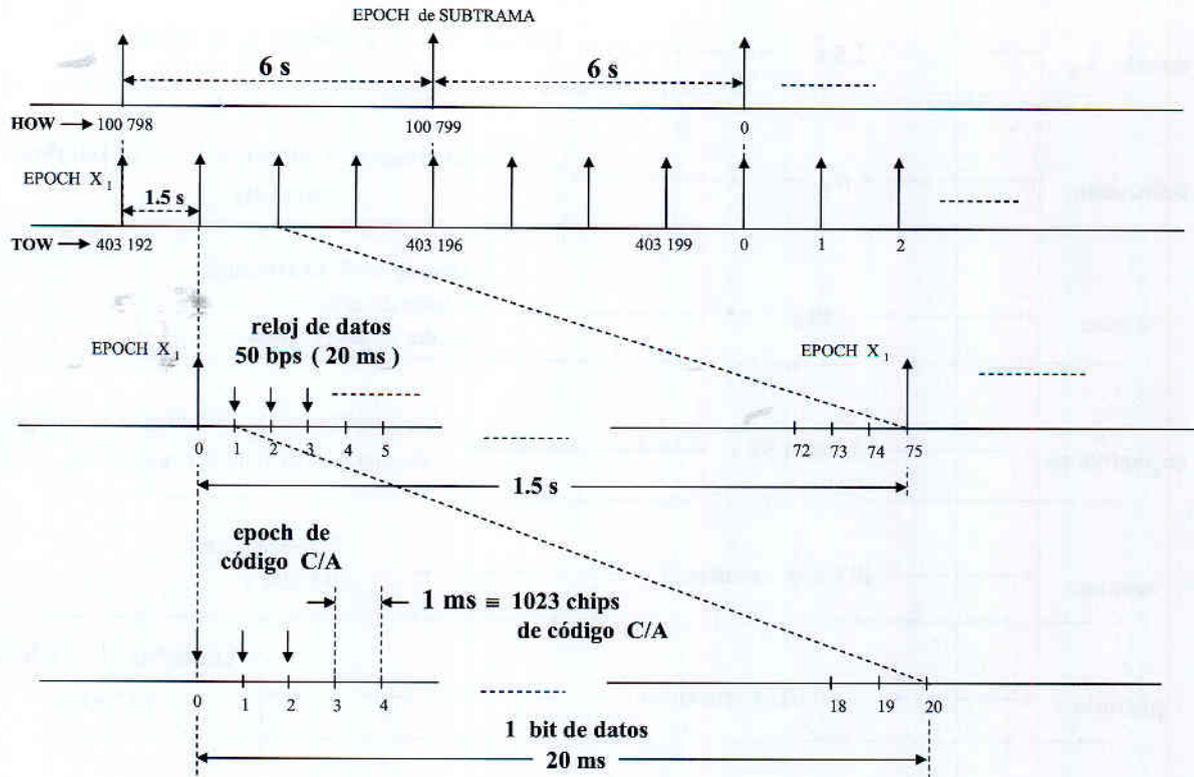
**HOW ( Hand - Over Word )**  
proporciona fase exacta de código P  
para ser adquirido sin búsqueda



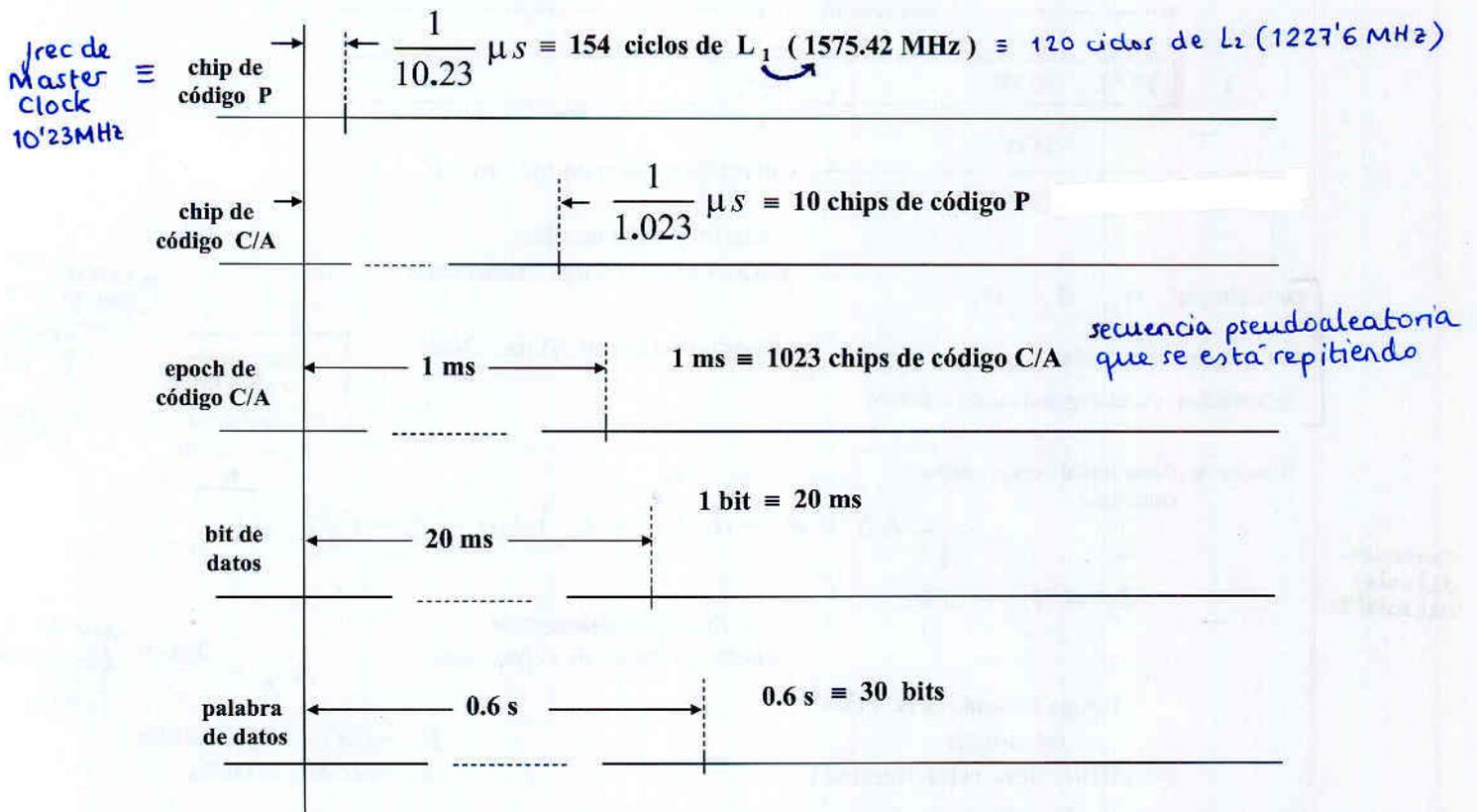
**FORMATO de los DATOS GPS**

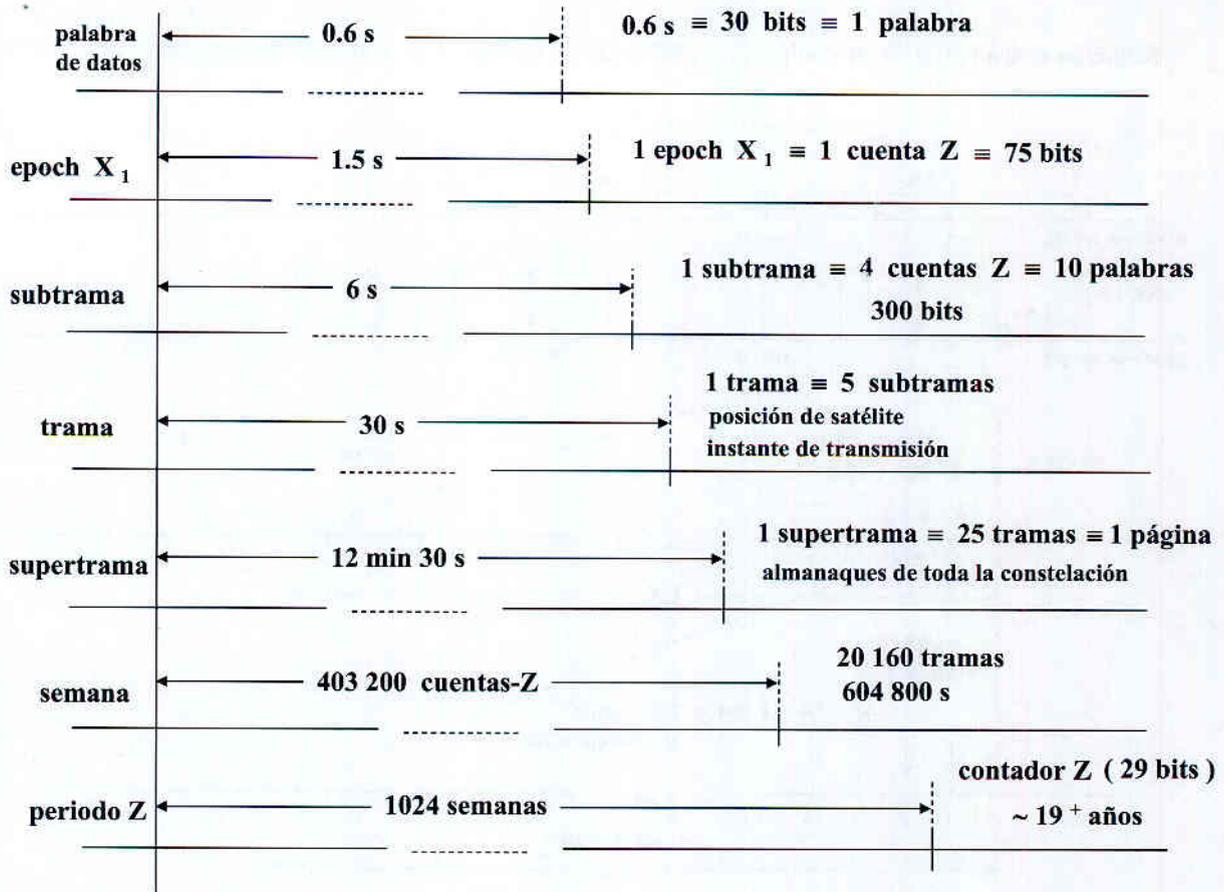


### Relación entre EPOCH de código C/A , EPOCH de código P y Datos de Navegación

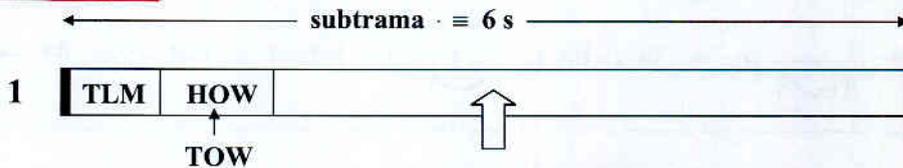


### Relación de tiempos entre Código C/A , Datos y Cuenta - Z





**SUBTRAMA - 1**



Corrección del reloj del satélite

Exactitud de la medida

URA (User Range Accuracy)

IODC (Issue Of Data Clock)

coeficientes  $a_{f_0}$   $a_{f_1}$   $a_{f_2}$   
 tiempo de referencia  $t_{oc}$   
 elaborados en el segmento de control

corrección relativista realizada por usuario

*además del "offset factory" que se aplica al reloj del sat.  $\downarrow$  compensa órbita circular*

tiempo en el instante de transmisión corregido

$$t_{S_i} = t'_{S_i} - \Delta b_i$$

*Corrección del reloj del satélite*

tiempo indicado en el TOW del mensaje (el satélite lleva reloj atómico)

$$\Delta b_i = a_{f_0} + a_{f_1} (t_k - t_{oc}) + a_{f_2} (t_k - t_{oc})^2 + \Delta t_R$$

tiempo transcurrido desde el tiempo de referencia

$$\Delta t_R = \frac{2R \cdot v}{c^2}$$

*debido a la excentricidad de la órbita*

$R$  vector posición del satélite  
 $v$  velocidad del satélite

*Aquí es donde introduce error la Disponibilidad selectiva*

SUBTRAMA - 1

URA (User Range Accuracy)

4 bits	URE ( m )
0	0 - 2.4
1	2.4 - 3.4
2	3.4 - 4.85
3	4.85 - 6.85
4	6.85 - 9.65
5	9.65 - 13.65
6	13.65 - 24
7	24 - 48
8	48 - 96
9	96 - 192
10	192 - 384
11	384 - 768
12	768 - 1536
13	1536 - 3072
14	3072 - 6144
15	> 6144

IODC ( Issue Of Data Clock )

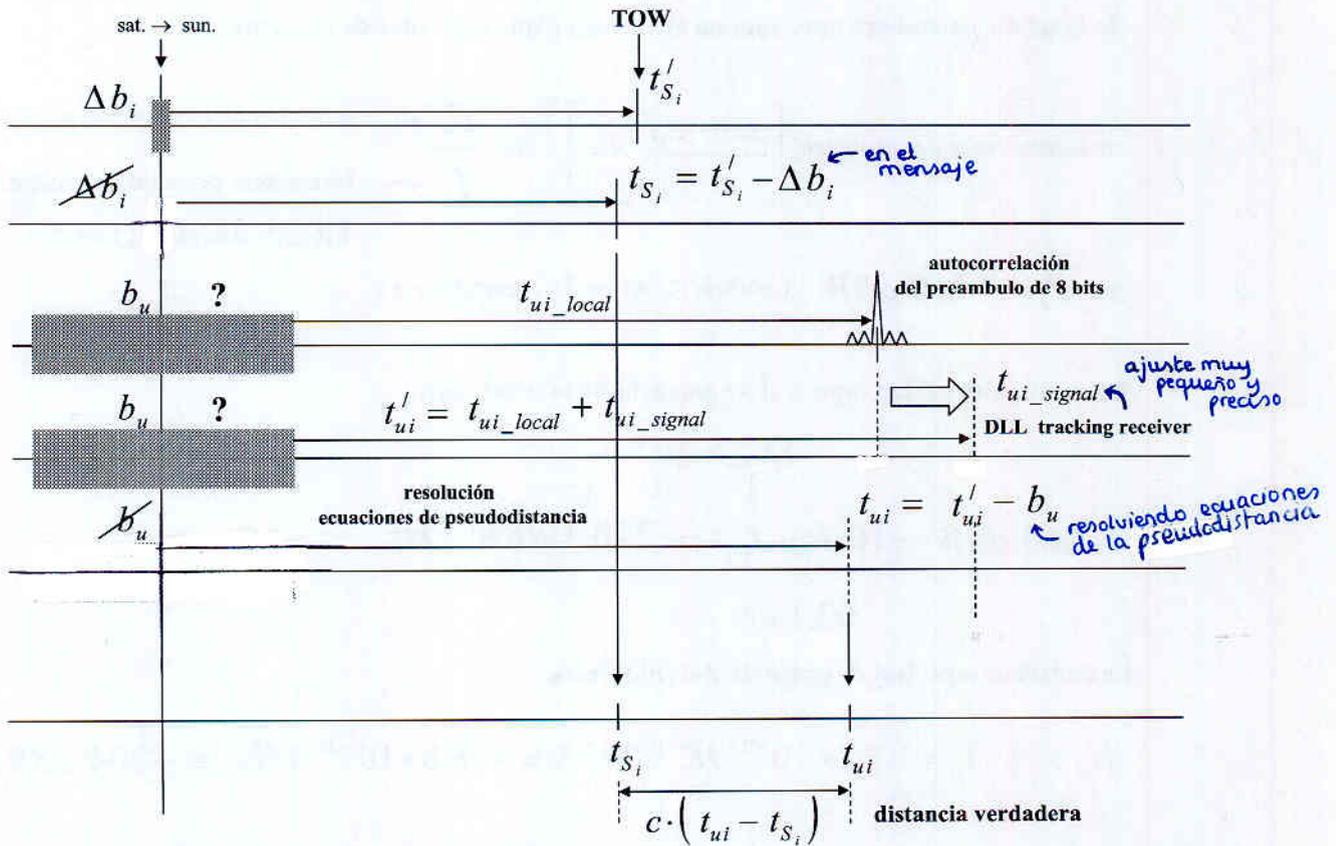
Indicador numérico de edición

para advertir cambios en las correcciones de reloj

*etiqueta para saber si hay cambios en el mensaje de navegación*

Resumen :

DETERMINACIÓN de la DISTANCIA



## NIVELES de la SEÑAL RF y ESPECTRO de POTENCIA

Especificación :

Antena de usuario  $\rightarrow 0 \text{ dB}$

Satélites con ángulo de elevación  $> 5^\circ$  (polarización circular a derechas)

mínima potencia recibida por usuario :

	$P$	$C/A$
$L_1$	$-163 \text{ dBW}$	$-160 \text{ dBW}$
$L_2$	$-166 \text{ dBW}$	$-166 \text{ dBW}$

Con una pérdida atmosférica de  $0.6 \text{ dB}$  los valores máximos no exceden de :

	$P$	$C/A$
$L_1$	$-155 \text{ dBW}$	$-153 \text{ dBW}$
$L_2$	$-158 \text{ dBW}$	$-158 \text{ dBW}$

El ruido blanco de tipo térmico excede significativamente la densidad espectral de potencia de la señal, de manera que, esta no es visible en un analizador de espectro

máximo valor del espectro  $\left[ \frac{\text{sen } \pi f/f_c}{\pi f/f_c} \right]^2$  es  $\frac{P_s}{f_c}$  ← potencia de la portadora recibida  
 ← frecuencia de señal de código  
 $1.023 \text{ Mcps (C/A)}$

si  $P_s = -160 \text{ dBW}$  (código (C/A) en  $L_1$  comp. fase)

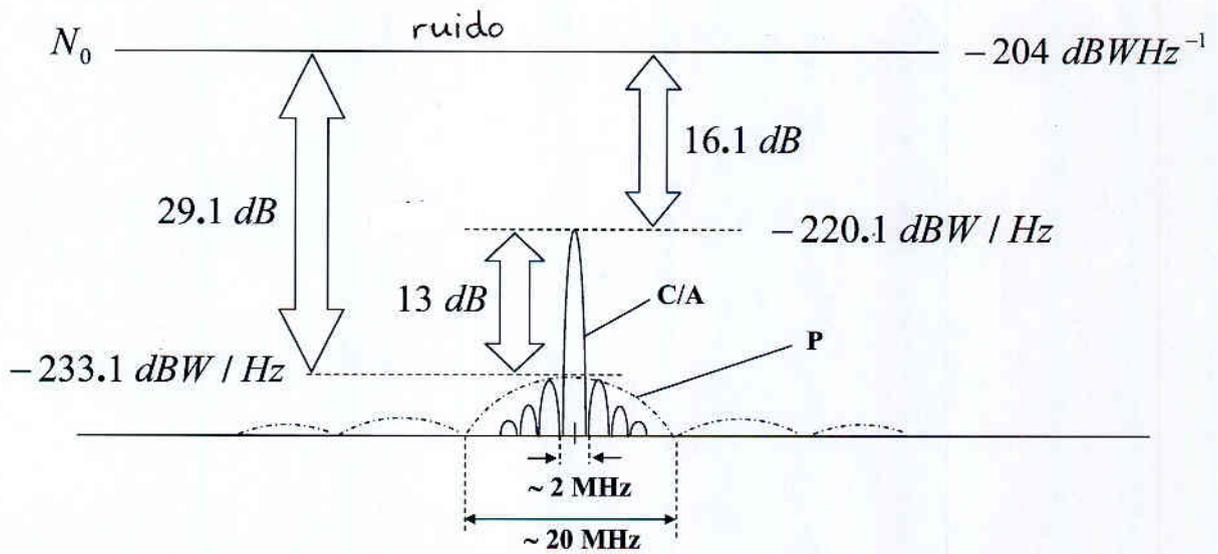
La máxima densidad espectral de potencia de la señal será :

$$-160 \text{ dBW} - \underbrace{10 \cdot \log f_c}_{60.1 \text{ dB}} = -220.1 \text{ dBW/Hz} <$$

$1.023 \times 10^6$   
↓

La densidad espectral de potencia del ruido será :

$$N_0 = k \cdot T_0 = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \cdot 293 \text{ K} = 4.048 \times 10^{-21} \text{ WHz}^{-1} \equiv -204 \text{ dBWHz}^{-1}$$



si  $P_s = -163 \text{ dBW}$  (código P en  $L_1$  comp. cuadratura)

La máxima densidad espectral de potencia de la señal será :

$$-163 \text{ dBW} - \underbrace{10 \cdot \log f_c}_{70.1 \text{ dB}} = -233.1 \text{ dBW/Hz}$$

$10.23 \times 10^6$   
 $\downarrow$

The following is a list of the names of the persons who were present at the meeting held on the 15th day of January, 1941, at the residence of the undersigned, at the address of 1234 Main Street, New York, New York.

- Mr. J. Edgar Hoover
- Mr. E. A. Tamm
- Mr. Clegg
- Mr. Glavin
- Mr. Ladd
- Mr. Nichols
- Mr. Rosen
- Mr. Tracy
- Mr. Carson
- Mr. Egan
- Mr. Gurnea
- Mr. Hendon
- Mr. Pennington
- Mr. Quinn
- Mr. Nease
- Mr. Gandy

The undersigned, being duly sworn, depose and say that the foregoing is a true and correct list of the names of the persons who were present at the meeting held on the 15th day of January, 1941, at the residence of the undersigned, at the address of 1234 Main Street, New York, New York.

Executed on the 15th day of January, 1941, at the residence of the undersigned, at the address of 1234 Main Street, New York, New York.

\_\_\_\_\_  
 J. Edgar Hoover

\_\_\_\_\_  
 E. A. Tamm

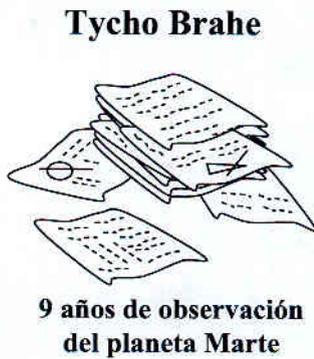
\_\_\_\_\_  
 Clegg

# MENSAJE de NAVEGACIÓN (INTRODUCCIÓN)

## Leyes de Kepler

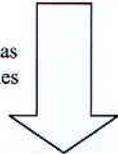
## Ecuación de Kepler

## Perturbaciones de la Órbita



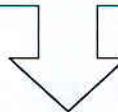
**Kepler**

análisis de las observaciones

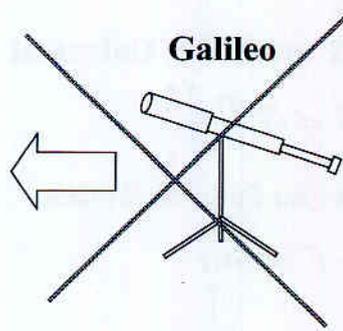


**Leyes de Kepler**

1ª	.....
2ª	.....
3ª	....



**Ecuación de Kepler**  
 $M = E - e \cdot \text{sen}E$

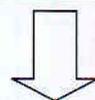


Galileo no proporcionó los planos de cómo hacerse un telescopio cuando Kepler se los pidió

**Newton**

+

2ª ley de la dinámica

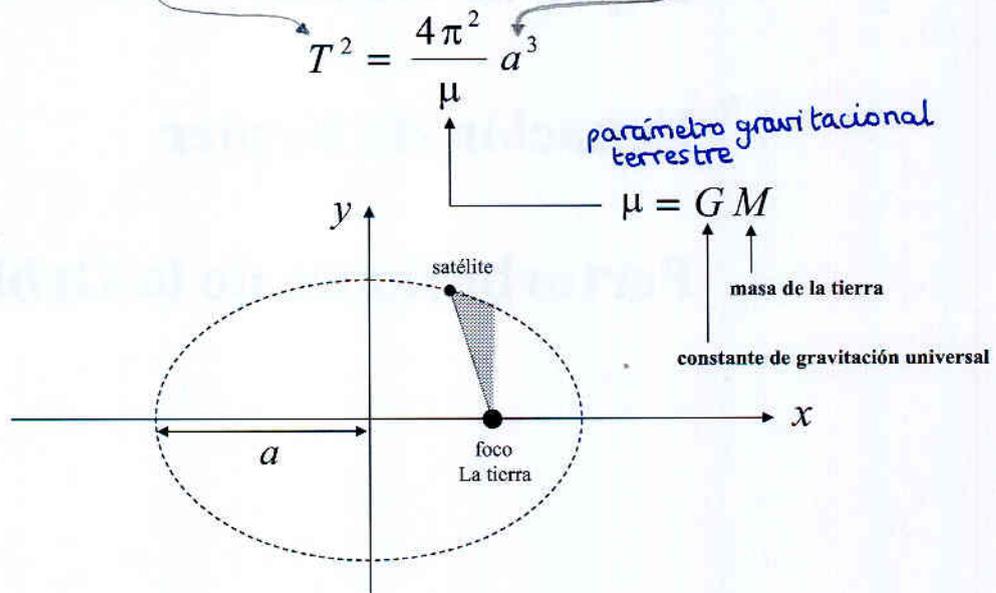


teóricamente

**Ley de gravitación universal**

# Leyes de Kepler ( caso ideal, entre tierra y satélite artificial )

- 1) Un satélite se mueve en una órbita elíptica con la tierra como foco.
- 2) La línea que une el satélite con el centro de la tierra barre áreas iguales en tiempos iguales
- 3) El cuadrado del periodo de la órbita es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse



## Ley de Gravitación Universal

$$F = G \frac{m M}{r^2}$$

2º principio de la dinámica

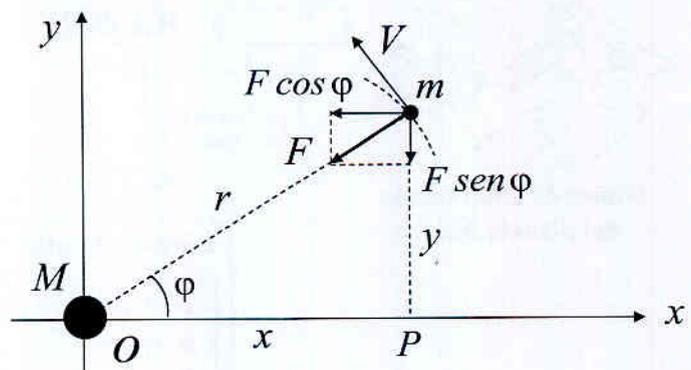
$$F = m a$$

↑  
aceleración

(Newton)



Leyes de Kepler



$$\ddot{x} \equiv \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$m \ddot{x} = -F \cos \varphi = -G \frac{m M}{r^2} \underbrace{\frac{x}{r}}_{\cos \varphi} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}$$

siendo

$$\mu = GM$$

$$m \ddot{y} = -F \sin \varphi = -G \frac{m M}{r^2} \underbrace{\frac{y}{r}}_{\sin \varphi} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}$$

como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

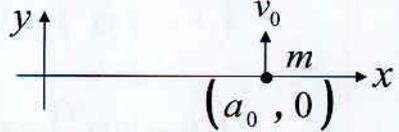
sin pérdida de generalidad para  $t = 0$

$$x = a_0$$

$$y = 0$$

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = v_0$$



coordenadas  
rectangulares



coordenadas  
polares

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi + r (-\dot{\varphi} \sin \varphi) = \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} (r \sin \varphi)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r (\dot{\varphi} \cos \varphi) = \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} (r \cos \varphi)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi + \dot{r} (-\dot{\varphi} \sin \varphi) - \ddot{\varphi} (r \sin \varphi) - \dot{\varphi} \dot{r} \sin \varphi - \dot{\varphi} \dot{\varphi} r \cos \varphi$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + \dot{r} (\dot{\varphi} \cos \varphi) + \ddot{\varphi} (r \cos \varphi) + \dot{\varphi} \dot{r} \cos \varphi + \dot{\varphi} (\dot{\varphi} r (-\sin \varphi))$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2 \dot{\varphi} \dot{r} \sin \varphi - \ddot{\varphi} r \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 r \cos \varphi$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2 \dot{\varphi} \dot{r} \cos \varphi + \ddot{\varphi} r \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 r \sin \varphi$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2 \dot{\varphi} \dot{r} \sin \varphi - \ddot{\varphi} r \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 r \cos \varphi$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2 \dot{\varphi} \dot{r} \cos \varphi + \ddot{\varphi} r \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 r \sin \varphi$$

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2 \dot{\varphi} \dot{r} + r \ddot{\varphi}) \sin \varphi$$

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2 \dot{\varphi} \dot{r} + r \ddot{\varphi}) \cos \varphi$$

substituyendo

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{\underbrace{(x^2 + y^2)^{3/2}}_{r^3}} = -\frac{\mu \cos \varphi}{r^2}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu y}{\underbrace{(x^2 + y^2)^{3/2}}_{r^3}} = -\frac{\mu \sin \varphi}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
 + \quad & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi}) \sin \phi = -\frac{\mu \cos \phi}{r^2} \quad \times \cos \phi \\
 & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \sin \phi + (2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi}) \cos \phi = -\frac{\mu \sin \phi}{r^2} \quad \times \sin \phi
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}}$$

$\dot{\phi}$ : velocidad angular

$$\begin{aligned}
 - \quad & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi}) \sin \phi = -\frac{\mu \cos \phi}{r^2} \quad \times \sin \phi \\
 & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \sin \phi + (2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi}) \cos \phi = -\frac{\mu \sin \phi}{r^2} \quad \times \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\boxed{2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi} = 0}$$

condiciones iniciales  $t = 0$

$$\begin{aligned}
 x = a_0 & \quad y = 0 \\
 \dot{x} = 0 & \quad \dot{y} = v_0
 \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned}
 r = a_0 & \quad \phi = 0 \\
 \dot{r} = 0 & \quad \dot{\phi} = \frac{v_0}{a_0}
 \end{aligned} \right\} t=0$$

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$



$$\ddot{y} = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

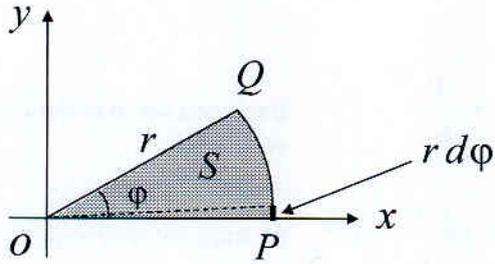
$$\boxed{2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi} = 0}$$



$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) = 0$$

$$r^2 \dot{\phi} = C_1$$

$$r^2 \dot{\phi} = C_1$$



área del sector limitado por los segmentos OP, OQ y el arco PQ

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\phi} r r d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\phi} r^2 d\phi$$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\phi$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \underbrace{r^2}_{\text{velocidad areolar (de área)}} \underbrace{\dot{\phi}}_{\text{constante}}$$

velocidad areolar (de área)

constante

velocidad areolar = cte

el cuerpo se mueve de manera que el vector de posición describe áreas iguales en tiempos iguales

2º ley de Kepler

Para deducir la 1º ley de Kepler relativa a la forma de la trayectoria descrita

$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$

$2\dot{\phi}\dot{r} + r\ddot{\phi} = 0$

$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$

$r^2\dot{\phi} = C_1$

obtuvimos  $r^2\dot{\phi} = C_1 \Rightarrow C_1 = a_0 v_0$

condiciones iniciales  $t = 0$

$r = a_0 \quad \phi = 0$

$\dot{r} = 0 \quad \dot{\phi} = \frac{v_0}{a_0}$

$r^2\dot{\phi} = a_0 v_0$

$\dot{\phi} = \frac{a_0 v_0}{r^2}$

$\ddot{r} = \frac{a_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}$

$$\ddot{r} = \frac{a_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} \quad \text{hacemos } \dot{r} = p \quad (\text{cambio de variable})$$

$$\ddot{r} = \dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dt} = p \frac{dp}{dr} = \frac{a_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}$$

haciendo separación de variables se tendrá

$$p dp = \left( \frac{a_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} \right) dr \quad \text{al integrar tendremos}$$

de las condiciones iniciales

$$\dot{r} = 0 = p$$

$$r = a_0$$

desahacer c.v.

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{a_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + C_2$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{a_0^2 v_0^2}{a_0^2} + \frac{\mu}{a_0} + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{a_0}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{a_0^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{a_0}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{a_0^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{a_0}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left( v_0 - \frac{2\mu}{a_0} \right) + \frac{2\mu}{r} - \frac{a_0^2 v_0^2}{r^2}}$$

solo se ha tomado la raíz positiva

$$\text{de la ecuación } r^2 \dot{\phi} = a_0 v_0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{a_0 v_0}{r^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{a_0 v_0}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\left( v_0 - \frac{2\mu}{a_0} \right) + \frac{2\mu}{r} - \frac{a_0^2 v_0^2}{r^2}}}{\frac{a_0 v_0}{r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\phi} = r \sqrt{\frac{r^2}{a_0^2 v_0} - \frac{2\mu r^2}{a_0^3 v_0^2} + \frac{2\mu r}{a_0^2 v_0^2} - 1}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \sqrt{\frac{r^2}{a_0^2 v_0^2} - \frac{2\mu r^2}{a_0^3 v_0^2} + \frac{2\mu r}{a_0^2 v_0^2} - 1}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1}$$

siendo

definimos

$$\alpha = \frac{1}{a_0^2 v_0^2} - \frac{2\mu}{a_0^3 v_0^2}$$

$$\beta = \frac{\mu}{a_0^2 v_0^2}$$

haciendo el cambio de variable

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{u} \right) = \left( -\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\varphi}$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{\alpha}{u^2} + \frac{2\beta}{u} - 1}$$

haciendo separación de variables tenemos

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha + 2\beta u - 1}} = -d\varphi$$

integrando y deshaciendo el cambio tendremos

$$r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e \cos(\varphi + C_3)}$$

donde  $e = \frac{\sqrt{\alpha + \beta^2}}{\beta} = \frac{a_0 v_0^2}{\mu} - 1$

obtenemos la constante  $C_3$

a partir de las condiciones

$$r = a_0 \quad \varphi = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e \cos(C_3)}$$

$$\cos C_3 = \frac{a_0 v_0^2 / \mu - 1}{e} = \frac{a_0 v_0^2 / \mu - 1}{a_0 v_0^2 / \mu - 1} = 1 \Rightarrow C_3 = 0$$

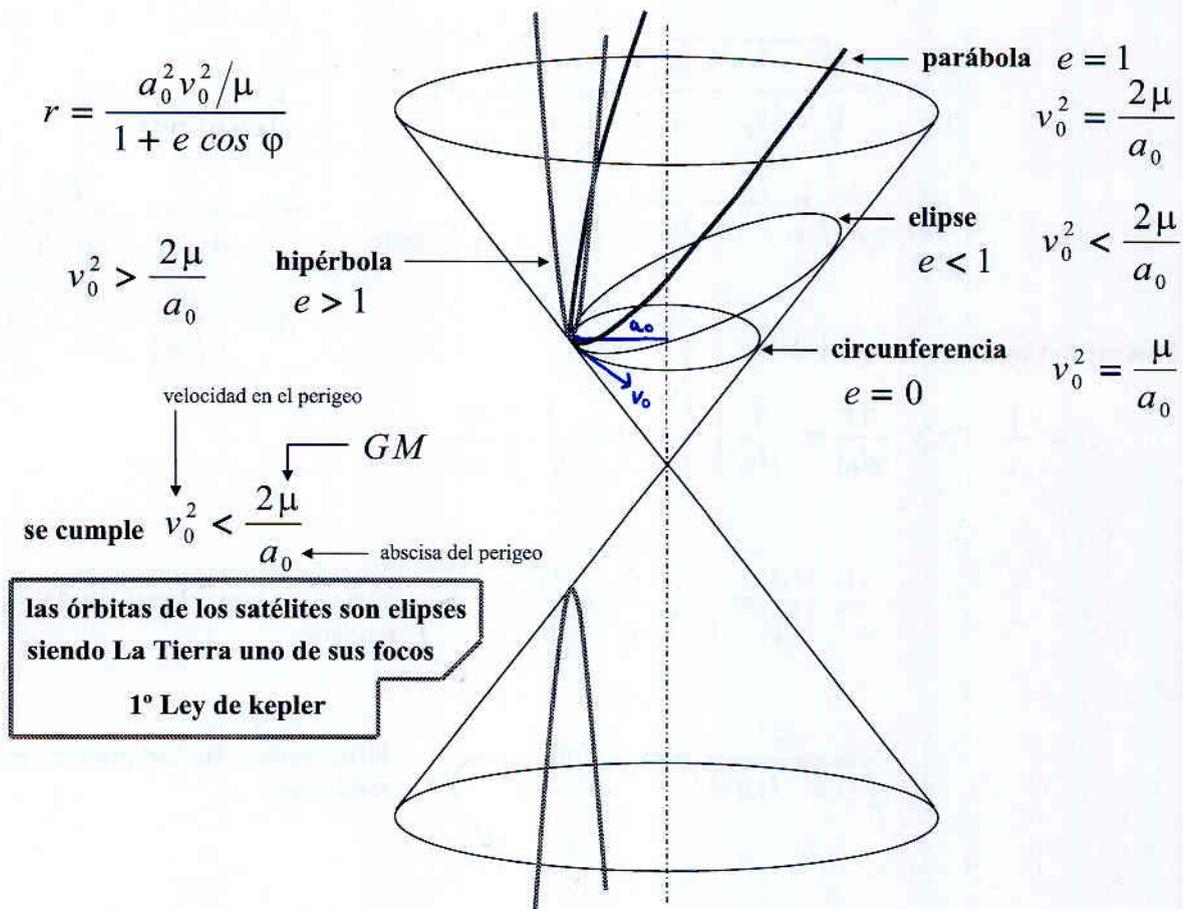
$$r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e \cos \varphi}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}$$

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

Ecuación de una sección cónica de excentricidad  $e$  en polares



La excentricidad  $e$  tiene que ver con la energía del sistema

Sentido físico de la excentricidad  $e$

El vector velocidad del satélite  $\vec{V}$  posee una magnitud  $V$  que cumple respecto a sus componentes la siguiente relación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} (r \sin \varphi) \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} (r \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\Downarrow$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2$$

La energía cinética de un satélite de masa  $m$  es  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2)$

La energía potencial del satélite es el trabajo (tomado con signo menos) necesario para desplazar el satélite hasta el infinito (donde la energía potencial es igual a cero)

$$-\int_r^\infty \underbrace{\frac{\mu m}{r^2}}_{\text{fuerza}} dr = \left. \frac{\mu m}{r} \right|_r^\infty = -\frac{\mu m}{r}$$

La energía total del sistema según la LEY de CONSERVACIÓN de la ENERGÍA será

$$E_t = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}}$$

$$\dot{\phi} = \frac{a_0 v_0}{r^2} \quad \dot{r} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m (r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2)}_{\text{energía cinética}} - \underbrace{\frac{\mu m}{r}}_{\text{energía potencial}} = E_t \Rightarrow \frac{m r^2 a_0^2 v_0^2}{2 r^4} - \frac{\mu m}{r} = E_t$$

eliminando  $r$

$$r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e \cos \phi} \quad \xrightarrow{\phi = 0} \quad r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e}$$

$$e = \sqrt{1 + E_t \frac{2 a_0^2 v_0^2}{m \mu^2}}$$

La órbita está completamente determinada por la energía

ecuación de sección cónica en polares

$$r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e \cos \phi} \quad \xrightarrow{e = \sqrt{1 + E_t \frac{2 a_0^2 v_0^2}{m \mu^2}}} \quad r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + \sqrt{1 + E_t \frac{2 a_0^2 v_0^2}{m \mu^2}} \cos \phi}$$

órbita elíptica	$E_t < 0$
$e < 1$	

órbita circular	$E_t = -\frac{m \mu^2}{2 a_0^2 v_0^2}$
$e = 0$	

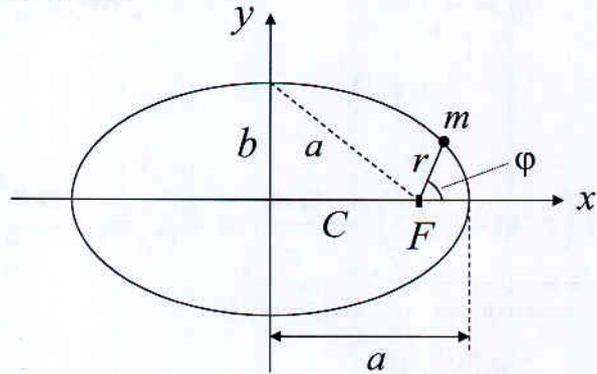
órbita parabólica  $E_t = 0$   
 $e = 1$

órbita hiperbólica  $E_t > 0$   
 $e > 1$

Para deducir la 3ª Ley de Kepler nos apoyamos en la 1ª referente a la forma elíptica de la órbita

Ecuación de órbita elíptica en coordenadas cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



excentricidad

$$e = \frac{C}{a}$$

$$a^2 = b^2 + C^2 \rightarrow C^2 = a^2 - b^2$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$r = \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e \cos \varphi}$$

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e} + \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 - e} \right)$$

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 + e} + \frac{a_0^2 v_0^2 / \mu}{1 - e} \right) = \frac{a_0^2 v_0^2}{\mu (1 - e^2)} = \frac{a_0^2 v_0^2}{\mu b^2}$$

$$b^2 = \frac{a_0^2 v_0^2 a}{\mu}$$

área de la elipse =  $\pi ab$

velocidad areolar =  $\frac{\text{área barrida}}{\text{tiempo}}$

$$\frac{a_0 v_0}{2} = \frac{\pi b a}{T}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{a_0 v_0}{2}$$

$t = T$  (periodo orbital)

$$b = \frac{a_0 v_0 T}{2\pi a}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a_0 v_0}{r^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

3ª ley de Kepler

El cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita

se resumen las leyes en una ecuación elegante:

# Ecuación de Kepler

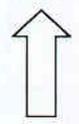
**Leyes de Kepler**

1ª .....  
2ª .....  
3ª .....

**Ecuación de Kepler**

$$M = E - e \cdot \text{sen } E$$

incógnita que debemos encontrar para hallar la posición del satélite en órbita



anomalía excéntrica

$$M = n \cdot (t - t_0)$$

Variable que varía linealmente con el tiempo

anomalía media

excentricidad de la elipse

**Movimiento medio**  
ángulo recorrido por unidad de tiempo con movimiento uniforme

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

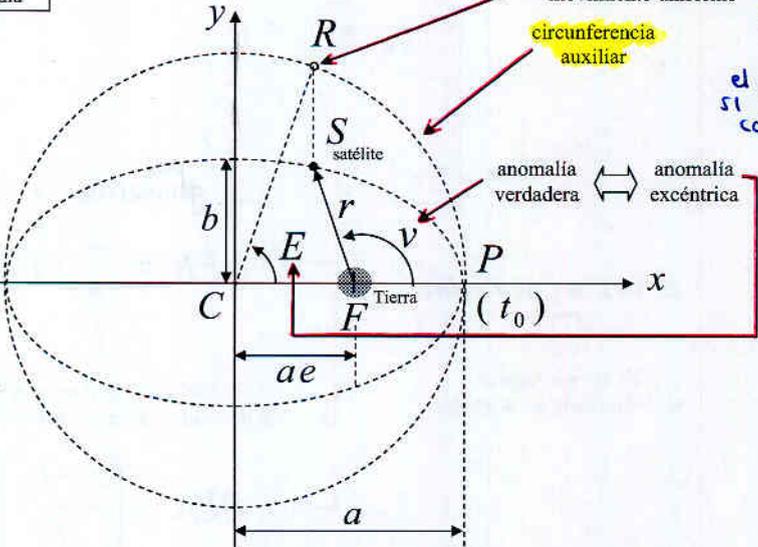
← periodo orbital

conocemos el instante de paso por el perigeo  $P$  (o cualquier otro instante)  $(t_0)$

queremos saber donde estará el satélite en el instante  $t$

en el instante  $t$  la anomalía media valdrá

$$M = n \cdot (t - t_0)$$



astro ficticio con movimiento uniforme

circunferencia auxiliar

satélite proyectado en 'y' sobre la circunf. auxiliar  
↓  
el astro ficticio si tiene vel. constante

anomalía verdadera ↔ anomalía excéntrica

instante para el que quiero saber la posición del satélite

instante de paso por el perigeo

$$M = n \cdot (t - t_0) = E - e \cdot \text{sen } E \longrightarrow E ?$$

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

3ª ley de Kepler

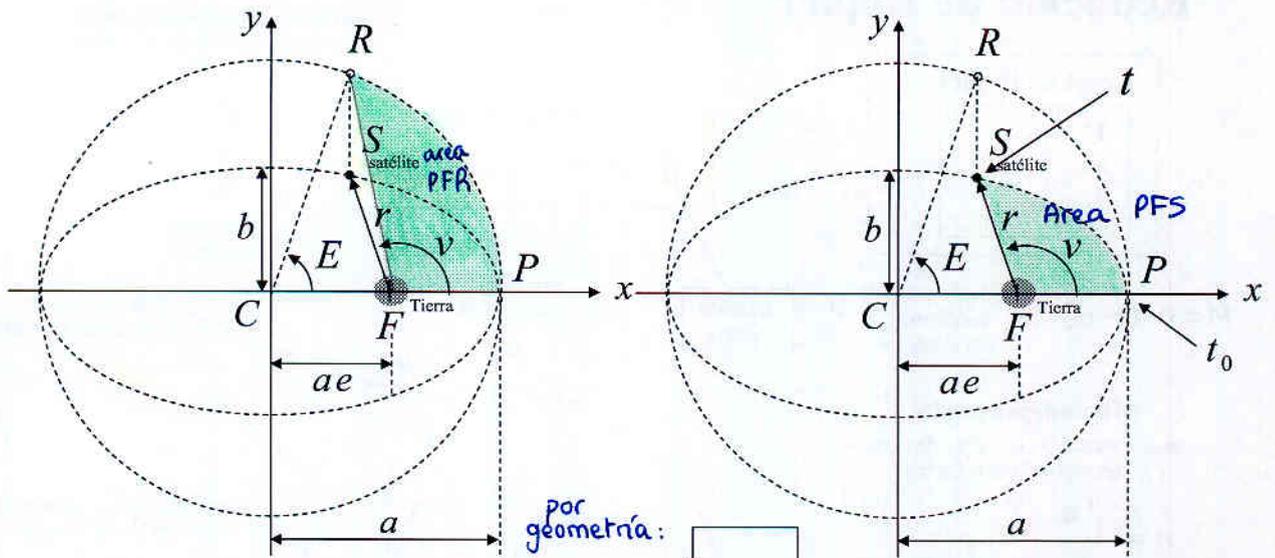
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

←  $\mu = GM$

Demostramos la ecuación de Kepler

Resolvemos la ecuación de Kepler

# Demostración de la ecuación de Kepler



de la 2ª ley de Kepler

en tiempos iguales  
el satélite barre áreas iguales

por geometría:

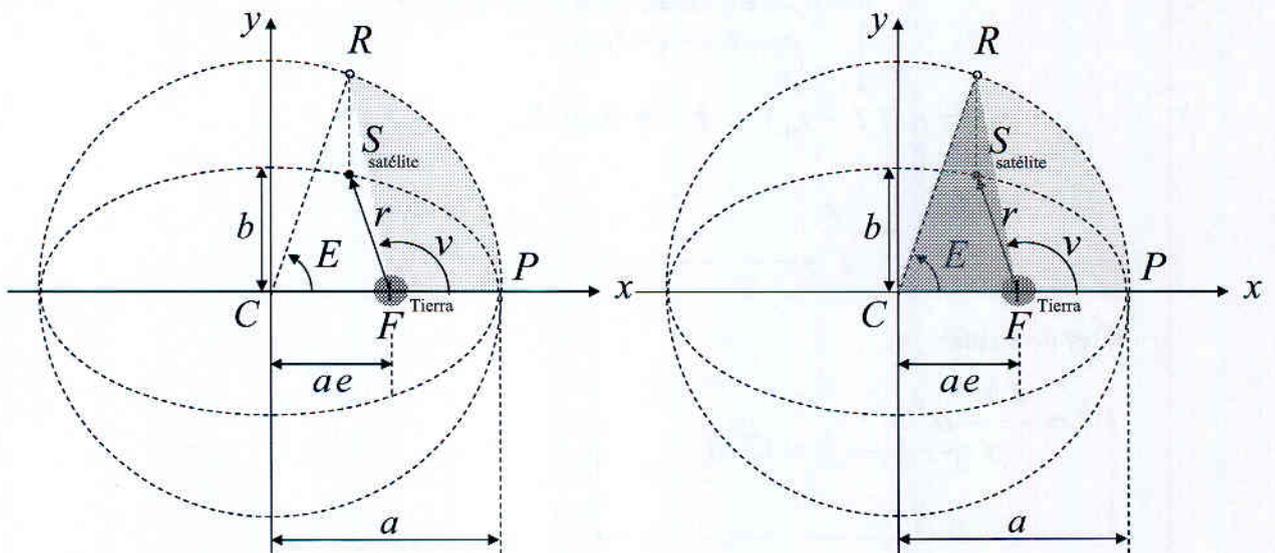
$$PFR = \frac{a}{b} PFS$$

relación de afinidad entre ordenadas  
de la circunferencia auxiliar y de la elipse

$$PFS = \left( \frac{t-t_0}{T} \right) \underbrace{\pi ab}_{\text{área de la elipse}}$$

rec. velocidad areolar constante

$$PFR = \left( \frac{t-t_0}{T} \right) \pi a^2$$



$$PFR = PCR - FCR$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \longrightarrow \pi a^2 \\ E \longrightarrow PCR = \frac{E \pi a^2}{2\pi} = \frac{E a^2}{2} \end{array} \right\} \text{regla de 3}$$

$$\left( \frac{t-t_0}{T} \right) \pi a^2$$

velocidad areolar constante

$$FCR = \frac{1}{2} \cdot ae \cdot a \sin E \quad \left. \vphantom{FCR} \right\} \text{área de un triángulo}$$

$$PFR = PCR - FCR$$

$$\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \pi a^2 = \frac{E a^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot a e \cdot a \sin E$$

$$\frac{2\pi}{T} (t-t_0) = E - e \cdot \sin E$$

$$M = n \cdot (t-t_0)$$

$$M = E - e \cdot \sin E$$

$$\frac{v}{2} = \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right]$$

La anomalía verdadera está dada por

mejor

$$v = \cos^{-1} \left[ \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \right]$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

$$v = \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \right]$$

$$\cos v = \frac{(\cos E - e)}{(1 - e \cos E)}$$

El radio vector desde el foco hasta el satélite es

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e \cos E} = a(1 - e \cos E)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

## Solución para la ecuación de Kepler $M = E - e \cdot \text{sen } E$

- Método de aproximaciones sucesivas

- Método de Newton

- .....

Curiosidad: Las funciones de Bessel surgen a partir de una forma de resolver la ec. de Kepler

$$E = M + e \cdot \text{sen } E$$

si  $e \ll 1$  podemos tomar como aproximación inicial  $E_0 = M$

$$E_1 = M + e \cdot \text{sen } E_0$$

$$E_i = M + e \cdot \text{sen } E_{i-1}$$

repetir hasta  $|E_i - E_{i-1}| < \varepsilon$

cota de error  
↓  
 $\varepsilon$

## Solución para la ecuación de Kepler $M = E - e \cdot \text{sen } E$

- Método de aproximaciones sucesivas

- Método de Newton  $\longrightarrow$  encontrar raíz de la ecuación  $f(x) = 0$

- .....

$$\text{como } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

aplicado a la ecuación de Kepler tendremos

$$\underbrace{E - e \cdot \text{sen } E - M}_{f(x) = 0} = 0$$

$$\Rightarrow E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)}$$

$$\left. \begin{aligned} f(E_n) &= E_n - e \cdot \text{sen } E_n - M \\ f'(E_n) &= 1 - e \cdot \text{cos } E_n \end{aligned} \right\}$$

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \cdot \text{sen } E_n - M}{1 - e \cdot \text{cos } E_n}$$

valor inicial  $E_0 = M$

## Perturbación de la órbita del satélite

Achatamiento de la Tierra  $\Rightarrow$  perturbación dominante

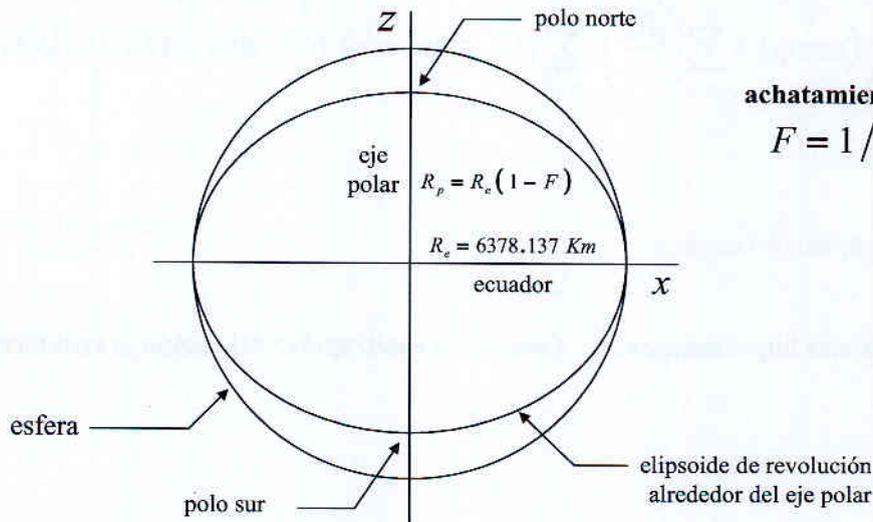
El Sol , la Luna

Rozamiento atmosférico

Campos magnéticos y eléctricos

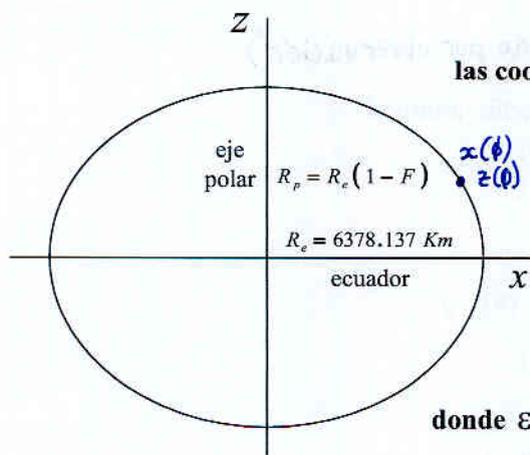
armónicos esféricos de orden superior  
en el potencial gravitacional terrestre

El modelo de achatamiento de la tierra es un elipsoide de revolución



achatamiento ( flattening )

$$F = 1 / 298.257$$



sobre la superficie del elipsoide

las coordenadas  $x$  y  $z$  varían con la latitud geodética  $\phi$

$$x = \frac{R_e \cos \phi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}}$$

$$z = \frac{R_e (1 - \varepsilon^2) \sin \phi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}}$$

donde  $\varepsilon$  es la excentricidad de la tierra  $\varepsilon = 0.0818192$

$$R_p = R_e (1 - F) = R_e \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Un observador a altura  $h$  sobre el elipsoide tendrá unas coordenadas

$$x = \left( \frac{R_e}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}} + h \right) \cos \phi$$

$$z = \left( \frac{R_e (1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}} + h \right) \sin \phi$$

El potencial gravitacional terrestre generalizado está dado por

radio geocéntrico al satélite  
 latitud geocéntrica  
 longitud geocéntrica

$\Phi(r, \varphi, \lambda) =$

coeficientes determinados experimentalmente

$$= \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \varphi) \right]$$

campo de una esfera

polinomios de Legendre

funciones de Legendre de 1ª especie

El término de corrección más importante es  $J_2$  (momento cuadrupolar del campo gravitatorio)

Efectos : (deducidos matemáticamente, no por observación)

Oscilación del plano orbital respecto a su inclinación nominal

$$I \pm \Delta I$$

$$\Delta I = \frac{e J_3}{2 J_2} \cos I$$

Regresión de la línea nodal

$$\Delta \Omega / \text{órbita} = -3 \pi \left( \frac{R_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} J_2 \cos I$$

Avance de perigeo

$$\Delta \omega / \text{órbita} = \frac{3}{2} \pi \left( \frac{R_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} J_2 (4 - 5 \sin^2 I)$$

no saber estas cosas de memoria

# Mensaje de navegación

Los datos del mensaje de navegación se transmiten a 50 bits por segundo sumados en módulo 2 al código C/A y P (opcionalmente) sobre portadora  $L_1$

Los datos están sincronizados con los "EPOCH" de código C/A (1 ms).

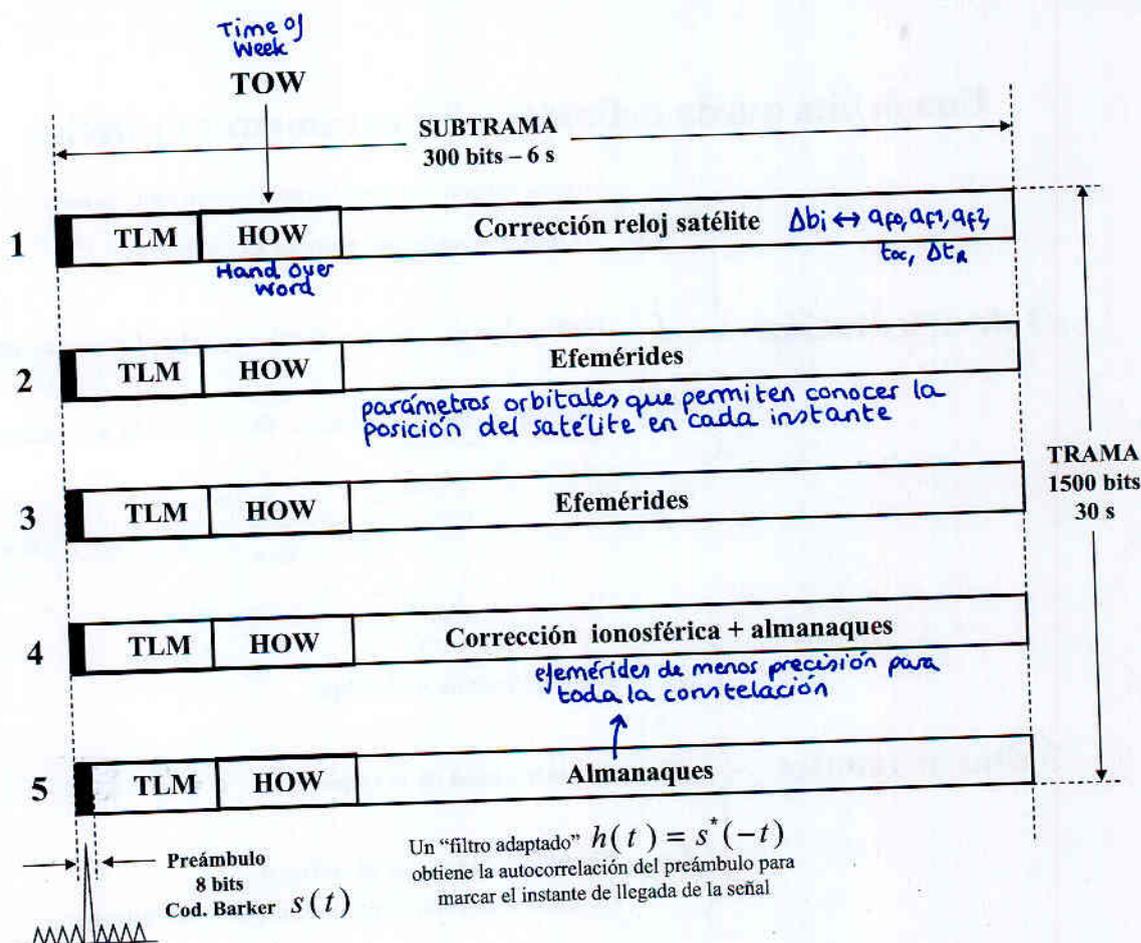
Los bits de datos están formateados en palabras de 30 bits

Cada 10 palabras (300 bits  $\equiv$  6 s) constituyen una subtrama

SUBTRAMA (300 bits  $\equiv$  6 s)

TRAMA  $\equiv$  5 SUBTRAMAS (1500 bits  $\equiv$  30 s)  $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Posiciones del satélite} \\ \text{Instantes de salida de la señal} \end{array} \right.$

SUPERTRAMA  $\equiv$  25 TRAMAS (12.5 s)  $\rightarrow$  Almanaque de toda la constelación



## Subtramas 2 y 3: **Órbita y posición del Satélite GPS**

Las subtramas 2 y 3 proporcionan los parámetros orbitales (*ejemérides*)

Los parámetros orbitales permiten determinar posiciones del satélite en instantes precisos  
 instantes de salida de la señal

### Modelo de órbita Kepler modificada

#### Órbitas GPS

Incluye correcciones de perturbación

6 órbitas con inclinación de ~~63°~~ 55°

plano orbital respecto a plano ecuatorial

Nodos ascendentes equiespaciados  $360^\circ / 6 = 60^\circ$

intersección de la órbita con el plano ecuatorial en sentido ascendente

Altura ~ 20 183.6 Km (medida sobre el nadir desde el suelo)

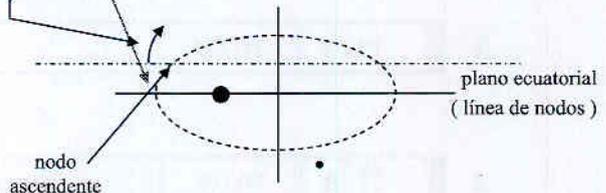
Periodo orbital ~ 12 horas

Velocidad orbital ~ 3.87 Km / s

### Una órbita queda definida por 6 parámetros orbitales

3 de orientación {

- $\Omega$   $\overbrace{\text{ángulo respecto al Vernal Equinox sobre el plano ecuatorial}}$   
Longitud de la línea nodal ascendente
- $i$  Inclinación del plano orbital respecto al plano ecuatorial
- $\omega$  Ángulo de **perigeo** tomado desde el nodo ascendente

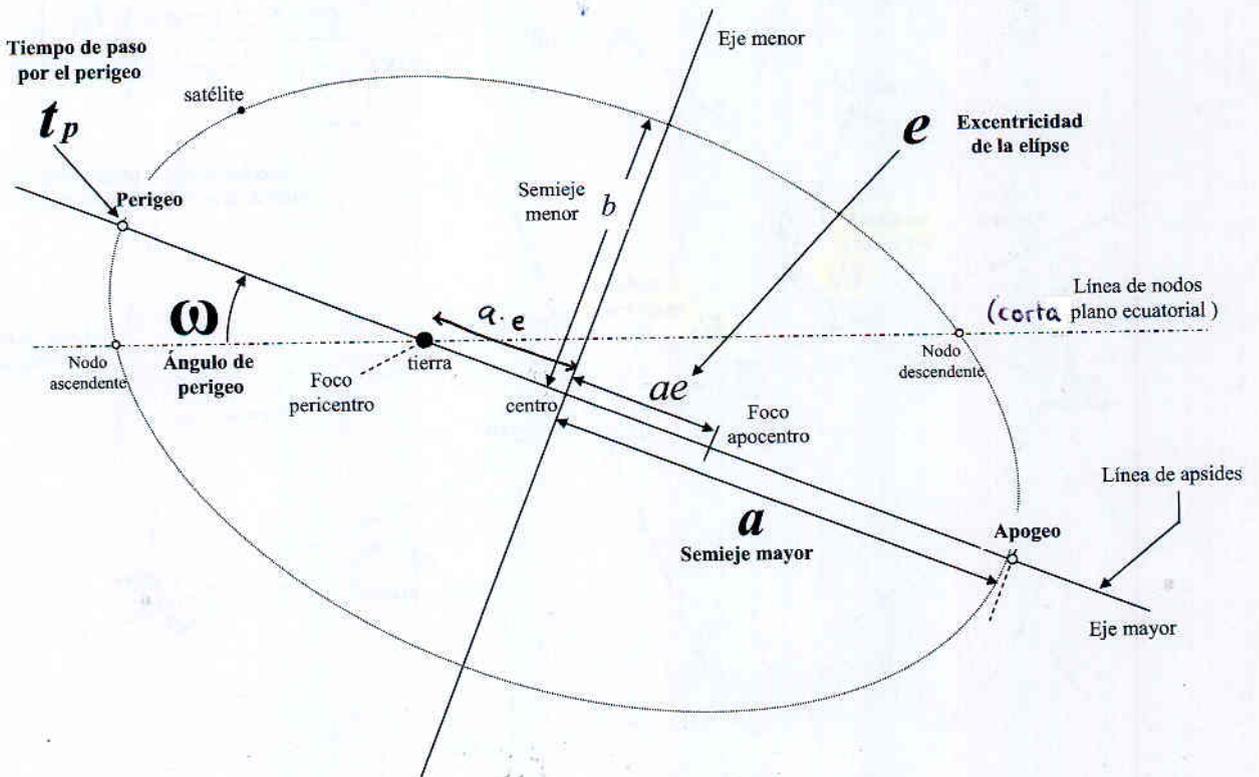
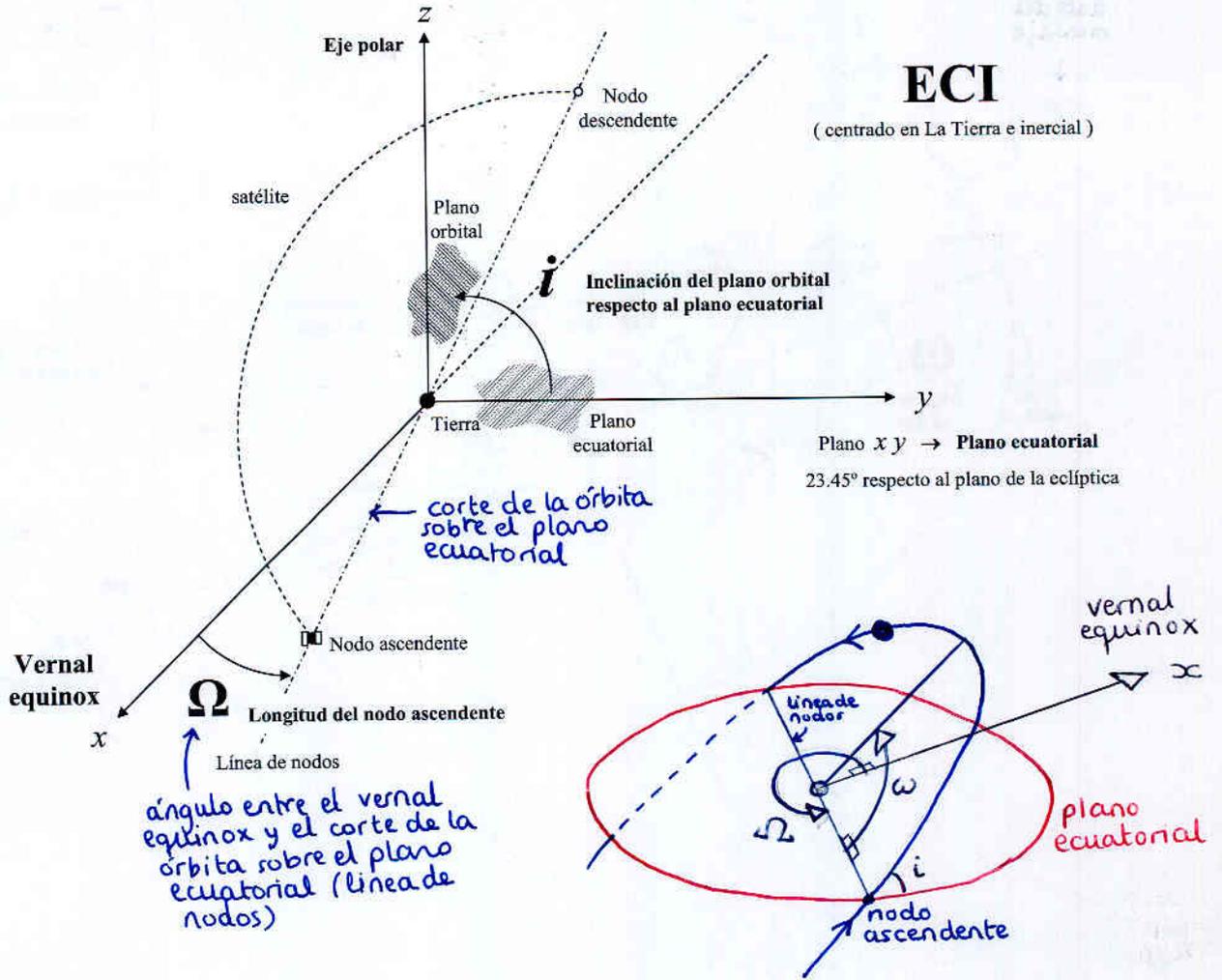


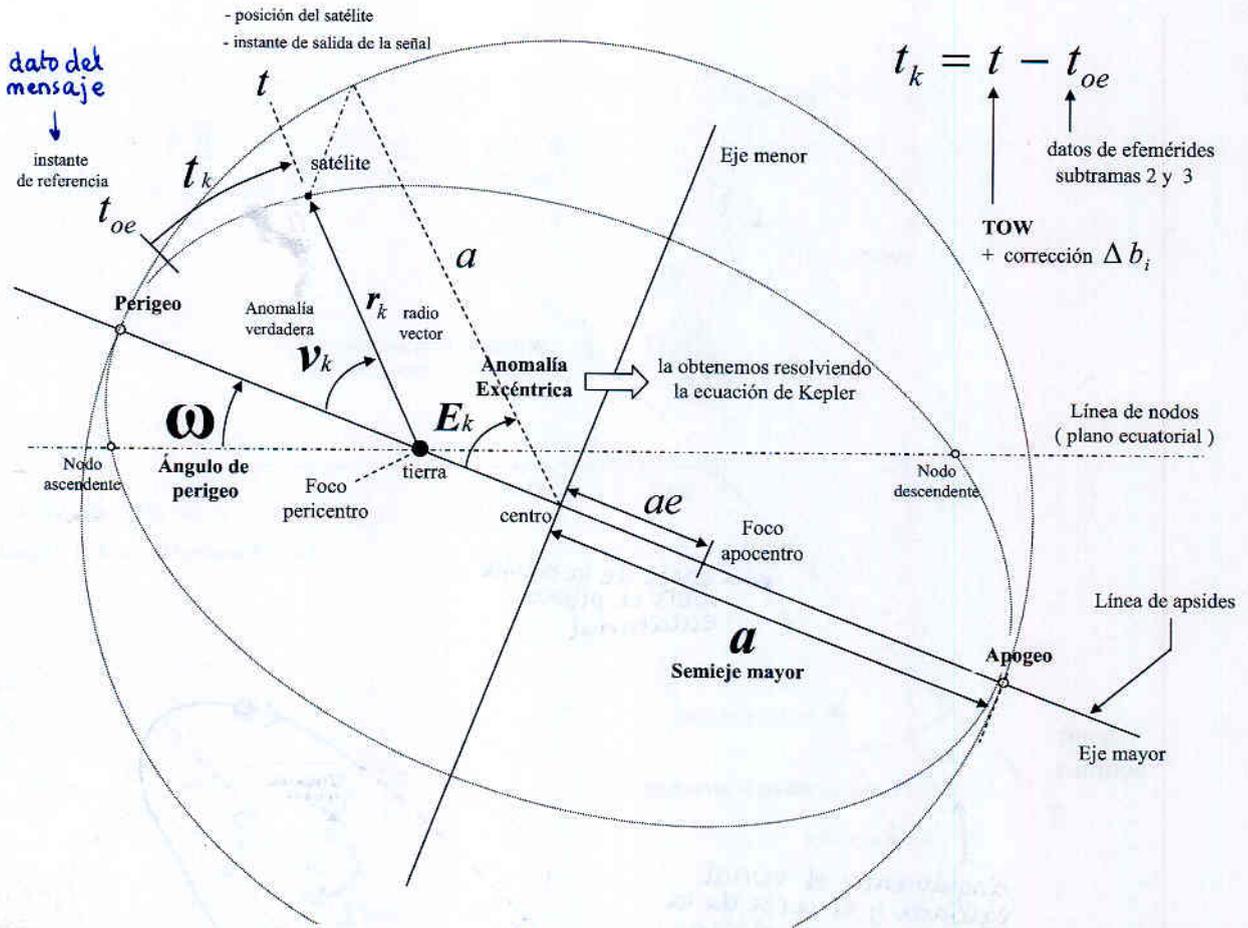
3 dimensionales {

- $a$  Semieje mayor de la elipse
- $e$  Excentricidad de la elipse  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
- $t_p$  Tiempo de paso por el perigeo  
(o bien cualquier otro instante de referencia)

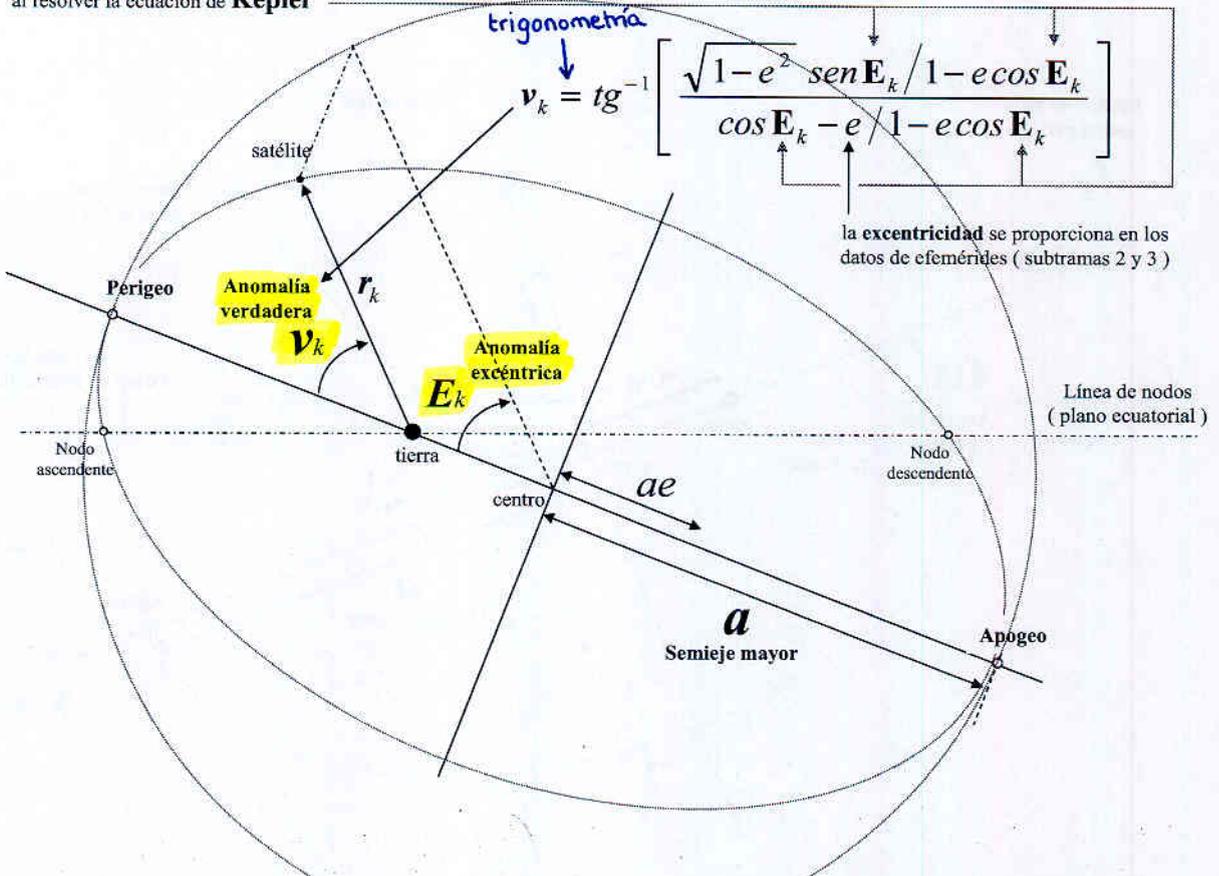
# ECI

(centrado en La Tierra e inercial)





al resolver la ecuación de Kepler



## Ecuación de órbita de Kepler

**anomalía media**  
sigue una **variación lineal con el tiempo**

$$M_k = E_k - e \sin E_k = M_0 + n t_k$$

dato del mensaje  
↓  
 $t_k = t - t_{oe}$   
↑  
TOW + corrección  
"Δbi"  
"tsj"

**según modelo WGS - 84**

$\mu = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2$

$\mu = G_T \cdot M_T$

Constante de gravitación universal  
 $G_T = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$

Masa de la tierra  
 $M_T = 5.28 \times 10^{24} \text{ Kg}$

$F = G_T \frac{m \cdot m'}{d^2}$

Ley de Gravitación Universal  
(Newton)

Anomalía media en el tiempo de referencia  $t_{oe}$   
Se proporciona en los datos de efemérides ( subtramas 2 y 3 )

cte. de proporcionalidad

Movimiento medio  
 $n = n_0 + \Delta n$

Corrección del movimiento medio  
datos de efemérides

3ª Ley de Kepler

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

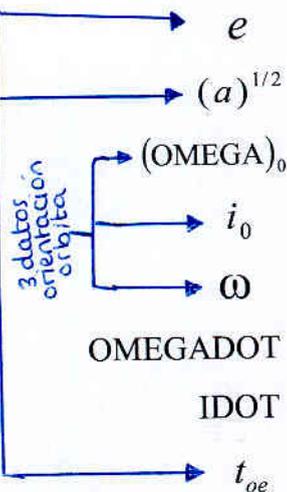
dato

$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$   
← parámetro gravitacional terrestre  
← el semieje mayor de la elipse viene en los datos de efemérides

## Datos de efemérides ( Subtramas 2 y 3 )

Símbolo	Definición
$M_0$	Anomalía media en el tiempo de referencia
$\Delta n$	Corrección para el movimiento medio
$e$	Excentricidad de la órbita
$(a)^{1/2}$	Raíz cuadrada del semieje mayor de la elipse
$(\text{OMEGA})_0$	Longitud del nodo ascendente del plano de la órbita en el tiempo de referencia
$i_0$	Ángulo de inclinación en el tiempo de referencia
$\omega$	Ángulo de perigeo
OMEGADOT	Velocidad de migración del nodo ascendente
IDOT	Velocidad de oscilación del ángulo de inclinación
$t_{oe}$	Tiempo de referencia para efemérides
IODE	"Issue of data (ephemeris)" <span style="color: blue;">Indicador de etiqueta</span>

3 datos dimensión órbita



Resolver Ecuación Kepler

junto a e, a, toe

correcciones órbita

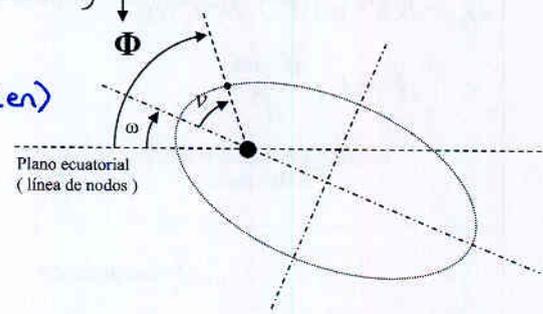
## Datos de efemérides cont. ( Subtramas 2 y 3 )

periodicidad:  
armónicos de  $\omega$   
i.e.  $\frac{T}{2}$

3 fenómenos de  
perturbación  
de segundo  
orden  
(suficiente)

Símbolo	Definición	
$C_{uc}$	Amplitud del término de corrección coseno armónico	} para la <b>latitud</b> $\omega + \nu$
$C_{us}$	Amplitud del término de corrección seno armónico	
$C_{rc}$	Amplitud del término de corrección coseno armónico	} para el <b>radio vector</b> $r_k$
$C_{rs}$	Amplitud del término de corrección seno armónico	
$C_{ic}$	Amplitud del término de corrección coseno armónico	} para la <b>inclinación</b> $i$
$C_{is}$	Amplitud del término de corrección seno armónico	

periodo  $T/2$   
(armónico 2º orden)



### Cálculo de la posición del satélite GPS en coordenadas EC-EF

Partimos del valor adoptado por WGS-84 para el parámetro universal de gravitación

$$\mu = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2$$

y también del valor adoptado por WGS-84 para la velocidad de rotación terrestre

$$\dot{\Omega}_e = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{s}$$

Semieje mayor  $a = (\sqrt{a})^2$

viene en el mensaje de navegación

Calculamos el movimiento medio (rad/s)

$$n_0 = \sqrt{\mu / a^3}$$

↑  
**Earth -Centered  
Earth -Fixed**  
(rotante con la tierra)



Corrección del movimiento medio

en el mensaje  
(efemérides)

$$n = n_0 + \Delta n$$

$$n_0 = \sqrt{\mu / a^3}$$

Anomalía media (órbita de Kepler)

$$M_k = M_0 + n t_k$$

Anomalía media en el  
instante de referencia  $t_{oe}$   
(efemérides)

Valor standard de  $\pi$  para GPS

$$\pi = 3.1415926535\ 898$$



$$M_k = M_0 + n t_k$$

Ecuación de Kepler para la anomalía excéntrica

$$M_k = E_k - e \operatorname{sen} E_k$$

excentricidad  
(efemérides)

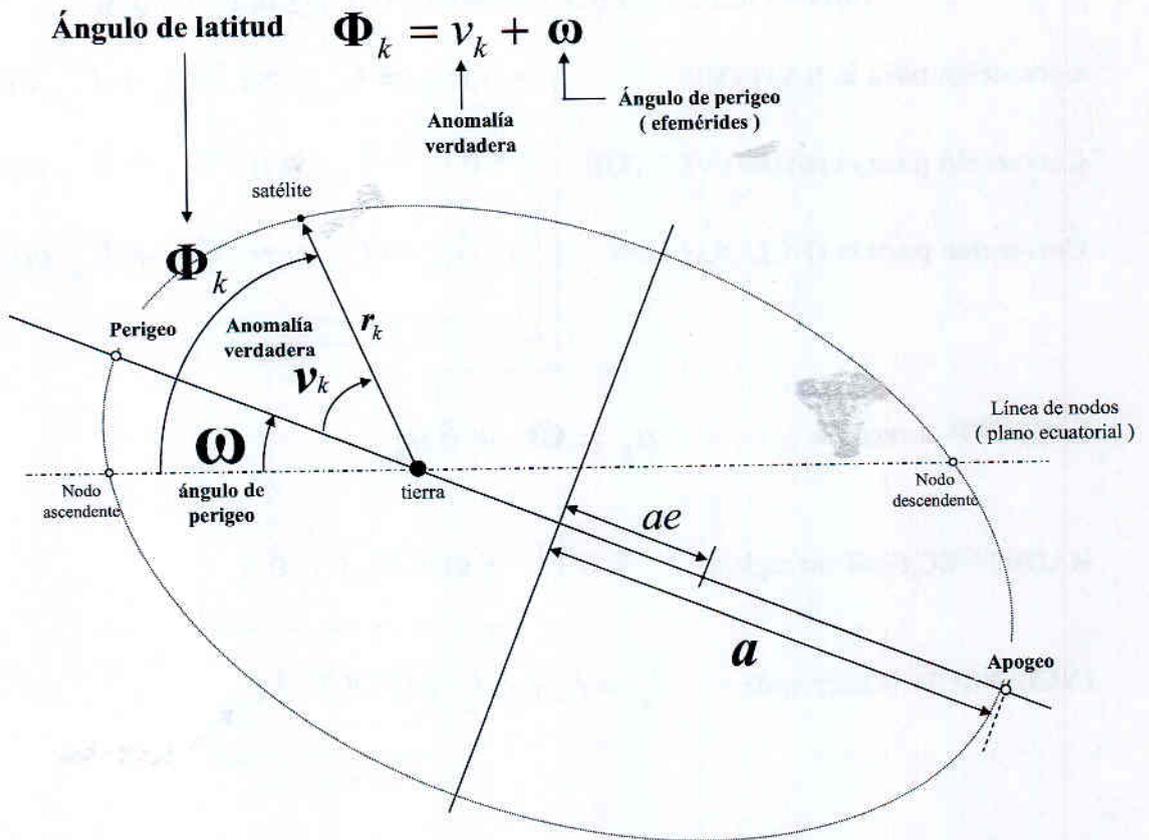
por métodos iterativos  
se obtiene

Anomalía excéntrica

$$E_k$$

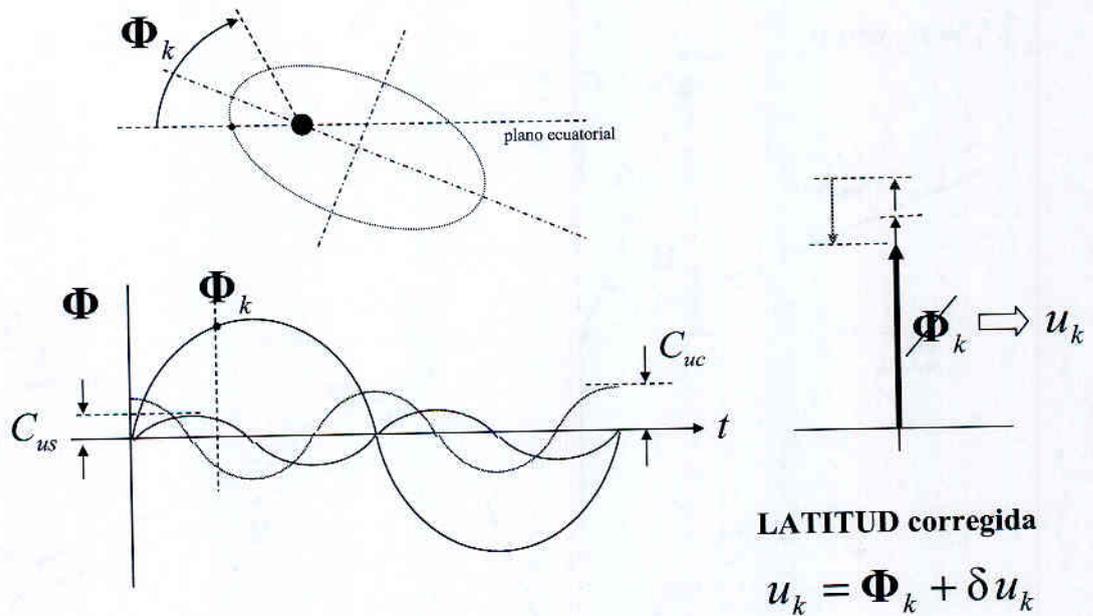
La anomalía verdadera en función de la anomalía excéntrica es :

$$v_k = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1-e} \operatorname{sen} E_k / 1 - e \cos E_k}{\cos E_k - e / 1 - e \cos E_k} \right]$$



### Corrección de las perturbaciones de segundo armónico

Corrección para la LATITUD  $\delta u_k = C_{us} \text{sen } 2\Phi_k + C_{uc} \text{cos } 2\Phi_k$



## Corrección de las perturbaciones de segundo armónico

Corrección para la LATITUD

Corrección para el RADIO VECTOR

Corrección para la INCLINACIÓN

$$\delta u_k = C_{us} \operatorname{sen} 2\Phi_k + C_{uc} \operatorname{cos} 2\Phi_k$$

$$\delta r_k = C_{rs} \operatorname{sen} 2\Phi_k + C_{rc} \operatorname{cos} 2\Phi_k$$

$$\delta i_k = C_{is} \operatorname{sen} 2\Phi_k + C_{ic} \operatorname{cos} 2\Phi_k$$

LATITUD corregida

$$u_k = \Phi_k + \delta u_k$$

RADIO VECTOR corregido

$$r_k = a(1 - e \operatorname{cos} E_k) + \delta r_k$$

INCLINACIÓN corregida

$$i_k = i_0 + \delta i_k + \underbrace{(\text{IDOT}) t_k}_{\text{oscilación de la inclinación del plano orbital}}$$

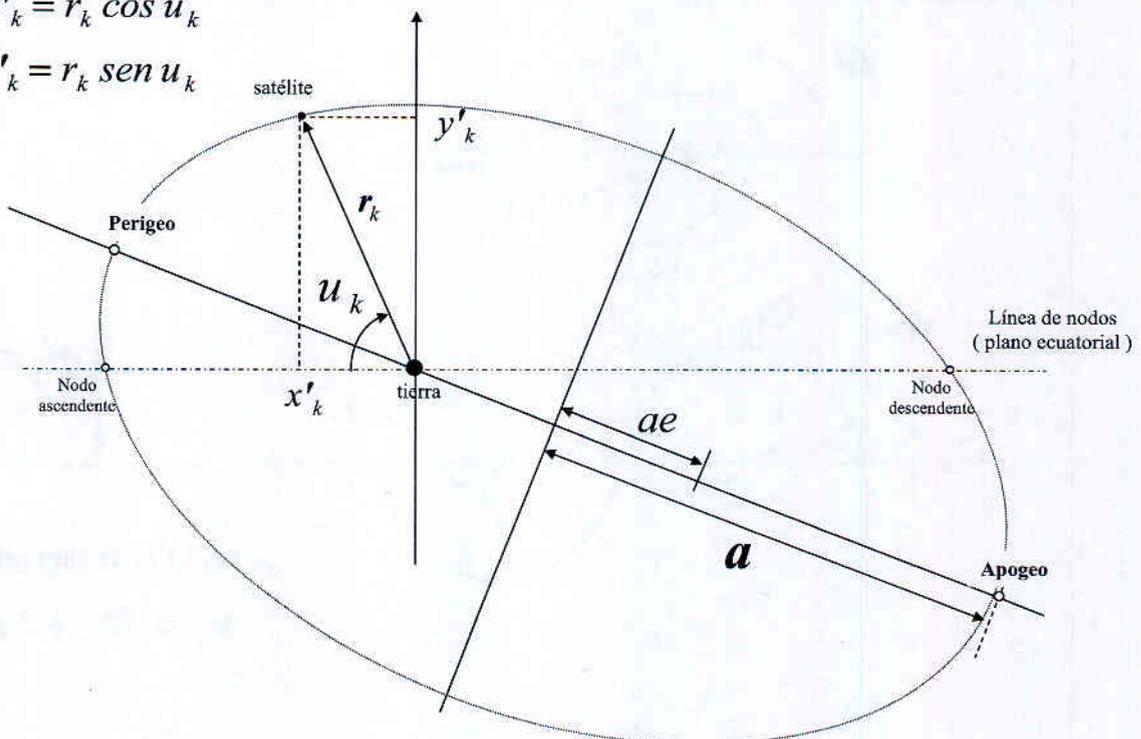
oscilación de la inclinación del plano orbital

$$t_k = t - t_{0e}$$

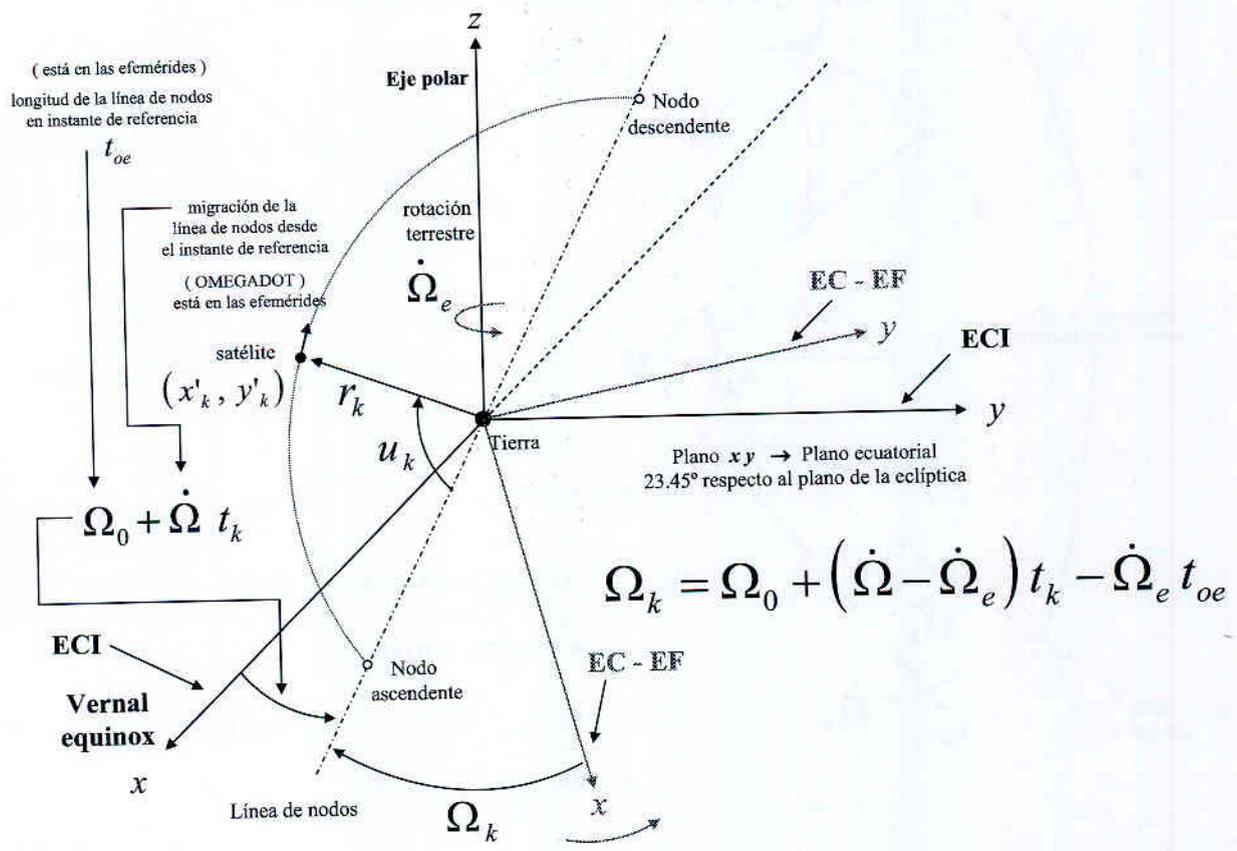
### Posición del satélite en el plano orbital

$$x'_k = r_k \operatorname{cos} u_k$$

$$y'_k = r_k \operatorname{sen} u_k$$



# Corrección de la longitud del nodo ascendente



longitud del nodo ascendente en el instante de referencia ECI

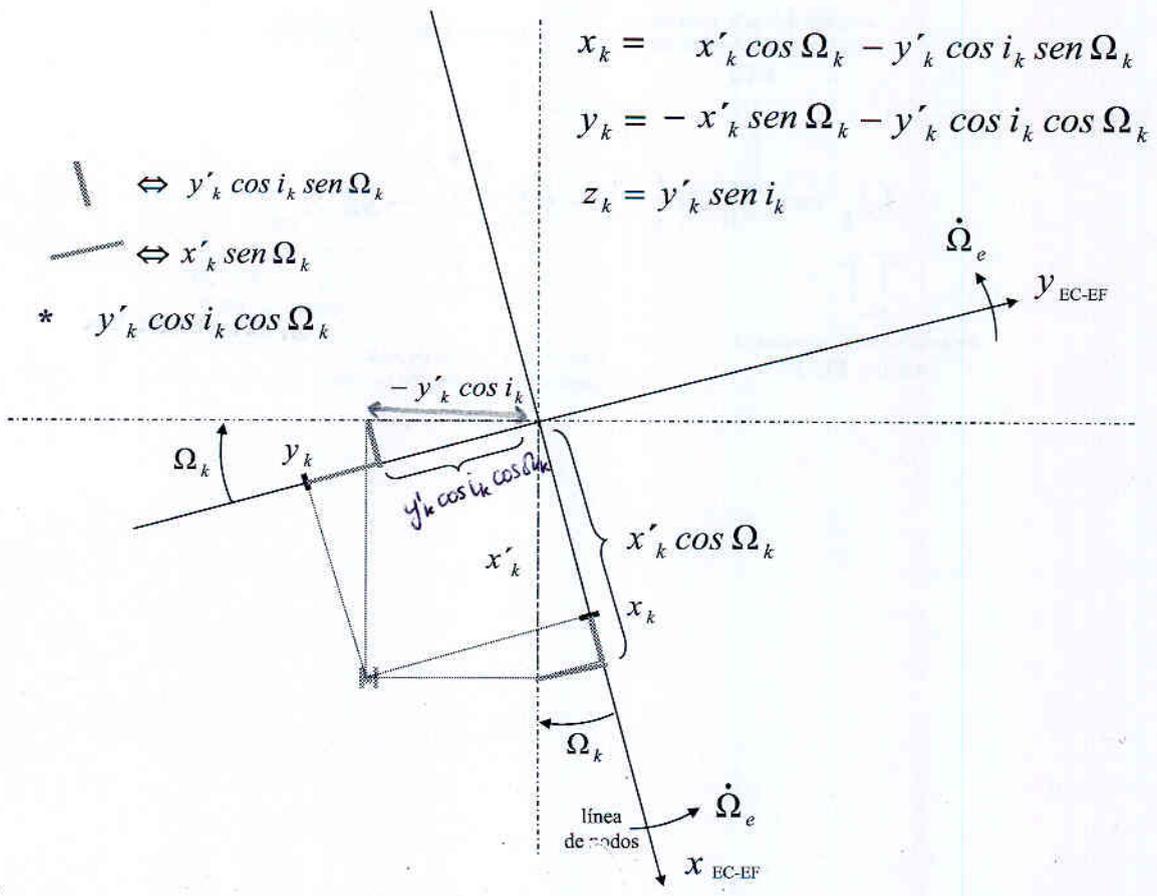
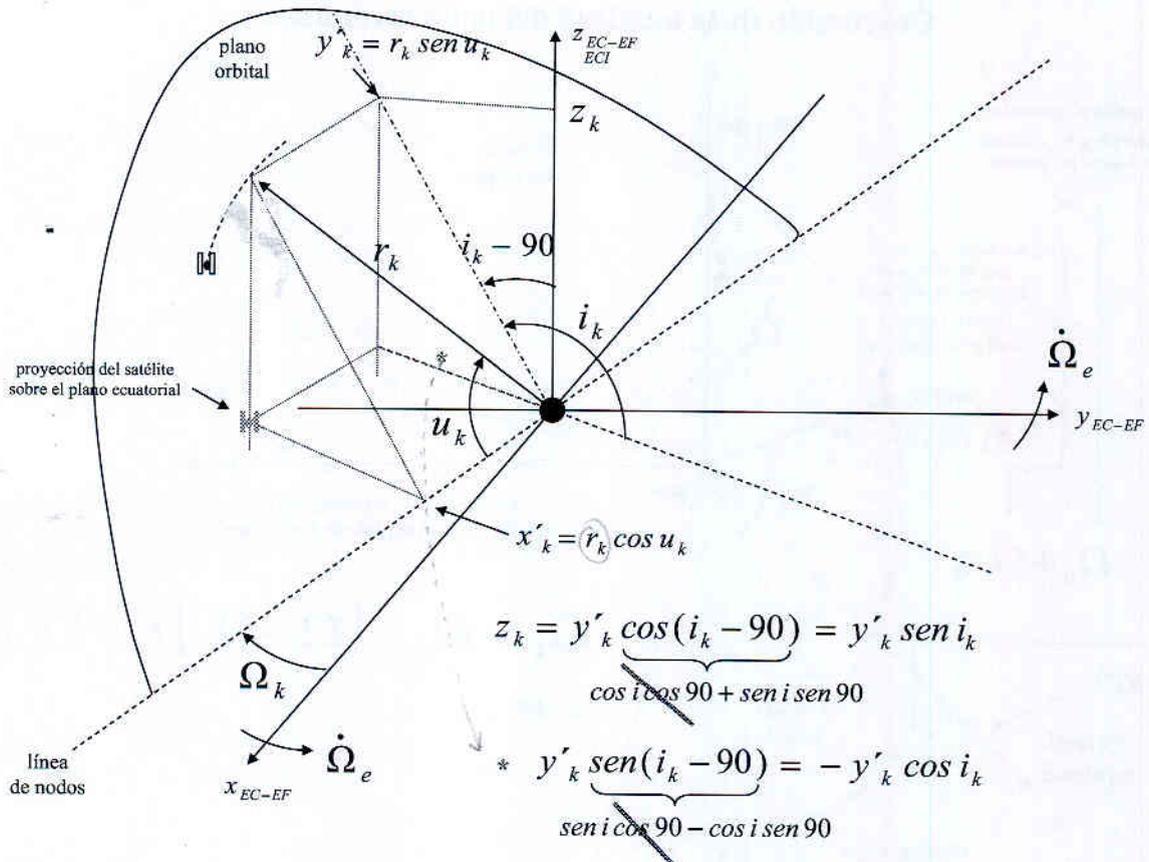
migración de la línea de nodos

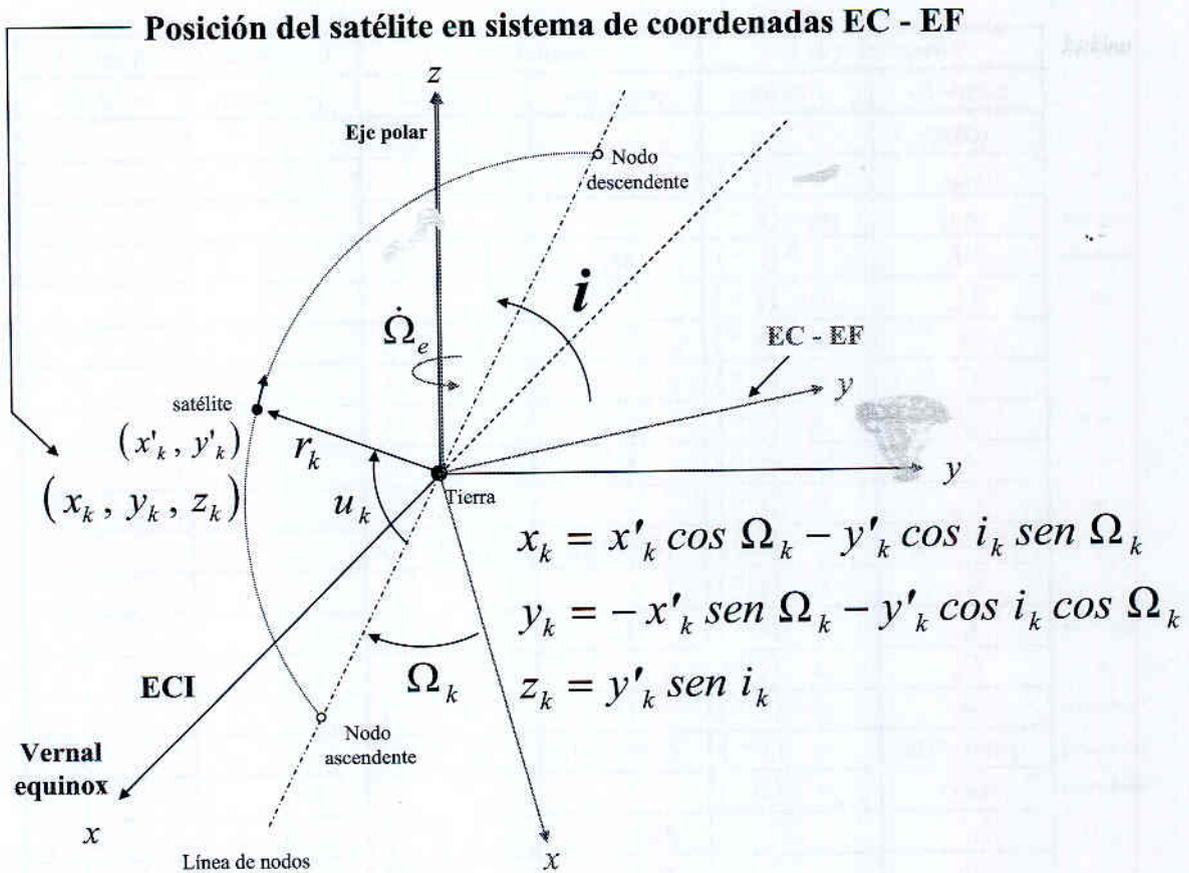
$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}$$

↑ longitud del nodo ascendente referida a EC-EF

rotación del EC-EF respecto al ECI en el instante  $t_{oe}$

migración de la línea de nodos compensada por la rotación terrestre





### Mensaje de Navegación ( subtramas 4 y 5 )

- Almanagues
- Estado de operatividad de los satélites ( Space Vehicle Health )
- Conversión del tiempo GPS al tiempo UTC
- Modelo ionosférico ( corrección del retardo ionosférico )

#### Almanagues

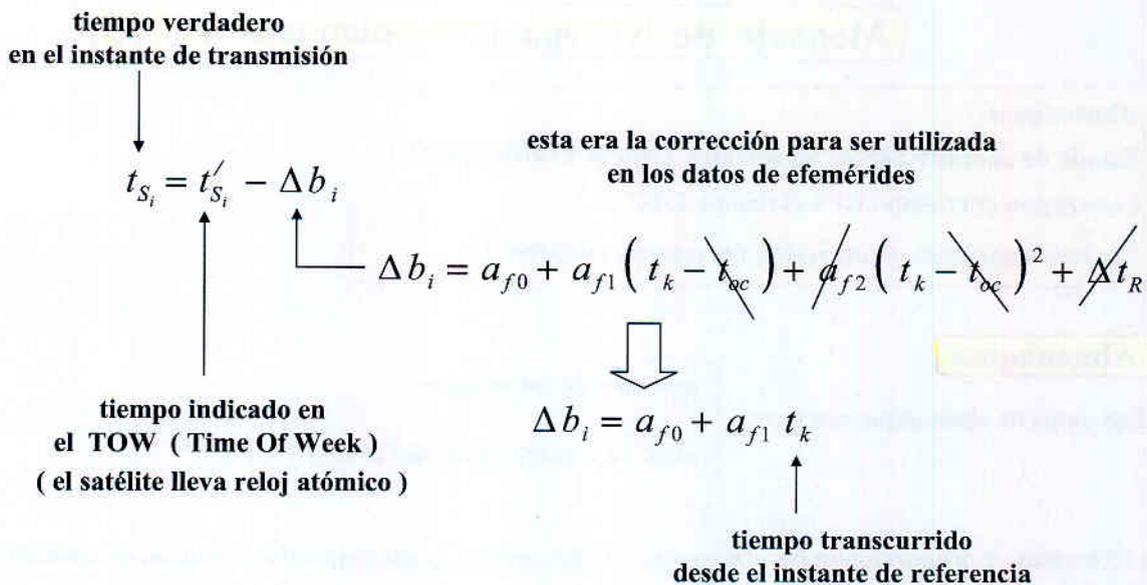
Los datos de almanaque son para

{	selección de los satélites
	ayuda a la adquisición del código P ( Y )

En 25 tramas se proporcionan los almanagues de 32 satélites y sus respectivos estados de operatividad  
 ↑  
 1 trama = 5 subtramas ( 12.5 min. )

Los datos de almanaque son un conjunto de datos de efemérides truncados de precisión reducida y de largo periodo de actualización

unidad	Efemérides ( 2 , 3 )		Almanaques ( 4 , 5 )		Corrección de reloj sat. ( 1 )	
	parámetro	nº de bits	parámetro	nº de bits	parámetro	nº de bits
	<b>IODE</b>	8				
m	$C_{rs}$	$16^c (2^{-5})$				
semicírculos	$\Delta n$	$16^c (2^{-43})$				
semicírculos	$M_0$	$32^c (2^{-31})$	$M_0$	$24^c (2^{-23})$		
rad	$C_{uc}$	$16^c (2^{-29})$				
	$e$	$32 (2^{-33})$	$e$	$16 (2^{-21})$		
rad	$C_{us}$	$16^c (2^{-29})$				
$m^{1/2}$	$a^{1/2}$	$32 (2^{-19})$	$a^{1/2}$	$24 (2^{-11})$		
s	$t_{oe}$	$16 (2^{-24})$	$t_{oe}$	$8 (2^{-12})$		
rad	$C_{ic}$	$16^c (2^{-29})$				
semicírculos	$(\text{OMEGA})_0$	$32^c (2^{-31})$	$(\text{OMEGA})_0$	$24^c (2^{-11})$		
rad	$C_{is}$	$16^c (2^{-29})$				
semicírculos	$i_0$	$32^c (2^{-31})$	$i_0$	$16^c (2^{-19})$		
m	$C_{rc}$	$16^c (2^{-5})$				
semicírculos	$\omega$	$32^c (2^{-31})$	$\omega$	$24^c (2^{-23})$		
semicírculos / s	OMEGADOT	$24^c (2^{-43})$	OMEGADOT	$16^c (2^{-38})$		
semicírculos / s	IDOT	$14^c (2^{-43})$				
			$a_{f0}$	$11^c (2^{-20})$	$a_{f0}$	$22^c (2^{-31})$
			$a_{f1}$	$11^c (2^{-38})$	$a_{f1}$	$16^c (2^{-43})$

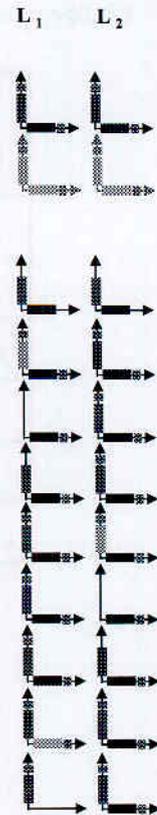


desde la última actualización, la exactitud de los datos de almanaque es :

- al cabo de 1 día → 900 m
- al cabo de 1 semana → 1200 m
- al cabo de 2 semanas → 3600 m

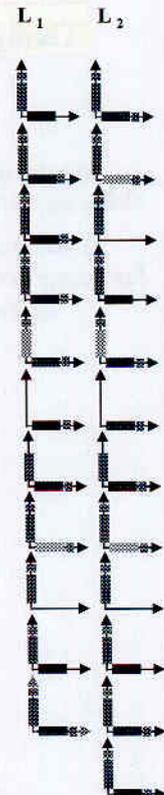
**Códigos para indicar el estado de la señal**

00000	todas las señales OK
00001	todas las señales débiles
00010	ninguna señal
00011	todas las señales sin modulación por datos
00100	señal P en $L_1$ débil
00101	sin señal P en $L_1$
00110	señal P en $L_1$ sin modulación por datos
00111	señal P en $L_2$ débil
01000	sin señal P en $L_2$
01001	señal P en $L_2$ sin modulación por datos
01010	señal C/A en $L_1$ débil
01011	sin señal C/A en $L_1$

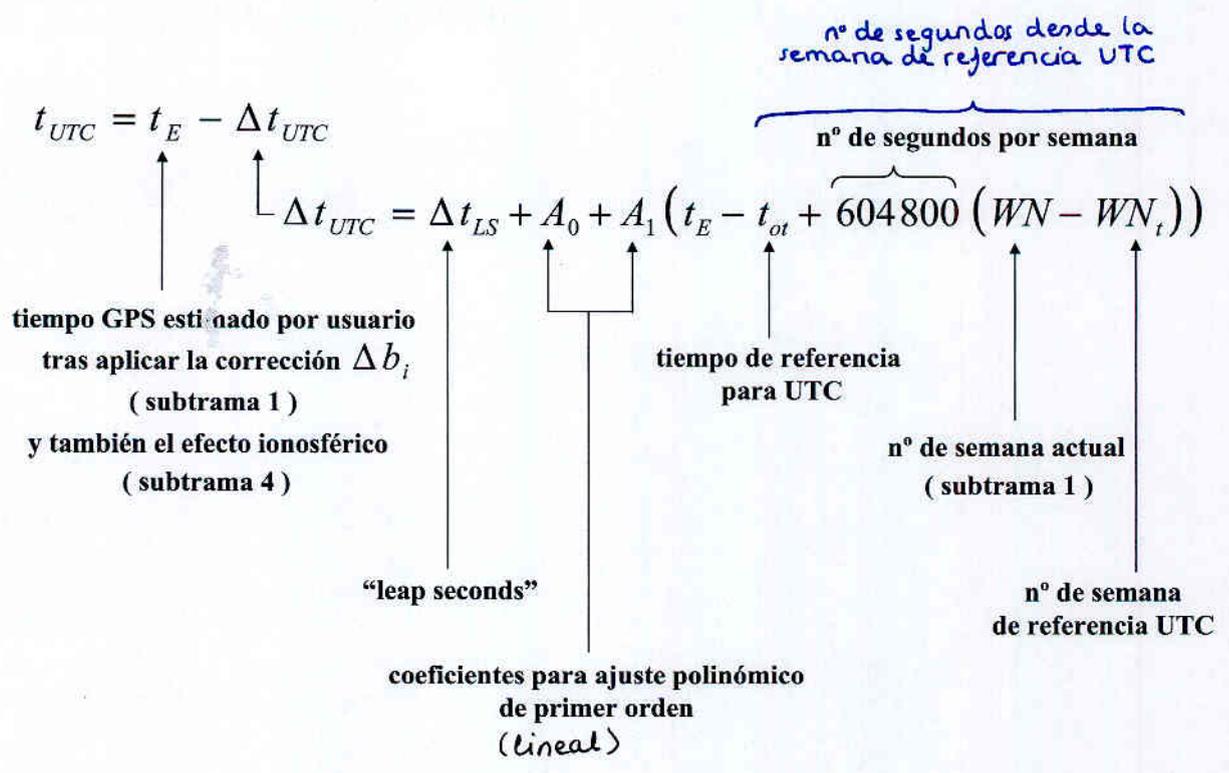


**Códigos para indicar el estado de la señal ( cont. )**

01100	señal C/A en $L_1$ sin modulación por datos
01101	señal C/A en $L_2$ débil
01110	sin señal C/A en $L_2$
01111	señal C/A en $L_2$ sin modulación por datos
10000	señal P débil en $L_1$ y $L_2$
10001	sin señal P en $L_1$ y $L_2$
10010	señal P en $L_1$ y $L_2$ sin modulación por datos
10011	señal C/A débil en $L_1$ y $L_2$
10100	sin señal C/A en $L_1$ y $L_2$
10101	señal C/A en $L_1$ y $L_2$ sin modulación por datos
10110	señal $L_1$ débil
10111	sin señal $L_1$

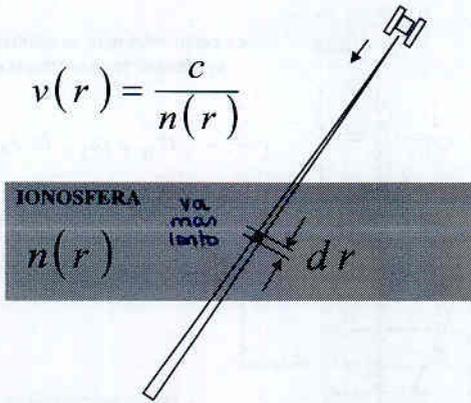






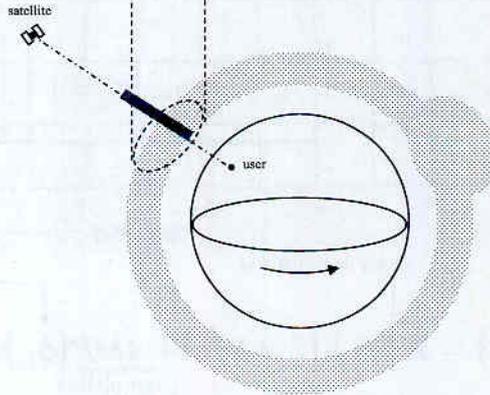
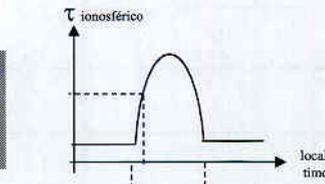


### Corrección Ionosférica (subtrama 4)



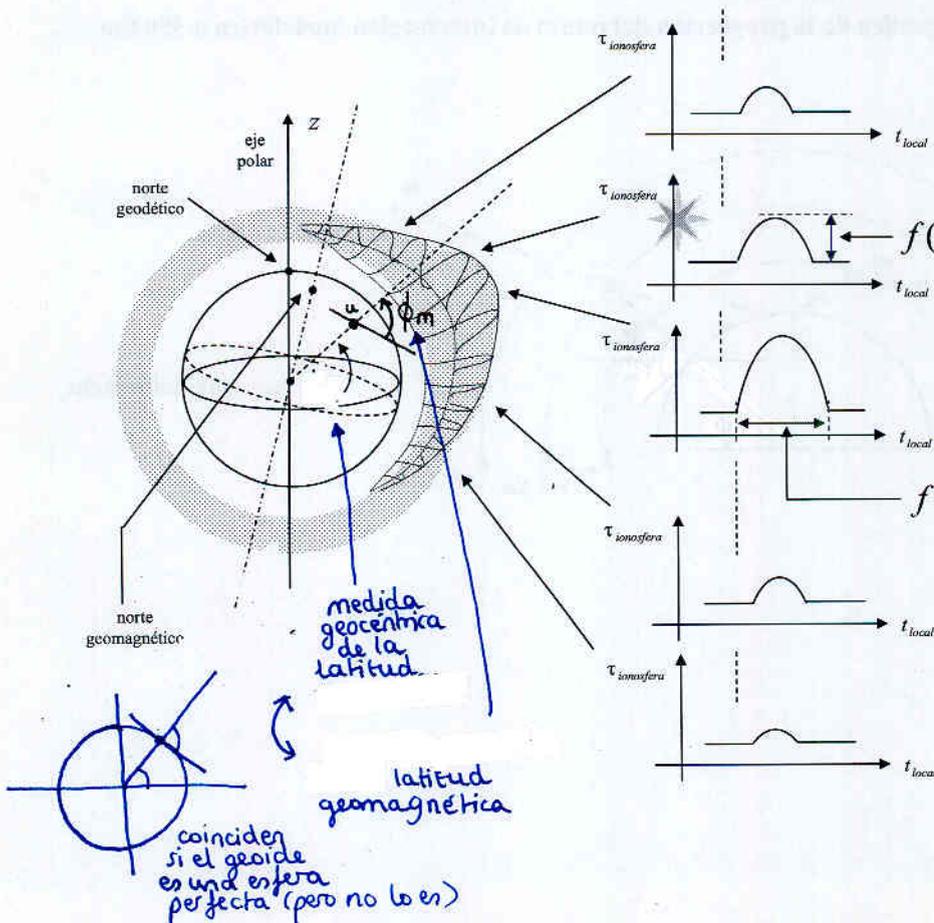
$$\Delta t = \frac{1}{c} \cdot n(r) \cdot dr$$

$$\tau = \frac{1}{c} \cdot \int_{ionosfera} n(r) dr$$



ionización de gases a causa del sol

### Corrección Ionosférica (subtrama 4)



latitud geomagnética .....  
no la geodética de toda la vida

datos en el mensaje

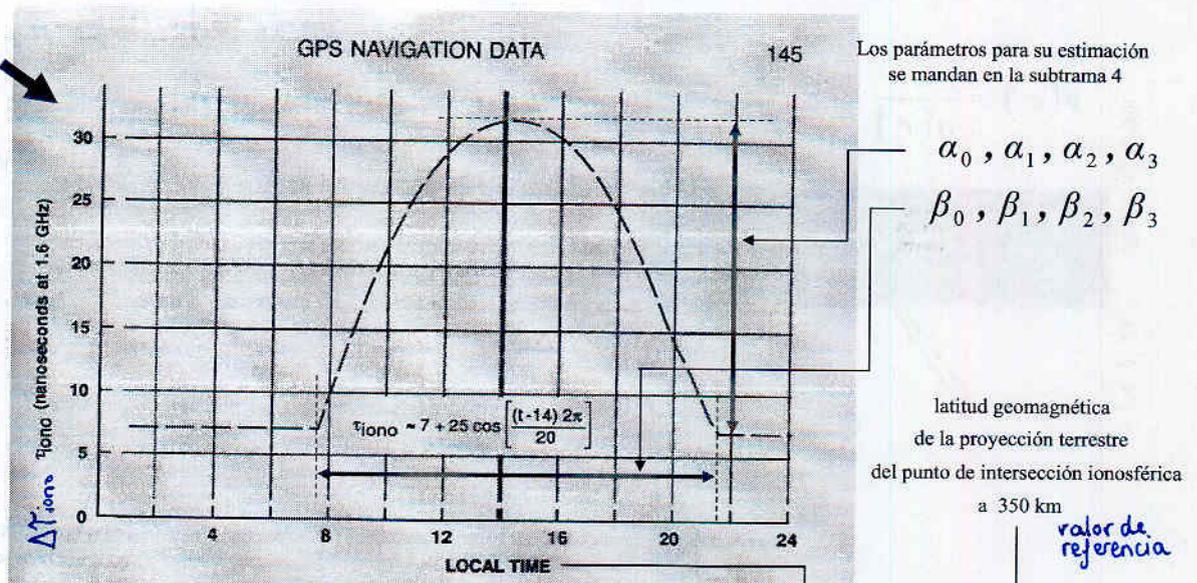
$$f(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \phi_m)$$

a diferentes latitudes hay modelos distintos

datos en el mensaje

$$f(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \phi_m)$$

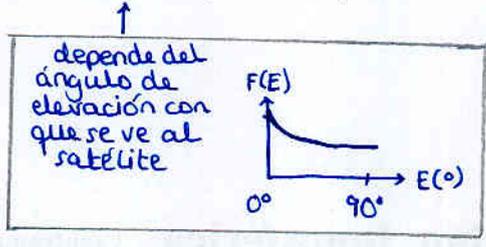
# Corrección Ionosférica Modelo de aproximación "medio coseno" de Klobuchar



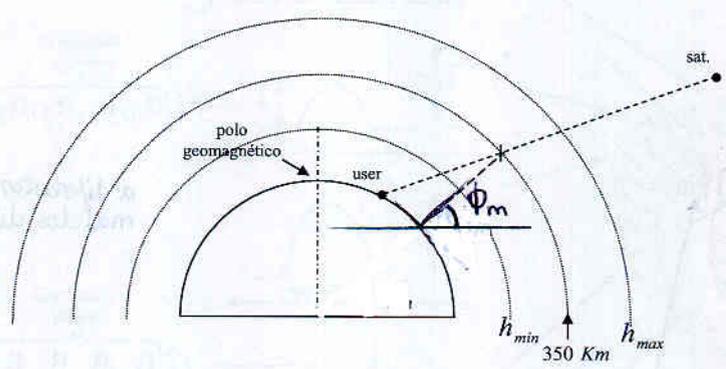
factor de oblicuidad

Para el día : 
$$I(t) = F(E) \cdot \left[ 5 \times 10^{-9} + \frac{AMP(\phi_m)}{\text{amplitud}} \cdot \cos \left[ 2\pi \left( t - \underbrace{50400}_{14 \text{ horas}} \right) / \frac{\text{PER}(\phi_m)}{\text{periodo}} \right] \right]$$

Para la noche : 
$$I(t) = F(E) \cdot (5 \times 10^{-9}) \text{ ns}$$

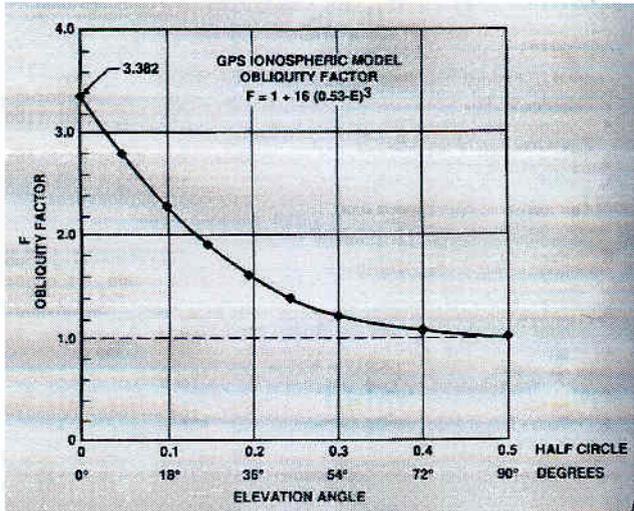


$\phi_m$  latitud geomagnética de la proyección del punto de intersección ionosférica a 350 km



$\phi_m$  hay que calcularlo

$$I(t) = \underbrace{F(E)}_{\text{factor de oblicuidad}} \cdot \left[ 5 \times 10^{-9} + AMP(\phi_m) \cdot \cos \left[ 2\pi (t - 50400) / PER(\phi_m) \right] \right]$$

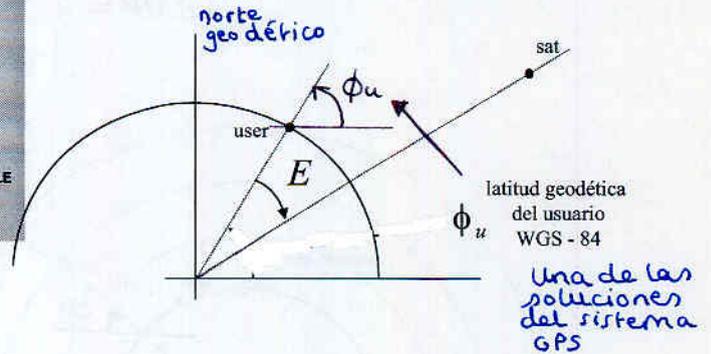


**Modelo del factor de oblicuidad**

$$F = 1 + 16 \cdot (0.53 - E)^3$$

ángulo de elevación entre usuario y satélite (semicírculos)

(tomado en sentido de las agujas del reloj desde el norte verdadero)



$\phi_u$  se conoce al determinar la posición de usuario

$E$  lo podremos determinar al conocer la posición del satélite

factor de oblicuidad

latitud geomagnética del punto de intersección ionosférica a 350 km

$$I(t) = F(E) \cdot \left[ 5 \times 10^{-9} + AMP(\phi_m) \cdot \cos \left[ 2\pi (t - 50400) / PER(\phi_m) \right] \right]$$

amplitud del "medio coseno" durante el día

periodo del "medio coseno"

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$

Para la función coseno, se utilizan los tres primeros términos de su desarrollo en serie

$$\cos x \cong 1 - (x^2/2) + (x^4/24) \quad |x| < 1.57 \approx \pi/2$$

$$I = \begin{cases} F \cdot \left[ (5 \times 10^{-9}) + (AMP) \cdot \left( 1 - (x^2/2) + (x^4/24) \right) \right] & |x| < 1.57 \text{ día} \\ F \cdot 5 \times 10^{-9} & |x| \geq 1.57 \text{ noche} \end{cases}$$

Modelo ionosférico para  $L_1$  → para  $L_2$  bastará multiplicar  $I$  por 1.646944444

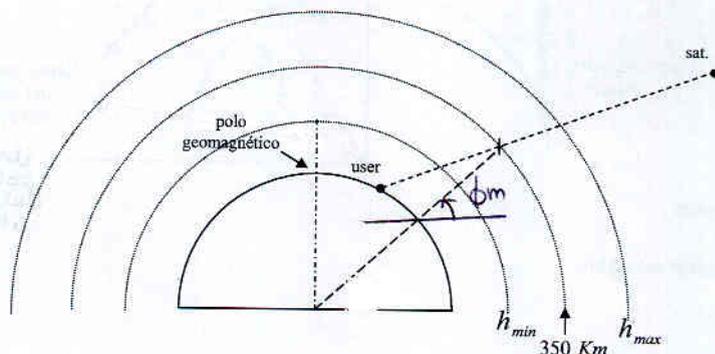
$$I = \begin{cases} F \cdot \left[ (5 \times 10^{-9}) + (AMP) \cdot \left( 1 - (x^2 / 2) + (x^4 / 4) \right) \right] & |x| < 1.57 \text{ día} \\ F \cdot 5 \times 10^{-9} & |x| \geq 1.57 \text{ noche} \end{cases}$$

amplitud

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  en subtrama 4

latitud geomagnética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a la altura media de 350 Km (semicírculos)

$$AMP = \begin{cases} \sum_{n=0}^3 \alpha_n \phi_m^n & AMP \geq 0 \\ \text{si } AMP < 0 \rightarrow AMP = 0 \end{cases}$$



$\phi_m$  hay que calcularlo

$$I = \begin{cases} F \cdot \left[ (5 \times 10^{-9}) + (AMP) \cdot \left( 1 - (x^2 / 2) + (x^4 / 4) \right) \right] & |x| < 1.57 \text{ día} \\ F \cdot 5 \times 10^{-9} & |x| \geq 1.57 \text{ noche} \end{cases}$$

tiempo solar local (hay que calcularlo)

(sabiendo el tiempo GPS)

$$x = \frac{2\pi \cdot (t - 50400)}{PER} \quad (\text{rad.})$$

periodo

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  en subtrama 4

$$PER = \begin{cases} \sum_{n=0}^3 \beta_n \phi_m^n & PER \geq 72000 \text{ s} \\ \text{si } PER < 72000 \text{ s} \rightarrow PER = 72000 \text{ s} \end{cases}$$

latitud geomagnética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a la altura media de 350 Km

(semicírculos)

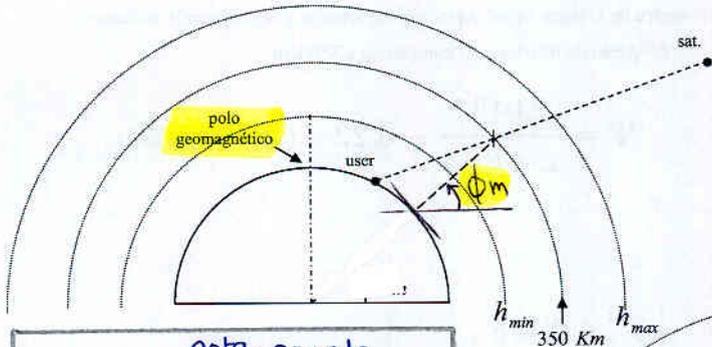
# Ahora viene la parte geométrica del problema

latitud geomagnética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km → se obtiene a partir de la del usuario y  $\psi$  (como veremos)

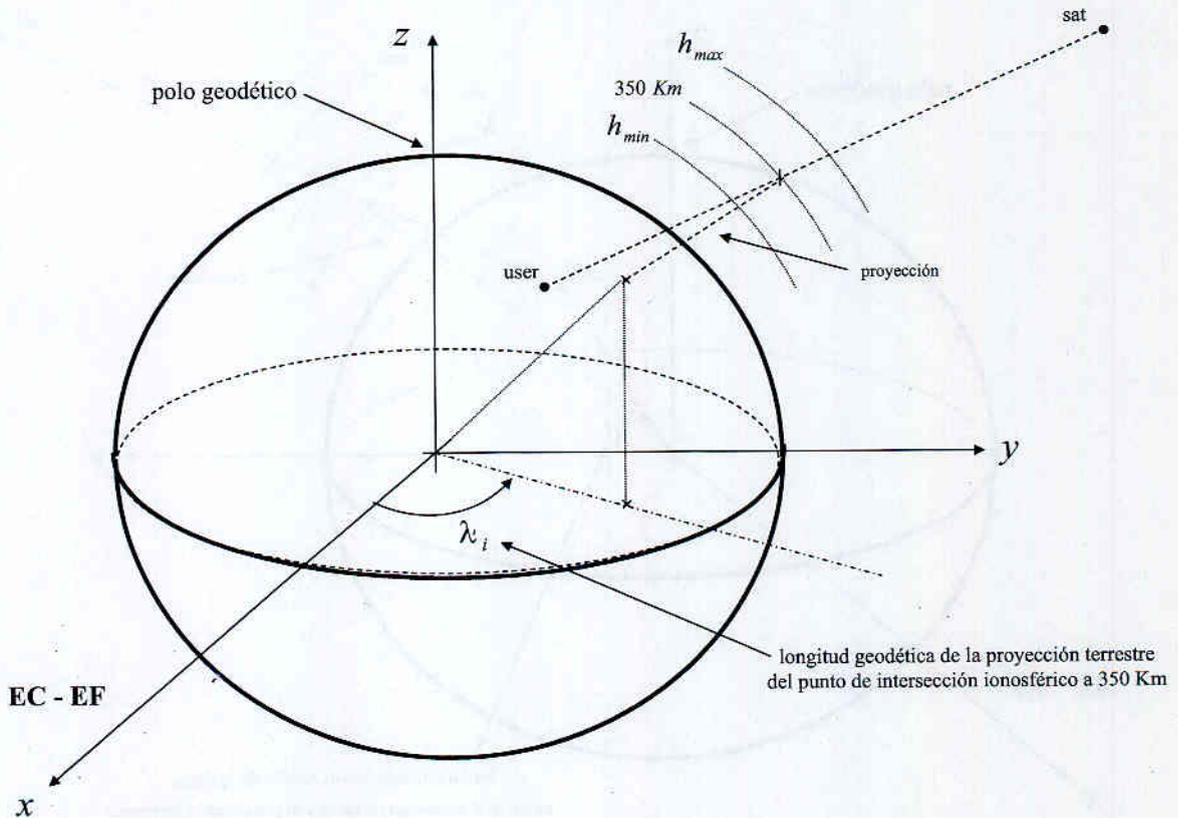
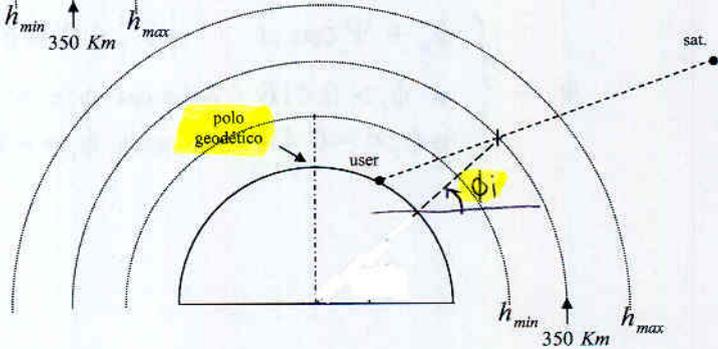
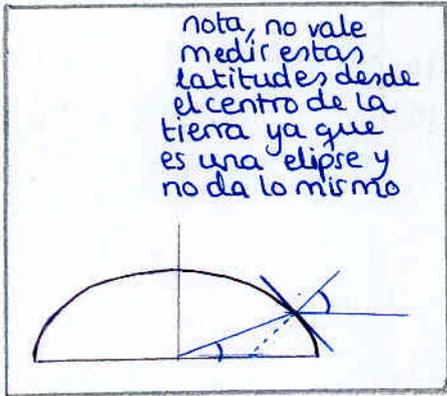
Siempre tomando la proyección terrestre del punto a 350 km

latitud geodética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km

$$\phi_m = \phi_i + 0.064 \cos(\lambda_i - 1.617) \quad (\text{semicírculos})$$



longitud geodética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km



$$\phi_m = \phi_i + 0.064 \cos(\lambda_i - 1.617)$$

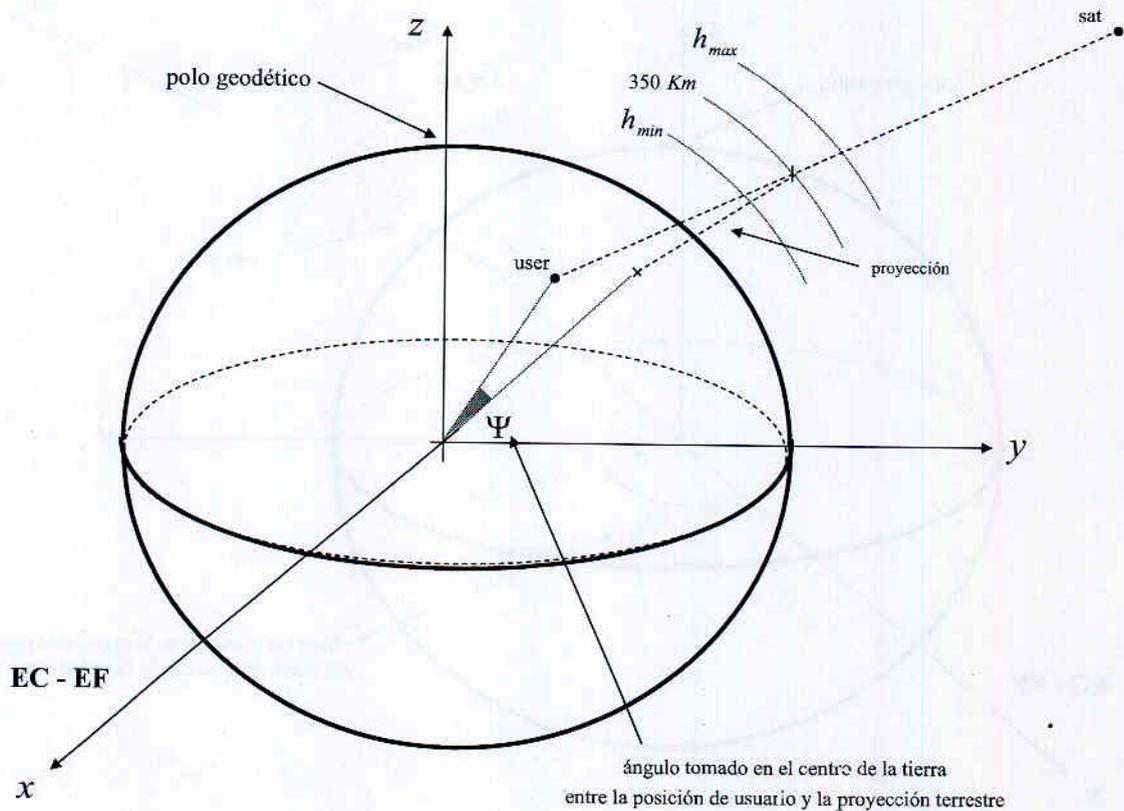
latitud geodética (WGS - 84) del usuario (semicírculos)

(la obtiene el receptor al determinar posición)

ángulo tomado en el centro de la tierra entre la posición de usuario y la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km

$$\Psi = \frac{0.0137}{E + 0.11} - 0.22 \quad (\text{semicírculos})$$

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_u + \Psi \cos A & |\phi_i| \leq 0.416 \\ \text{si } \phi_i > 0.416 & \text{entonces } \phi_i = +0.416 \\ \text{si } \phi_i < -0.416 & \text{entonces } \phi_i = -0.416 \end{cases} \quad (\text{semicírculos})$$



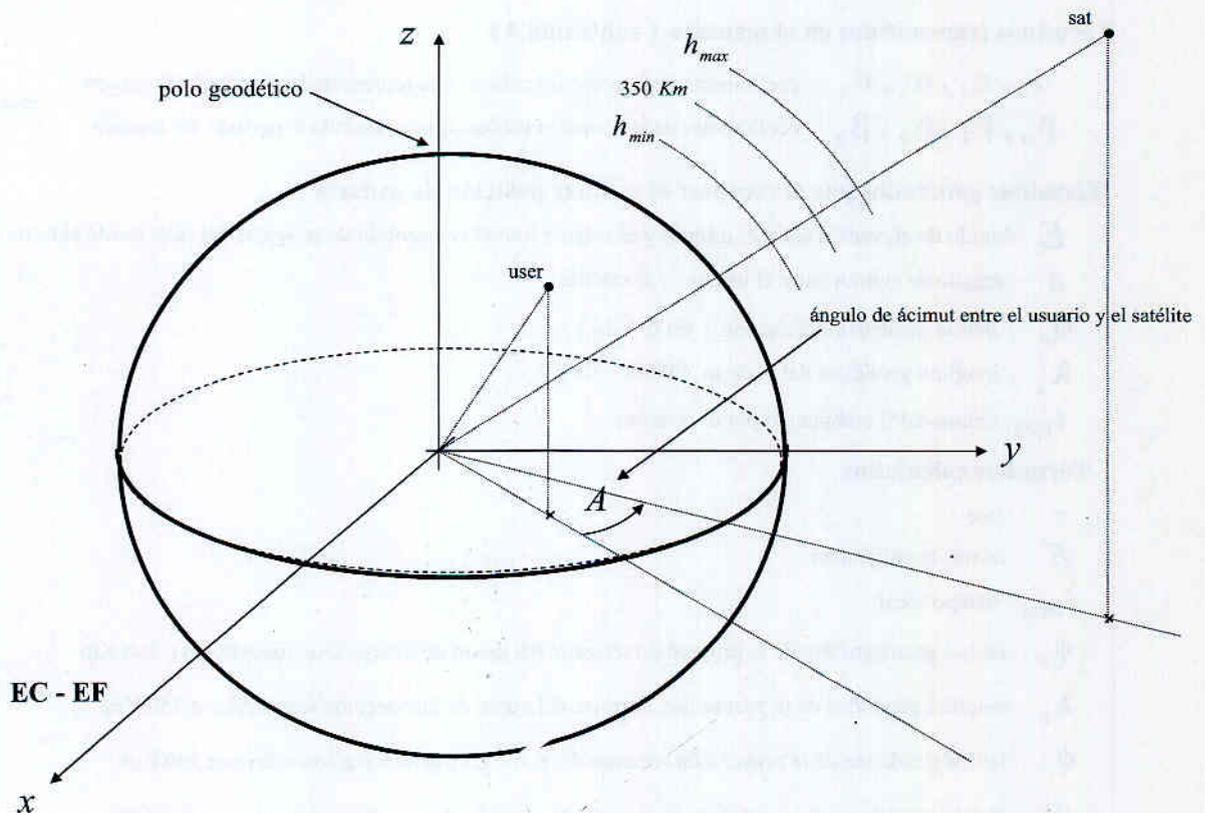
$$\phi_m = \phi_i + 0.064 \cos(\lambda_i - 1.617)$$

latitud geodética ( WGS - 84 ) del usuario ( semicírculos )

( la obtiene el receptor al determinar posición )

ángulo de ácimut entre el usuario y el satélite ( semicírculos )

$$\phi_i = \left\{ \begin{array}{l} \phi_u + \Psi \cos A \quad | \phi_i | \leq 0.416 \\ \text{si } \phi_i > 0.416 \quad \text{entonces } \phi_i = + 0.416 \\ \text{si } \phi_i < -0.416 \quad \text{entonces } \phi_i = - 0.416 \end{array} \right\} \text{ ( semicírculos )}$$



$$\phi_m = \phi_i + 0.064 \cos(\lambda_i - 1.617)$$

longitud geodética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km

$$\lambda_i = \lambda_u + \frac{\Psi \operatorname{sen} A}{\cos \phi_i} \quad (\text{semicírculos})$$

longitud geodética (WGS - 84) del usuario (semicírculos)

(la obtiene al determinar posición)

Finalmente, el tiempo solar local  $t$  (s)

$$t = 4.32 \cdot 10^4 \cdot \lambda_i + \text{tiempo GPS} (s) \quad 0 \leq t < 86400 s$$

$$\text{si } t \geq 86400 \implies t \leftarrow t - 86400 s$$

$$\text{si } t < 0 \implies t \leftarrow t + 86400 s$$

## Corrección ionosférica

Términos transmitidos en el mensaje (subtrama 4)

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  coeficientes de la ecuación cúbica que representa la amplitud del retardo

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  coeficientes de la ecuación cúbica que representa el periodo del modelo

cada coeficiente  
8 bits

Términos generados por el receptor al estimar posición de usuario

$E$  ángulo de elevación entre el usuario y el satélite tomado en sentido de la agujas del reloj desde el norte verdadero

$A$  ángulo de ácimut entre el usuario y el satélite

$\phi_u$  latitud geodética del usuario (WGS - 84)

$\lambda_u$  longitud geodética del usuario (WGS - 84)

$t_{\text{GPS}}$  tiempo GPS computado por el receptor

Términos calculados

$x$  fase

$F$  factor de oblicuidad

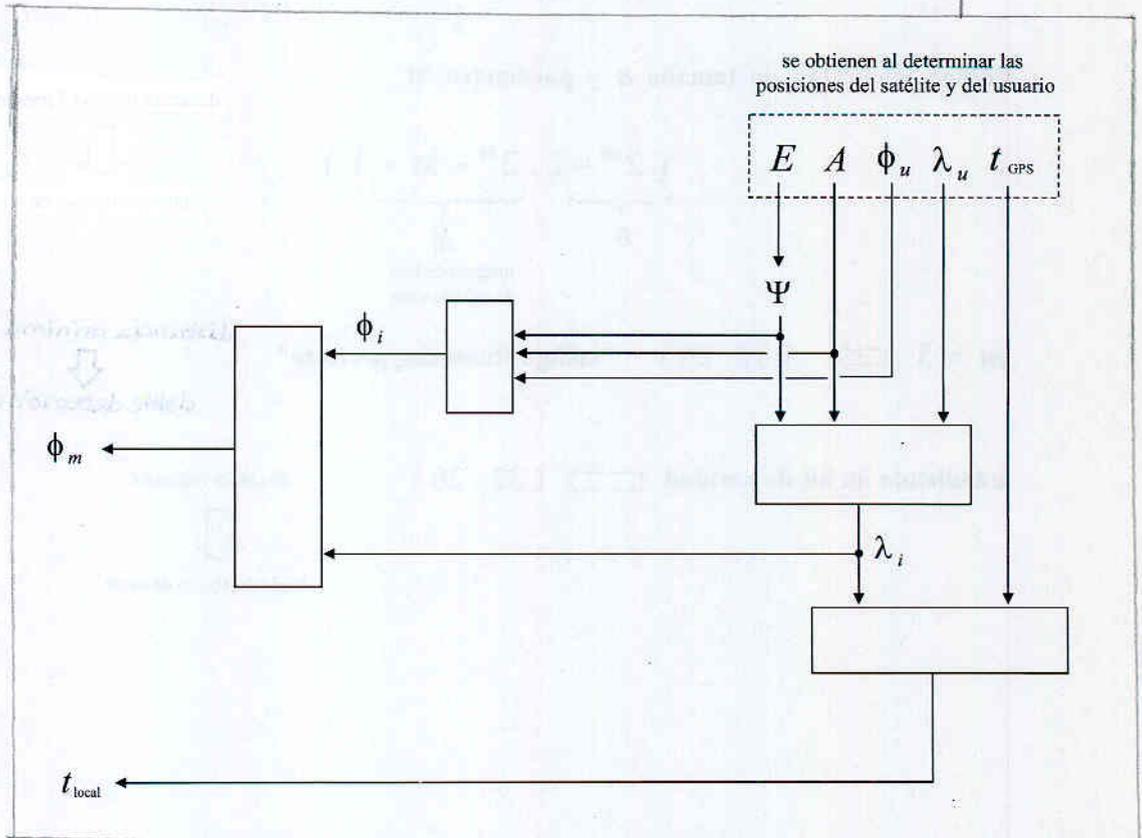
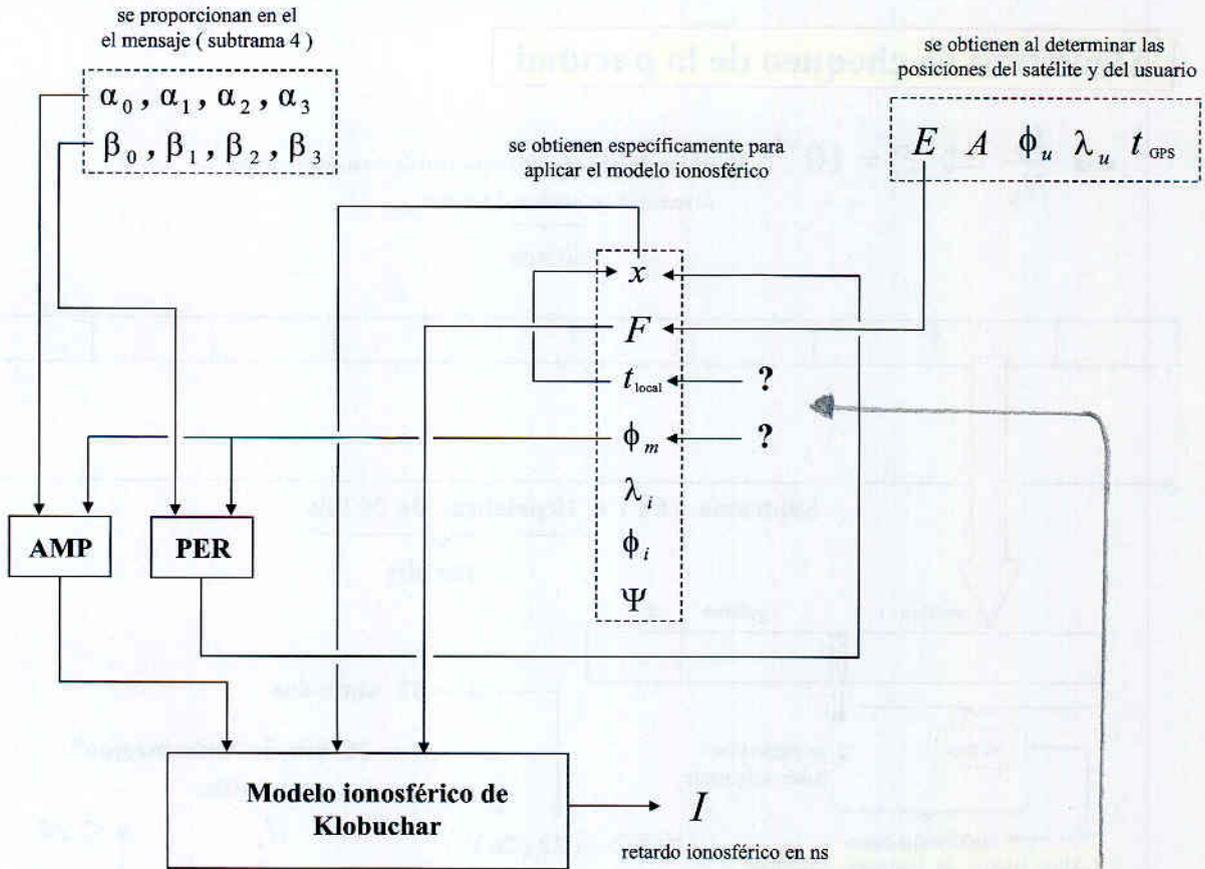
$t_{\text{local}}$  tiempo local

$\phi_m$  latitud geomagnética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km

$\lambda_i$  longitud geodética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km

$\phi_i$  latitud geodética de la proyección terrestre del punto de intersección ionosférico a 350 Km

$\Psi$  ángulo tomado en el centro de la tierra entre la posición de usuario y la proyección terrestre

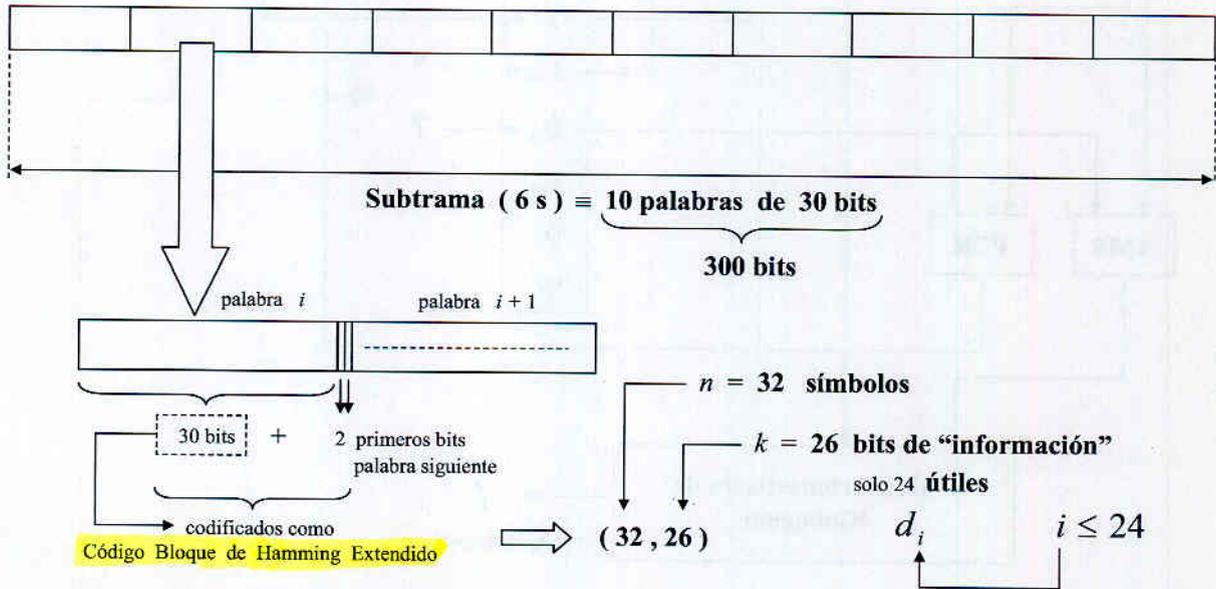


# Algoritmo de chequeo de la paridad

alta  $\frac{E_b}{N_0} \Rightarrow P_\epsilon = 10^{-5}$

a pesar de ello, se utiliza algoritmo de chequeo de paridad  
se rechazan las palabras con error

30 bits



## Código Hamming de tamaño $n$ y parámetro $m$

$$\left( \underbrace{2^m - 1}_n, \underbrace{2^m - m - 1}_k \right)$$

número de bits de información

$m = 5 \Rightarrow (31, 26)$  "código Hamming perfecto"

distancia mínima 3 para todo  $m$

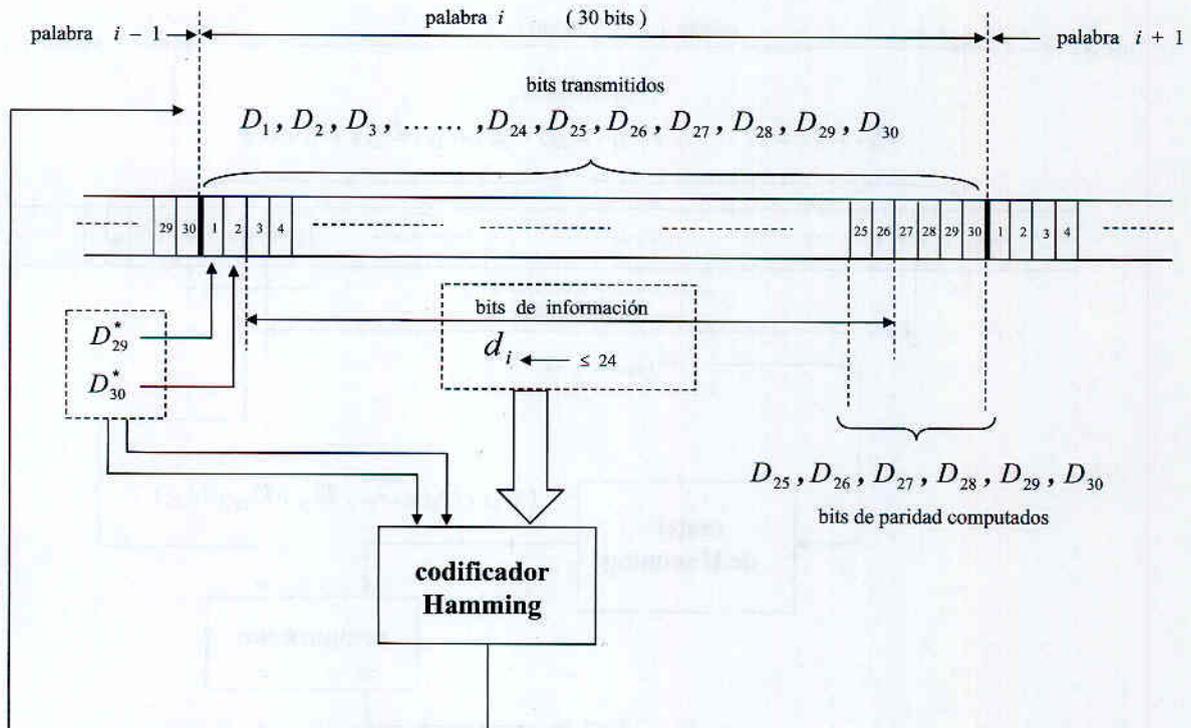
↓  
doble detección de error

añadiendo un bit de paridad  $\Rightarrow (32, 26)$

distancia mínima 4

↓  
triple detección de error

## Codificación Hamming



### codificación de paridad para una palabra de 30 bits

$$D_1 = d_1 \oplus D_{30}^*$$

$$D_2 = d_2 \oplus D_{30}^*$$

$$D_3 = d_3 \oplus D_{30}^*$$

$$D_{24} = d_{24} \oplus D_{30}^*$$

### matriz de paridad para código Hamming extendido (32, 26)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{25} = D_{29}^* \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus d_{10} \oplus d_{11} \oplus d_{12} \oplus d_{13} \oplus d_{14} \oplus d_{17} \oplus d_{18} \oplus d_{20} \oplus d_{23}$$

$$D_{26} = D_{30}^* \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_4 \oplus d_6 \oplus d_7 \oplus d_{11} \oplus d_{12} \oplus d_{13} \oplus d_{14} \oplus d_{15} \oplus d_{18} \oplus d_{19} \oplus d_{21} \oplus d_{24}$$

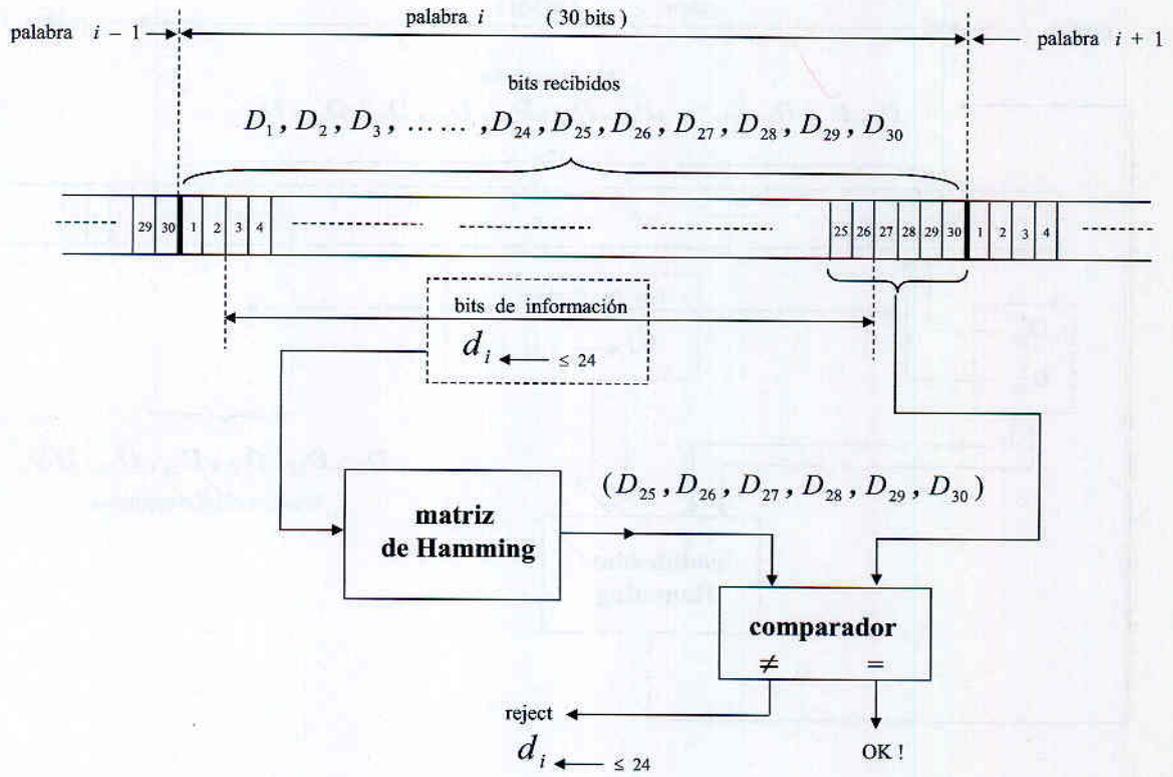
$$D_{27} = D_{29}^* \oplus d_1 \oplus d_3 \oplus d_4 \oplus d_5 \oplus d_7 \oplus d_8 \oplus d_{12} \oplus d_{13} \oplus d_{14} \oplus d_{15} \oplus d_{16} \oplus d_{19} \oplus d_{20} \oplus d_{22}$$

$$D_{28} = D_{30}^* \oplus d_2 \oplus d_4 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus d_8 \oplus d_9 \oplus d_{13} \oplus d_{14} \oplus d_{15} \oplus d_{16} \oplus d_{17} \oplus d_{20} \oplus d_{21} \oplus d_{23}$$

$$D_{29} = D_{30}^* \oplus d_1 \oplus d_3 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus d_7 \oplus d_9 \oplus d_{10} \oplus d_{14} \oplus d_{15} \oplus d_{16} \oplus d_{17} \oplus d_{18} \oplus d_{21} \oplus d_{22} \oplus d_{24}$$

$$D_{30} = D_{29}^* \oplus d_3 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus d_8 \oplus d_9 \oplus d_{10} \oplus d_{11} \oplus d_{13} \oplus d_{15} \oplus d_{19} \oplus d_{22} \oplus d_{23} \oplus d_{24}$$

### chequeo de la paridad

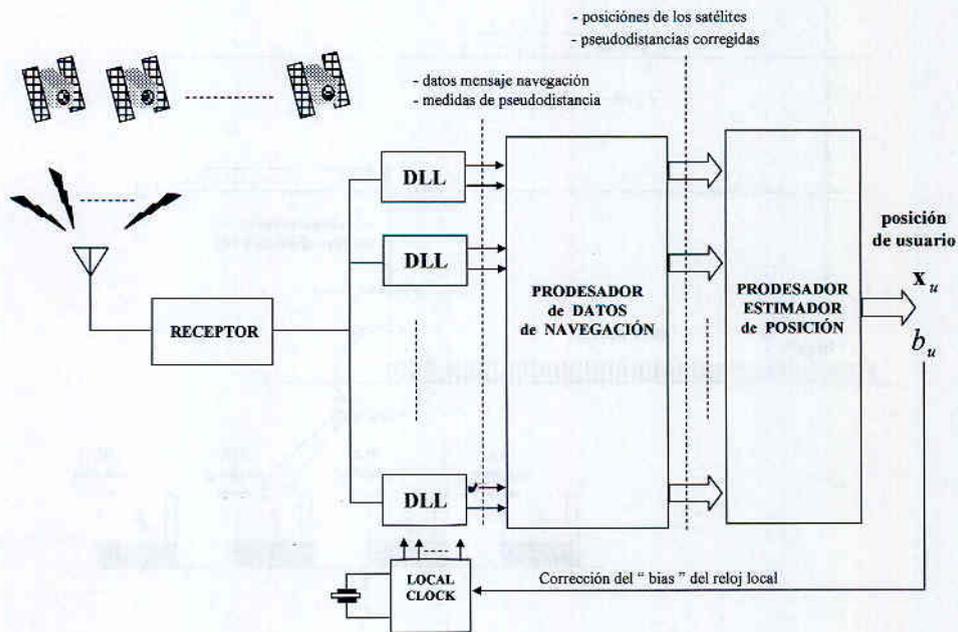


# ALGORÍTMOS de NAVEGACIÓN

## ( Estimación de la Posición de Usuario )

Solución de punto simple

~~Solución dinámica ( filtro de Kalman )~~



Nos referiremos a algoritmo basado en :

### Observación de la Pseudodistancia

Cuando el DLL encuentra el punto de máxima correlación

el retardo de propagación de la señal observado es  $(t_R - t_T)$

pseudodistancia

$$\rho = c(t_R - t_T)$$

tiene "bias"  
de reloj de usuario

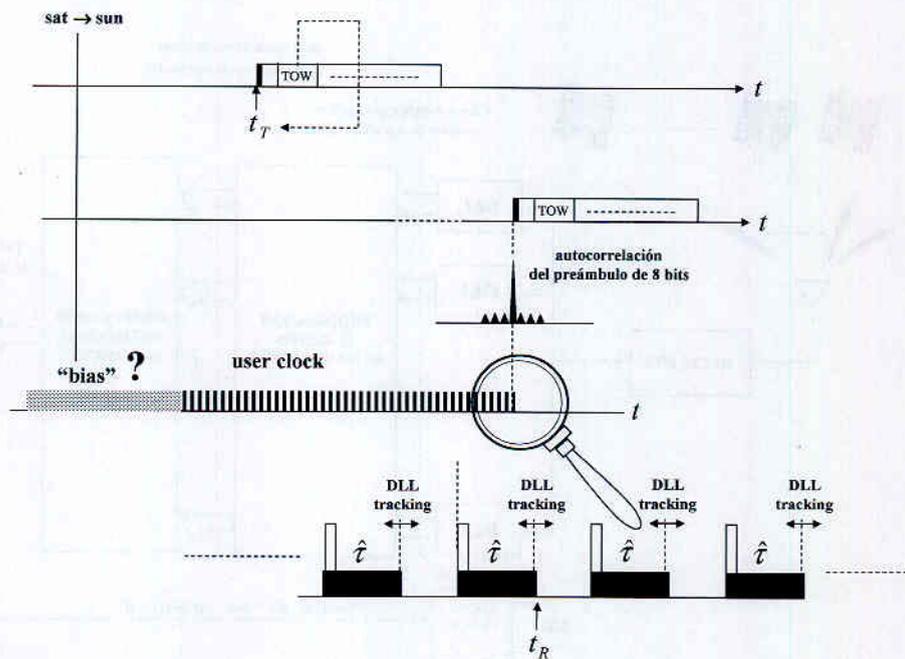
instante de transmisión  
de la señal  
( mensaje de navegación )

instante de recepción de la señal

lo que marca el Reloj de Usuario ( tiene "bias" )!!

al autocorrelarse el preámbulo de 8 bits del TLM

más la estimación de retardo  $\hat{t}$  proporcionada por el DLL



La pseudodistancia observada entre usuario y satélite  $i$

la podemos relacionar con la posición de usuario y estado del reloj mediante

**Ecuación de medida**

$$\rho_i = \left| \vec{r}_i - \vec{r}_u \right| + c b_u + \varepsilon_{\rho_i}$$

posición del satélite en el instante de transmisión  $\vec{r}_i$   
 posición de usuario en el instante de recepción  $\vec{r}_u$   
 "bias" del reloj de receptor de usuario  $b_u$   
 error de medida compuesto de:  
 retardo ionosférico  
 fallos modelo efemérides  
 disponibilidad selectiva  
 ruido del receptor  
 error de reloj del satélite

para extraer  $\vec{r}_u$  y  $b_u$  tenemos que linealizar la ecuación de medida entorno a un valor nominal

estimación inicial  $\hat{\mathbf{x}} = \left[ \hat{\vec{r}}_u^t \ c \hat{b}_u \right]^t$   $\hat{\varepsilon}_{\rho_i}$

vector de estado estimado

Estimación de pseudodistancia  $\hat{\rho}_i = \left| \vec{r}_i - \hat{\vec{r}}_u \right| + c \hat{b}_u + \hat{\varepsilon}_{\rho_i}$

**Residual de medida**  $\Delta \rho_i = \hat{\rho}_i - \rho_i$

medidas  $\rho_i$

predicciones  $\hat{\rho}_i = \left| \vec{r}_i - \hat{\vec{r}}_u \right| + c \hat{b}_u + \hat{\varepsilon}_{\rho_i}$

vector de geometría unitario "línea de visión" entre posición estimada de usuario y satélite  $\hat{\mathbf{I}}_i \equiv \frac{\vec{r}_i - \hat{\vec{r}}_u}{\left| \vec{r}_i - \hat{\vec{r}}_u \right|}$

residual de error  $\Delta \varepsilon_{\rho_i} \equiv \hat{\varepsilon}_{\rho_i} - \varepsilon_{\rho_i}$

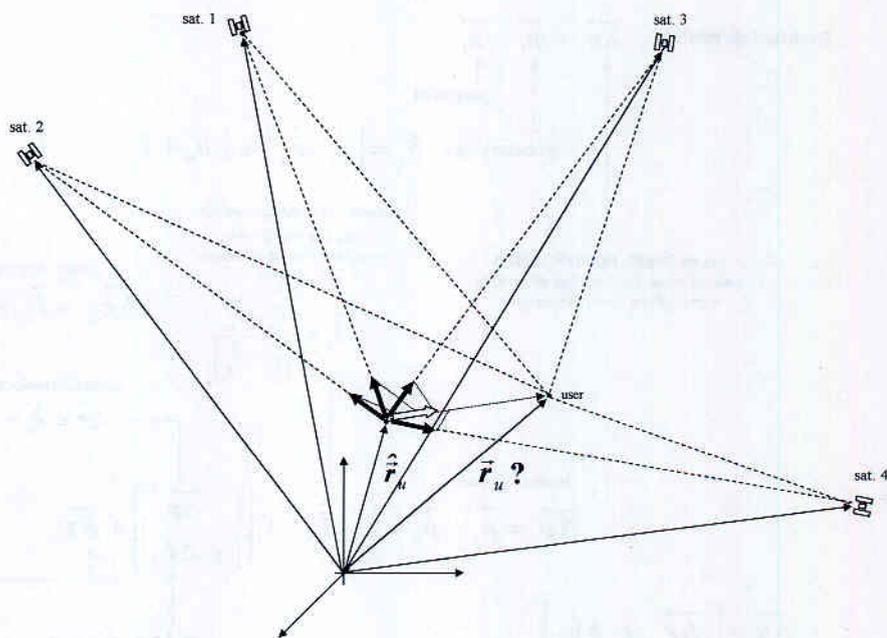
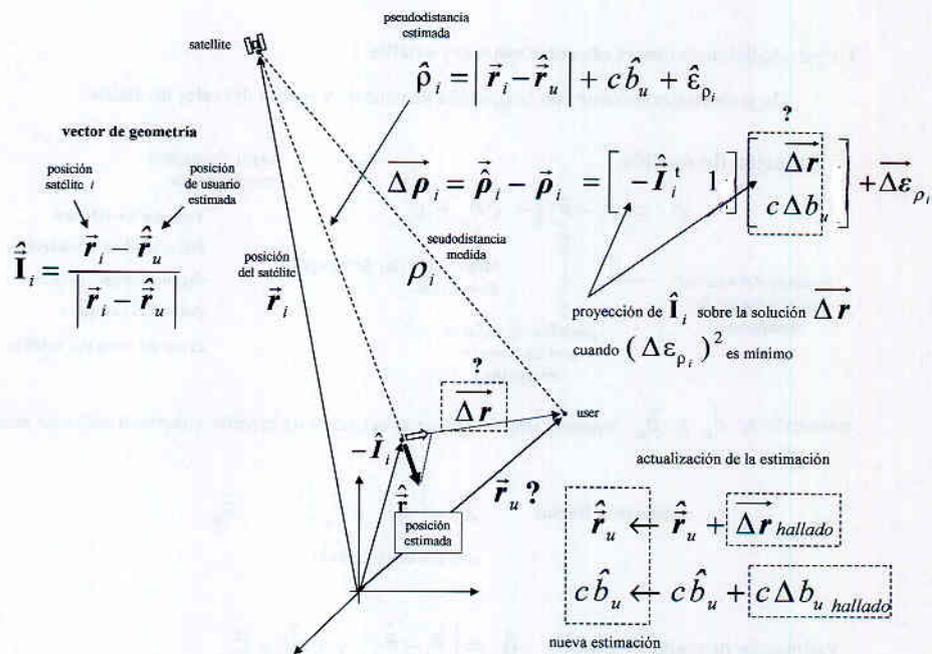
residual de posición  $\Delta \vec{r} \equiv \hat{\vec{r}}_u - \vec{r}_u$

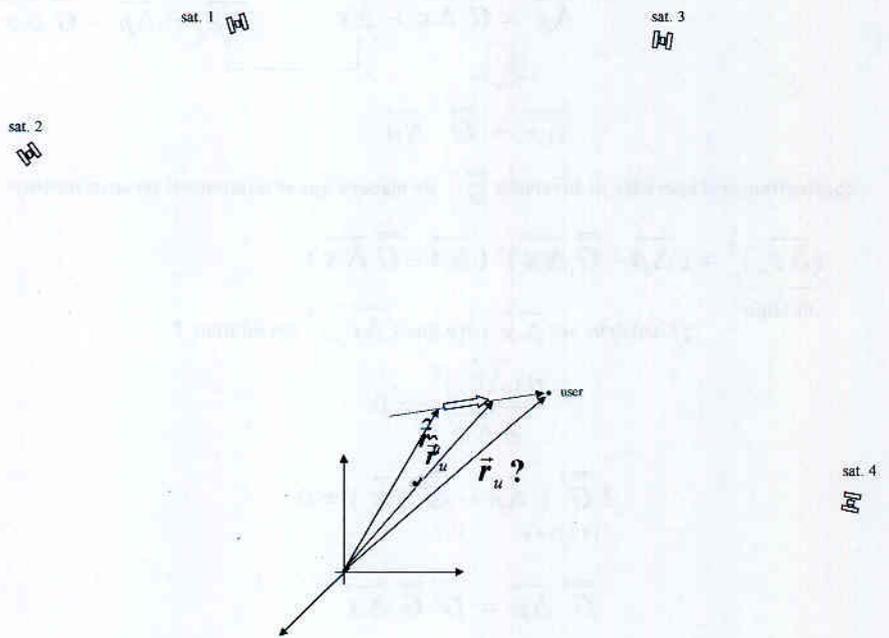
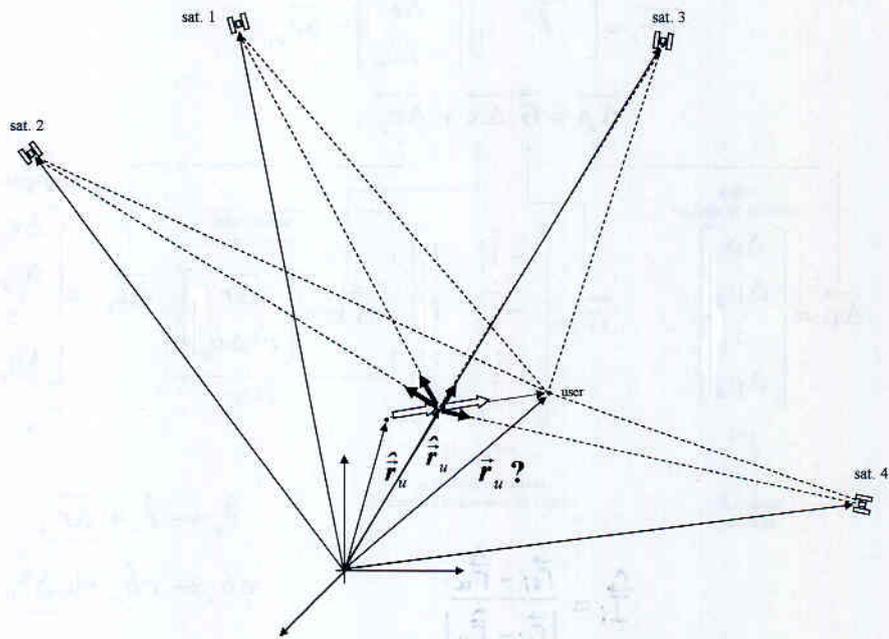
residual de "bias"  $\Delta b_u \equiv \hat{b}_u - b_u$

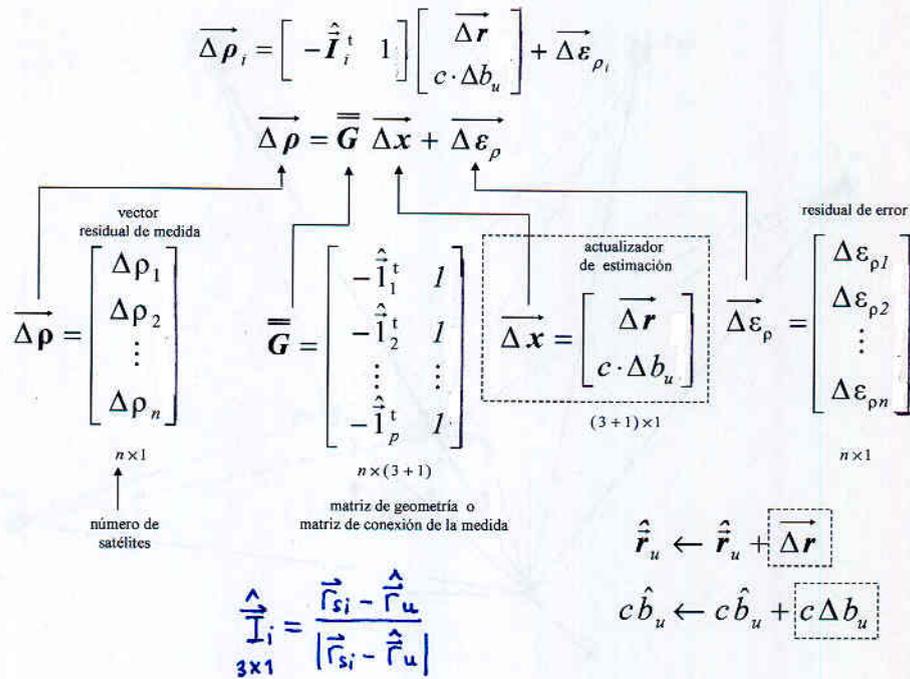
en primera aproximación relación lineal con el residual de posición a través de un vector de geometría

residual de medida  $\Delta \rho_i = \hat{\rho}_i - \rho_i = \left[ -\hat{\mathbf{I}}_i^t \ 1 \right] \begin{bmatrix} \Delta \vec{r} \\ c \cdot \Delta b_u \end{bmatrix} + \Delta \varepsilon_{\rho_i}$

$\Delta \mathbf{x} = \left[ \Delta \vec{r}^t \ c \cdot \Delta b_u \right]^t$







$$\overrightarrow{\Delta \rho} = \overline{\mathbf{G}} \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}} + \overrightarrow{\Delta \varepsilon}_{\rho} \quad \overrightarrow{\Delta \varepsilon}_{\rho} = \overrightarrow{\Delta \rho} - \overline{\mathbf{G}} \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}}$$

$$\overrightarrow{\Delta \mathbf{x}} = \overline{\mathbf{G}}^{-1} \overrightarrow{\Delta \rho}$$

construiremos el operador de inversión  $\overline{\mathbf{G}}^{-1}$  de manera que se minimice el error cuadrático

$$\underbrace{(\overrightarrow{\Delta \varepsilon}_{\rho})^2}_{\text{mínimo}} = (\overrightarrow{\Delta \rho} - \overline{\mathbf{G}} \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}})^t (\overrightarrow{\Delta \rho} - \overline{\mathbf{G}} \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}})$$

¿Cual debe ser  $\overrightarrow{\Delta \mathbf{x}}$  para que  $(\overrightarrow{\Delta \varepsilon}_{\rho})^2$  sea mínimo ?

$$\frac{\partial (\overrightarrow{\Delta \varepsilon}_{\rho})^2}{\partial \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}}} = 0$$

$$2 \overline{\mathbf{G}}^t (\overrightarrow{\Delta \rho} - \overline{\mathbf{G}} \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}}) = 0$$

$(3+1) \times n \quad n \times 1$

$$\overline{\mathbf{G}}^t \overrightarrow{\Delta \rho} = \overline{\mathbf{G}}^t \overline{\mathbf{G}} \overrightarrow{\Delta \mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}^t \overline{\Delta \rho} &= \overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}} \overline{\Delta x} \\ \underbrace{(\overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}})^{-1} \overline{\overline{G}}^t}_{\overline{\overline{G}}^-} \overline{\Delta \rho} &= \underbrace{(\overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}})^{-1} \overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}}}_{\overline{I}} \overline{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\overline{\Delta x} = \overline{\overline{G}}^- \overline{\Delta \rho}$$

$$\overline{\overline{G}}^- = (\overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}})^{-1} \overline{\overline{G}}^t$$

matriz de geometría  
 { posiciones de los satélites  
 vector de estado estimado

para que se trate de un mínimo, deberá cumplirse la condición

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Delta x} \left( \frac{\partial (\Delta \varepsilon_\rho)^2}{\partial \Delta x} \right)^t &> 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Delta x} [2 \overline{\overline{G}}^t (\overline{\Delta \rho} - \overline{\overline{G}} \overline{\Delta x})]^t &> 0 \end{aligned}$$

$$\overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}} > 0$$

$$\overline{\Delta x} = \underbrace{(\overline{\overline{G}}^t \overline{\overline{G}})^{-1} \overline{\overline{G}}^t}_{\overline{\overline{G}}^-} \overline{\Delta \rho}$$

Una mejora de este proceso de inversión, consiste en utilizar como función de peso la matriz de autocorrelación del ruido asociado a la medida

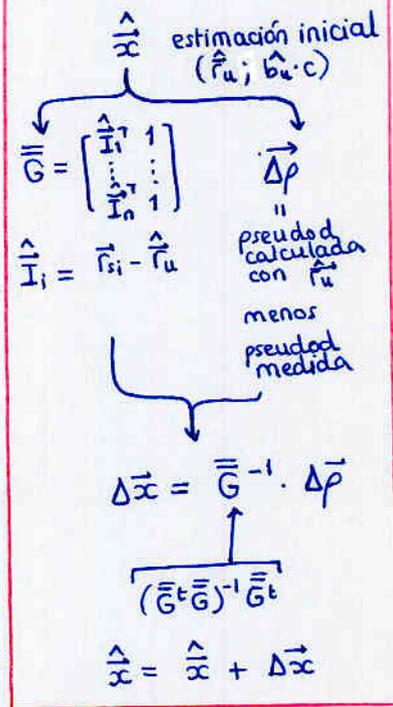
$$\rho_i = \underbrace{|\vec{r}_i - \vec{r}_u|}_{E[\rho_i]} + c b_u + \varepsilon_{\rho_i} \quad \rho_i \text{ v.a. Gaussiana}$$

$$\rho_i = E[\rho_i] + \varepsilon_{\rho_i} \quad \varepsilon_{\rho_i} \text{ v.a. Gaussiana media nula}$$

matriz de covarianza de la medida

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C}}_{\rho} &= E[(\vec{\rho} - E[\vec{\rho}])(\vec{\rho} - E[\vec{\rho}])^t] = \\ &= E[(E[\vec{\rho}] + \vec{\varepsilon}_{\rho} - E[\vec{\rho}])(E[\vec{\rho}] + \vec{\varepsilon}_{\rho} - E[\vec{\rho}])^t] = \\ &= E[\vec{\varepsilon}_{\rho} \vec{\varepsilon}_{\rho}^t] = \overline{\overline{R}}_{\rho} \quad \text{matriz de autocorrelación del ruido asociado a la medida} \end{aligned}$$

Resumen proceso:



$$\overline{\mathbf{R}} = E[\overline{\tilde{\epsilon}}_{\rho} \overline{\tilde{\epsilon}}_{\rho}^t] = \sigma^2 \overline{\mathbf{I}}$$

↑  
observaciones incorreladas y de igual varianza

la dispersión de la medida penaliza el proceso de obtención de  $\overrightarrow{\Delta x}$

$$\overrightarrow{\Delta x} = (\overline{\mathbf{G}}^t \overline{\mathbf{R}}^{-1} \overline{\mathbf{G}})^{-1} \overline{\mathbf{G}}^t \overline{\mathbf{R}}^{-1} \overrightarrow{\Delta \rho}$$

*Handwritten notes:*

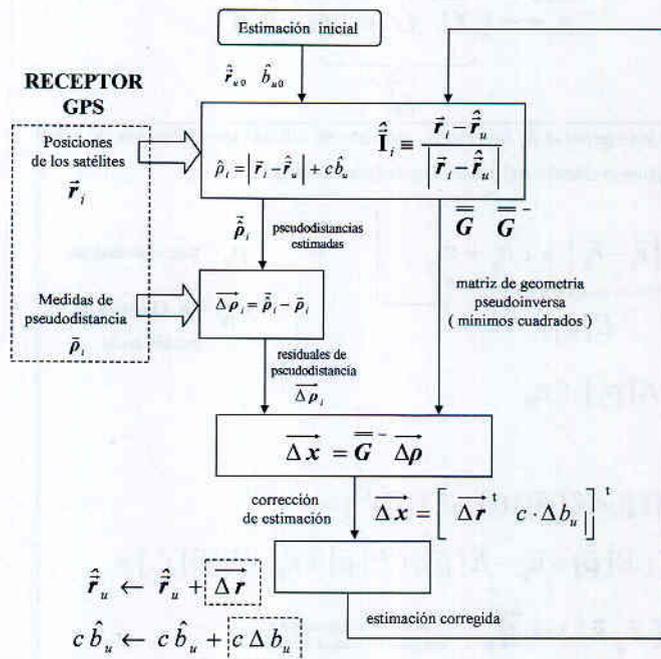
estimación inicial

posiciones de los satélites

medidas de pseudodistancia

$\hat{r}_u \leftarrow \hat{r}_u + \Delta r$

$c \hat{b}_u \leftarrow c \hat{b}_u + c \Delta b_u$



# ALGORÍTMOS de NAVEGACIÓN

Solución de Punto Simple

( Exactitud de la solución y DOP )



Dilution Of Precision

Exactitud de la solución y DOP – Dilution Of Precision )

$$\text{error} \left\{ \begin{array}{l} \text{geométrico} \\ \text{posición} \\ \text{horizontal} \\ \text{vertical} \\ \text{tiempo} \\ \dots \end{array} \right\} = \sigma \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{GDOP} \\ \text{PDOP} \\ \text{HDOP} \\ \text{VDOP} \\ \text{TDOP} \\ \dots \end{array} \right\}$$

dispersión o  
incertidumbre  
en la medida

dependen de la  
matriz de geometría

**Error de solución**  $\overrightarrow{\Delta x}$   
 estimación

$$\overrightarrow{\Delta x} = [ \Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad c \cdot \Delta b ]$$

$\uparrow$  error de posición este - oeste      $\uparrow$  error de posición norte - sur      $\uparrow$  error de posición arriba - abajo      $\uparrow$  error de "bias" de reloj

**Covarianza del error de solución**  $\overrightarrow{\Delta x}$

$$\begin{aligned}
 E \left[ \overrightarrow{\Delta x} \overrightarrow{\Delta x}' \right] &= E \left[ \underbrace{\left( \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1} \overline{\mathbf{G}}'}_{\overrightarrow{\Delta x}} \underbrace{\overline{\Delta \rho}}_{\overrightarrow{\Delta x}'} \underbrace{\overline{\mathbf{G}} \left( \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1}}_{\overrightarrow{\Delta x}'} \right] = \\
 &= \left( \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1} \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{R}} \overline{\mathbf{G}} \left( \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1} = \sigma^2 \underbrace{\left( \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1}}_{\overline{\mathbf{A}}}
 \end{aligned}$$

matriz de covarianza del residual de medida de pseudodistancia

$$\overline{\mathbf{R}} = E \left[ \overrightarrow{\Delta \rho} \overrightarrow{\Delta \rho}' \right] = \sigma^2 \overline{\mathbf{I}}$$

errores de medida independientes y con igual varianza

suponemos que es matriz diagonal (independencia de las observaciones de distintos satélites)

$$E \left[ \overrightarrow{\Delta x} \overrightarrow{\Delta x}' \right] = \sigma^2 \left( \overline{\mathbf{G}}' \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1} = \sigma^2 \overline{\mathbf{A}}$$

$$\overline{\Delta \mathbf{x}} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad c \cdot \Delta b]$$

$$E \left[ \overline{\Delta \mathbf{x}} \overline{\Delta \mathbf{x}}^t \right] = \begin{bmatrix} E[\Delta x^2] & E[\Delta x \Delta y] & E[\Delta x \Delta z] & E[\Delta x c \Delta b] \\ E[\Delta y \Delta x] & E[\Delta y^2] & E[\Delta y \Delta z] & E[\Delta y c \Delta b] \\ E[\Delta z \Delta x] & E[\Delta z \Delta y] & E[\Delta z^2] & E[\Delta z c \Delta b] \\ E[c \Delta b \Delta x] & E[c \Delta b \Delta y] & E[c \Delta b \Delta z] & E[c \Delta b^2] \end{bmatrix}$$

$$E \left[ \overline{\Delta \mathbf{x}} \overline{\Delta \mathbf{x}}^t \right] = \sigma^2 \underbrace{\left( \overline{\mathbf{G}}^t \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1}}_{\overline{\mathbf{A}}} = \sigma^2 \overline{\mathbf{A}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Delta \mathbf{x}} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad c \cdot \Delta b]$$

$$E \left[ \overline{\Delta \mathbf{x}} \overline{\Delta \mathbf{x}}^t \right] = \sigma^2 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \underbrace{\left( \overline{\mathbf{G}}^t \overline{\mathbf{G}} \right)^{-1}}_{\overline{\mathbf{A}}} = \sigma^2 \overline{\mathbf{I}} = E \left[ \overline{\Delta \rho} \overline{\Delta \rho}^t \right]$$

$\overline{\mathbf{R}}$

$$\text{TDOP} = \sqrt{A_{44}}$$

$$\text{VDOP} = \sqrt{A_{33}}$$

$$\text{HDOP} = \sqrt{A_{11} + A_{22}}$$

$$\text{PDOP} = \sqrt{A_{11} + A_{22} + A_{33}}$$

$$\text{GDOP} = \sqrt{A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}}$$

$$\text{error de tiempo} = \sigma \cdot \text{TDOP}$$

$$\text{error vertical} = \sigma \cdot \text{VDOP}$$

$$\text{error horizontal} = \sigma \cdot \text{HDOP}$$

$$\text{error posición} = \sigma \cdot \text{PDOP}$$

$$\text{error geométrico} = \sigma \cdot \text{GDOP}$$

### Ejemplo de solución puntual ( mínimos cuadrados)

Observador localizado en superficie terrestre WGS-84 ( 1984 World Geodetic System ) :

Latitud : 0° }  
Longitud : 0° } mar

Error de reloj equivalente a 85 000.0 m

*el bias se da en metros (multiplicar por c)*

Vector de estado verdadero

$$x = [6378137.0m \quad 0.0m \quad 0.0m \quad 85000.0m]'$$

Sea la primera estimación del vector de estado

$$\hat{x} = [6377000.0m \quad 3000.0m \quad 4000.0m \quad 0.0m]'$$

En cierto instante hay 7 satélites visibles a más de 10° por encima del horizonte

satélite	Posición X (m)	Posición Y (m)	Posición Z (m)
SV 01	22808160.9	-12005866.6	-6609526.5
SV 02	21141179.5	-2355056.3	-15985716.1
SV 08	20438959.3	-4238967.1	16502090.2
SV 14	18432296.2	-18613382.5	-4672400.8
SV 17	21772117.8	13773269.7	6656636.4
SV 23	15561523.9	3469098.6	-21303596.2
SV 24	13773316.6	15929331.4	-16266254.4

estimación inicial de la posición de usuario

$$|\bar{x}_i - \hat{x}| = \sqrt{(x_{ix} - \hat{x}_x)^2 + (x_{iy} - \hat{x}_y)^2 + (x_{iz} - \hat{x}_z)^2}$$

$\frac{x_{ix} - \hat{x}_x}{|\bar{x}_i - \hat{x}|} \quad \frac{x_{iy} - \hat{x}_y}{|\bar{x}_i - \hat{x}|} \quad \frac{x_{iz} - \hat{x}_z}{|\bar{x}_i - \hat{x}|}$

$1 \leq i \leq 7$

satélite	pseudodistancia calculada (m)	Línea de visión X	Línea de visión Y	Línea de visión Z
SV 01	21399408.0	0.767832	-0.561178	-0.309052
SV 02	21890921.6	0.674443	-0.107718	-0.730427
SV 08	22088910.4	0.636607	-0.192041	0.746895
SV 14	22666464.0	0.531856	-0.821318	-0.206314
SV 17	21699942	0.709454	0.634576	0.306574
SV 23	23460242.4	0.391493	0.147744	-0.908243
SV 24	23938978.9	0.308965	0.665289	-0.679655

Matriz de geometría

se rellena con unos (la comp del bias)

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} -\hat{I}_1^t & 1 \\ -\hat{I}_2^t & 1 \\ -\hat{I}_3^t & 1 \\ -\hat{I}_4^t & 1 \\ -\hat{I}_5^t & 1 \\ -\hat{I}_6^t & 1 \\ -\hat{I}_7^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.767832 & 0.561178 & 0.309052 & 1 \\ -0.674443 & 0.107718 & 0.730427 & 1 \\ -0.636607 & 0.192041 & -0.746895 & 1 \\ -0.531856 & 0.821318 & 0.206314 & 1 \\ -0.709454 & -0.634576 & -0.306574 & 1 \\ -0.391493 & -0.147744 & 0.908243 & 1 \\ -0.308965 & -0.665289 & 0.679655 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz pseudoinversa

$$\bar{G}^- = \left( \begin{bmatrix} \bar{G}^t \bar{G} \end{bmatrix} \right)^{-1} \bar{G}^t$$

$$\hat{I}_i^t = \frac{(x_i - \hat{x})^t}{|x_i - \hat{x}|}$$

$$\bar{G}^{-} = \left( \bar{G}^t \bar{G} \right)^{-1} \bar{G}^t$$

$$\bar{G}^{-} = \begin{bmatrix} -1.620478 & -1.520829 & 0.892955 & 1.255458 & -1.110401 & 1.092170 & 1.011124 \\ 0.165757 & -0.049865 & 0.1057930 & 0.5067149 & -0.458682 & 0.010341 & -0.280058 \\ 0.245955 & 0.411188 & -0.569766 & -0.142115 & -0.154796 & 0.164225 & 0.045309 \\ -0.874696 & -0.851105 & 0.8073998 & 0.897593 & -0.452989 & 0.740653 & 0.733145 \end{bmatrix}$$

Desde nuestra ubicación realizamos medidas de la pseudodistancia

tales medidas han sido corregidas por efectos de :

- retardo ionosférico
- "bias" de reloj de satélite
- retardo troposférico, etc.

con todo ello la dispersión de estas medidas resulta ser  $\sigma = 6 \text{ m}$

medidas de pseudodistancia  
c. distiemplos  
↑  
incluye bias

medida corregida  $\rho_i$

$$\Delta \rho_i = \left| \bar{x}_i - \hat{x} \right| - \rho_i$$

pseudodistancia calculada

medida corregida de la pseudodistancia

*error en la propia medida*

satélite	Pseudodistancia medida ( m )	Residual de medida de pseudodistancia
SV 01	21480623.2	-81215.3
SV 02	21971919.2	-80997.6
SV 08	22175603.9	-86693.4
SV 14	22747561.5	-81097.6
SV 17	21787252.3	-87308.8
SV 23	23541613.4	-81371.0
SV 24	24022907.4	-83928.6

Primera estimación :

$$\hat{\vec{x}} = [6377000.0m \quad 3000.0m \quad 4000.0m \quad 0.0m]'$$

$$\vec{\Delta x} = \overline{\overline{\mathbf{G}}}^{-1} \overrightarrow{\Delta p}$$

$$\overline{\Delta x} = [-1131.8 \quad 2996.8 \quad 3993.1 \quad -84996.4]'$$

$$\hat{\vec{x}} \leftarrow \hat{\vec{x}} + \overline{\Delta x}$$

nueva estimación

$$\hat{\vec{x}} = [6378131.5m \quad 3.2m \quad 6.9m \quad 84996.4m]'$$

En un sólo paso ya nos hemos acercado enormemente

más próxima al valor verdadero

$$\vec{x} = [6378137.0m \quad 0.0m \quad 0.0m \quad 85000.0m]'$$

Repetimos el proceso

$$\hat{\vec{x}} = [6378131.5m \quad 3.2m \quad 6.9m \quad 84996.4m]'$$

$$\vec{\Delta x} = \overline{\overline{\mathbf{G}}}^{-1} \overrightarrow{\Delta p}$$

$$\overline{\Delta x} = [0.3 \quad -0.1 \quad -0.2 \quad 0.6]'$$

$$\hat{\vec{x}} \leftarrow \hat{\vec{x}} + \overline{\Delta x}$$

nueva estimación

$$\hat{\vec{x}} = [6378131.5m \quad 3.3m \quad 7.1m \quad 84995.8m]'$$

valor verdadero

$$\vec{x} = [6378137.0m \quad 0.0m \quad 0.0m \quad 85000.0m]'$$

No es necesario seguir iterando

Error real en la estimación

$$\hat{\vec{x}} = [6378131.5m \quad 3.3m \quad 7.1m \quad 84995.8m]^T$$

$$\vec{x} = [6378137.0m \quad 0.0m \quad 0.0m \quad 85000.0m]^T$$

$$\overline{\Delta \vec{x}} = \hat{\vec{x}} - \vec{x} = [-5.5 \quad 3.2 \quad 7.1 \quad -4.2]^T$$

Comparamos este error real con el error predicho por la aproximación GDOP

$$\overline{\vec{A}} = \left( \overline{\vec{G}}^T \overline{\vec{G}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 8.96042738511295 & 0.90074072768047 & -1.21624038043550 & 5.42579500567239 \\ 0.90074072768047 & 0.62153008716350 & -0.07959762184861 & 0.51677501363978 \\ -1.21624038043550 & -0.07959762184861 & 0.63200549911604 & -0.85664424509558 \\ 5.42579500567239 & 0.51677501363978 & -0.85664424509558 & 3.45985434728553 \end{bmatrix}$$

componente	Valor DOP	$\downarrow$ 6 m $\sigma \cdot DOP$	Error real
X $\rightarrow$ XDOP = $\sqrt{E[\Delta E^2]} = \sqrt{A_{11}} = 3$	$\rightarrow$ 18.0 m	.....	-5.5 m
Y $\rightarrow$ YDOP = $\sqrt{E[\Delta N^2]} = \sqrt{A_{22}} = 0.8$	$\rightarrow$ 4.8 m	.....	3.2 m
Z $\rightarrow$ ZDOP = $\sqrt{E[\Delta U^2]} = \sqrt{A_{33}} = 0.8$	$\rightarrow$ 4.8 m	.....	7.1 m
"bias" de reloj $\rightarrow$ TDOP = $\sqrt{E[c\Delta b^2]} = \sqrt{A_{44}} = 1.9$	$\rightarrow$ 11.4 m	.....	-4.2 m
Error total	GDOP $\sum_i e_i^2$	3.7	22.2 m

$\downarrow$   
en conjunto no  
peca de  
ingenuidad

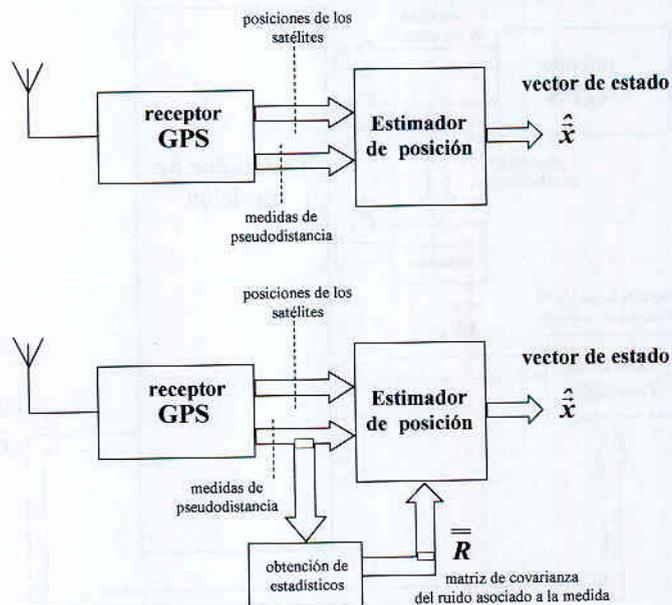
# ALGORÍTMOS de NAVEGACIÓN

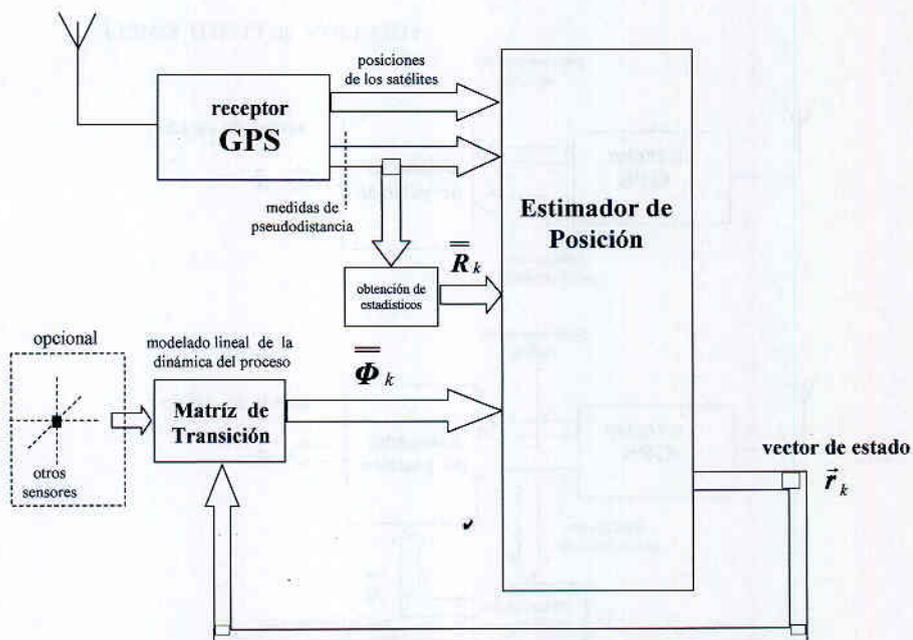
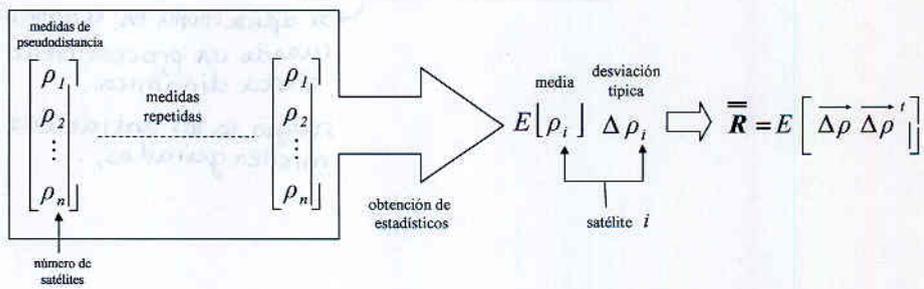
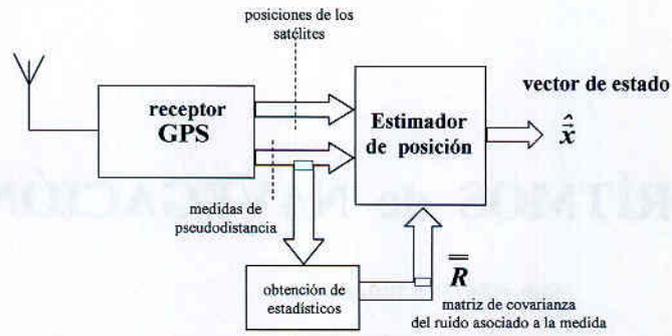
Solución Dinámica

( Filtro de Kalman )

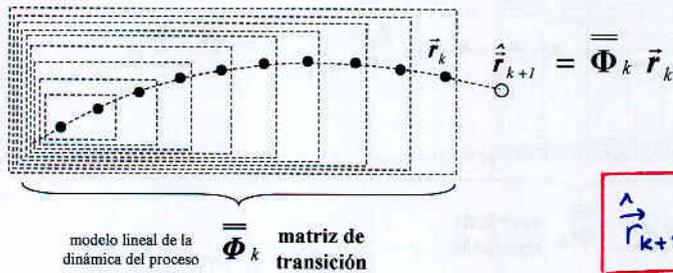
↪ se aplica hasta en economía cuando un proceso tiene cierta dinámica.  
surgió en los antiaéreos, misiles guiados, ...

## SOLUCIÓN de PUNTO SIMPLE





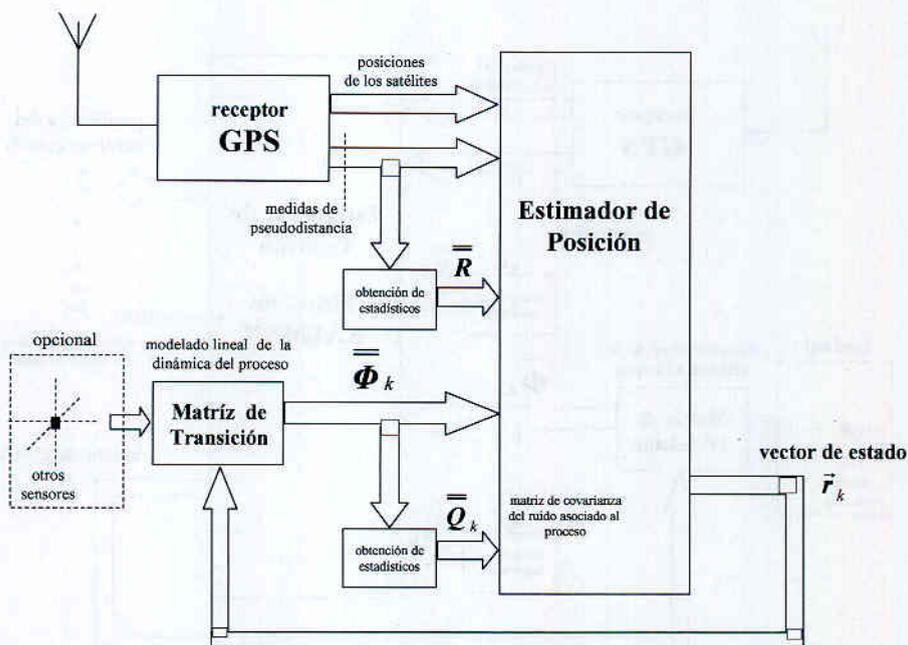
Se puede determinar una matriz/operador que modela la dinámica (el movimiento) del usuario



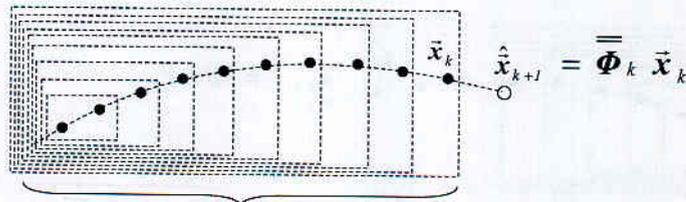
$$\hat{r}_{k+1} = \Phi_k \cdot \bar{r}_k$$

Kalman es la matriz de transición que minimiza  $E\{\Delta \bar{r}_k \Delta \bar{r}_k^T\}$

$$\hat{r}_k = \bar{r}_k + K_k (p_{k \text{ medido}} - \hat{p}_k)$$



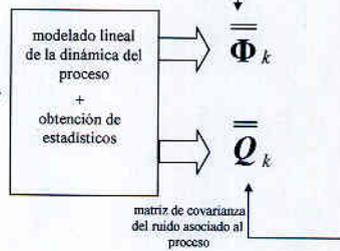
También se obtienen estadísticos para la construcción del modelo (que también tiene "ruido")



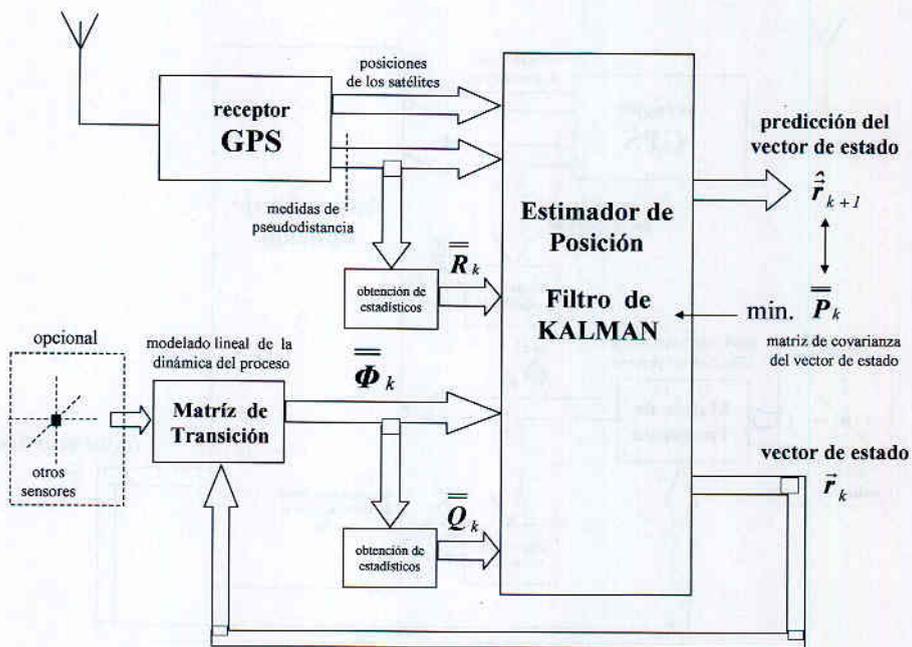
modelo lineal de la dinámica del proceso  $\bar{\Phi}_k$  matriz de transición

$$\phi_{ij} | _k = E[\phi_{ij}] | _k + \Delta \phi_{ij} | _k$$

$\bar{x}_{k-m}$  ...  $\bar{x}_{k-1}$   $\bar{x}_k$   
vectores de estado



(.)<sup>2</sup>



Interesa poder anticiparse

## FILTRO KALMAN

La actualización del estado a estimar  $\hat{\mathbf{r}}_k^+$  se forma como una combinación lineal entre :

- la estimación anterior  $\hat{\mathbf{r}}_k^-$
- la diferencia entre la medición actual y su estimación  $\rho_{k\text{-medido}} - \hat{\rho}_k$

$$\hat{\mathbf{r}}_k^+ = \hat{\mathbf{r}}_k^- + \bar{\mathbf{K}}_k \left( \rho_{k\text{-medido}} - \hat{\rho}_k \right)$$

↑  
el  $\bar{\mathbf{K}}_k$  que minimiza la covarianza de la estimación es

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{G}}_k \left( \bar{\mathbf{G}}_k \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{G}}_k + \bar{\mathbf{R}}_k \right)^{-1}$$

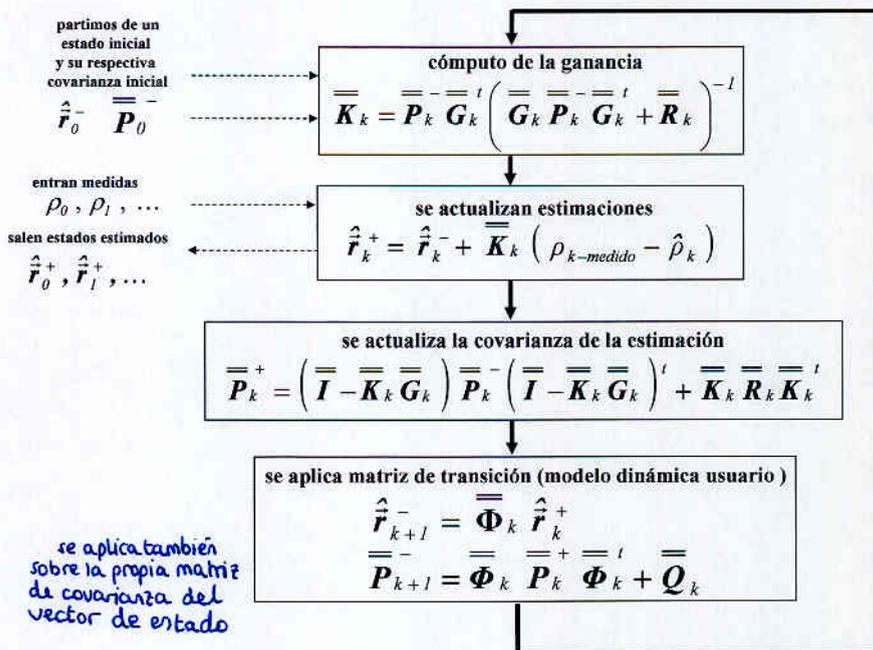
↑  
matriz de geometría

$$\bar{\mathbf{R}}_k = E \left[ \overrightarrow{\Delta \rho}_k \overrightarrow{\Delta \rho}_k^t \right]$$



$$\bar{\mathbf{P}}_k = E \left[ \overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}_k \overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}_k^t \right] \text{ es mínimo}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_k^+ = E \left[ \overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}_k^+ \overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}_k^{+t} \right] = \dots = \left( \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{\mathbf{G}}_k \right) \bar{\mathbf{P}}_k \left( \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{K}}_k \bar{\mathbf{G}}_k \right)^t + \bar{\mathbf{K}}_k \bar{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{K}}_k^t$$



## METHOD 1

Let  $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$  and  $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

Then  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$\Rightarrow (a_1 + b_1 + c_1)\hat{i} + (a_2 + b_2 + c_2)\hat{j} + (a_3 + b_3 + c_3)\hat{k} = \vec{0}$

$$(a_1 + b_1 + c_1)\hat{i} + (a_2 + b_2 + c_2)\hat{j} + (a_3 + b_3 + c_3)\hat{k} = \vec{0}$$

Equating the coefficients of  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$a_3 + b_3 + c_3 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

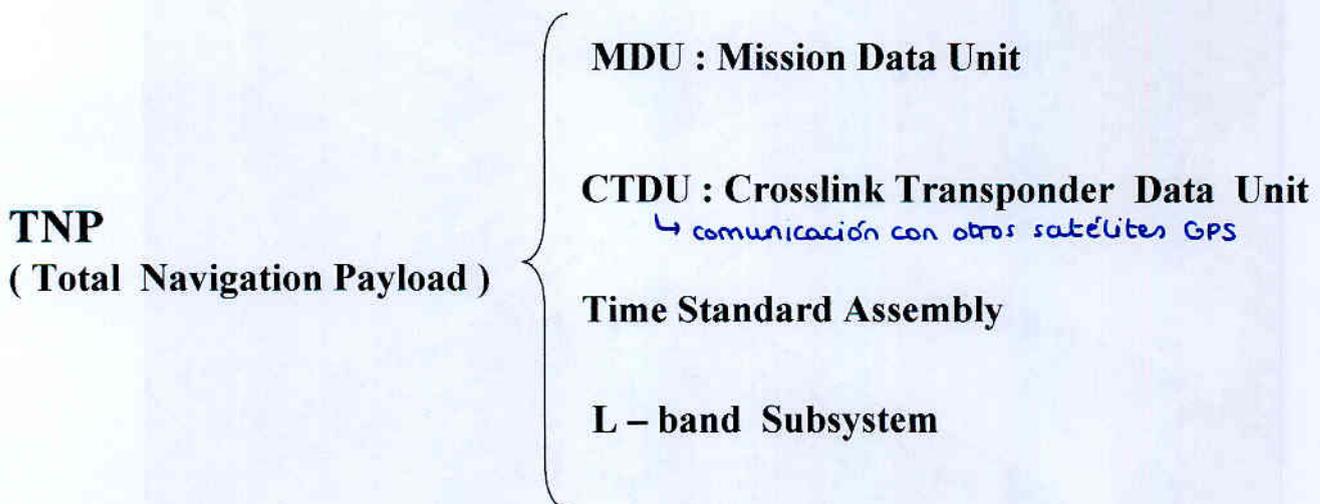
$$a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = -(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \quad \text{--- (4)}$$



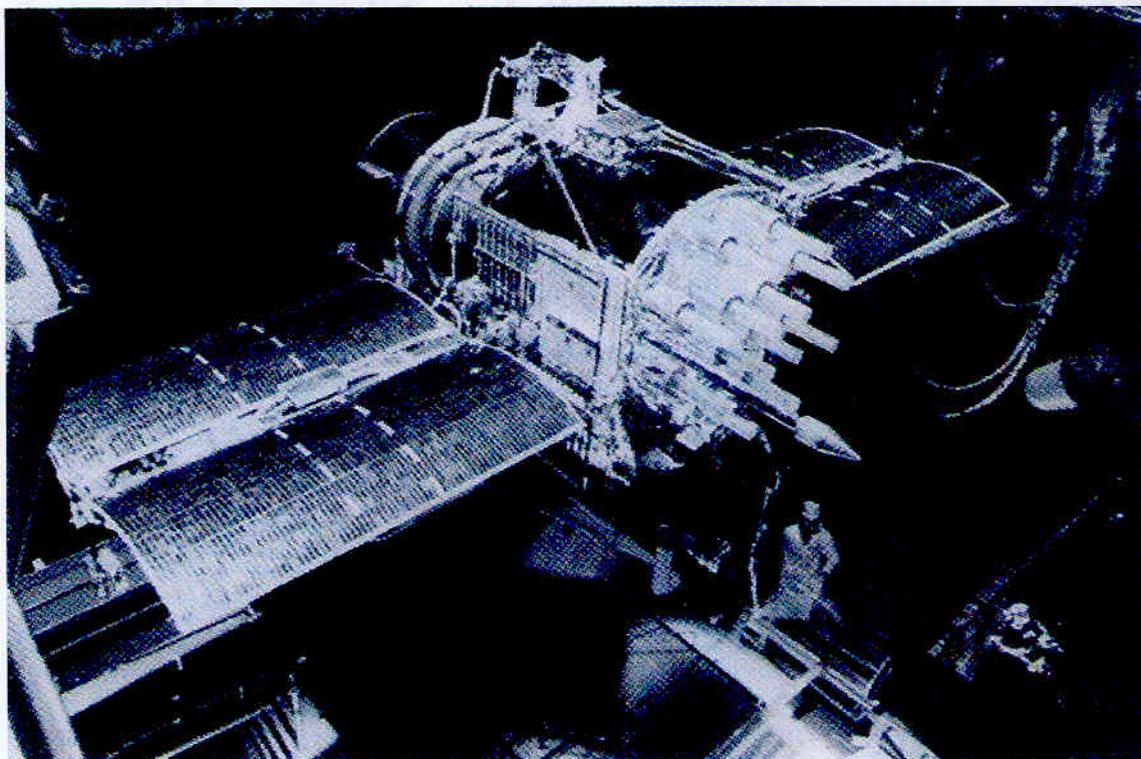
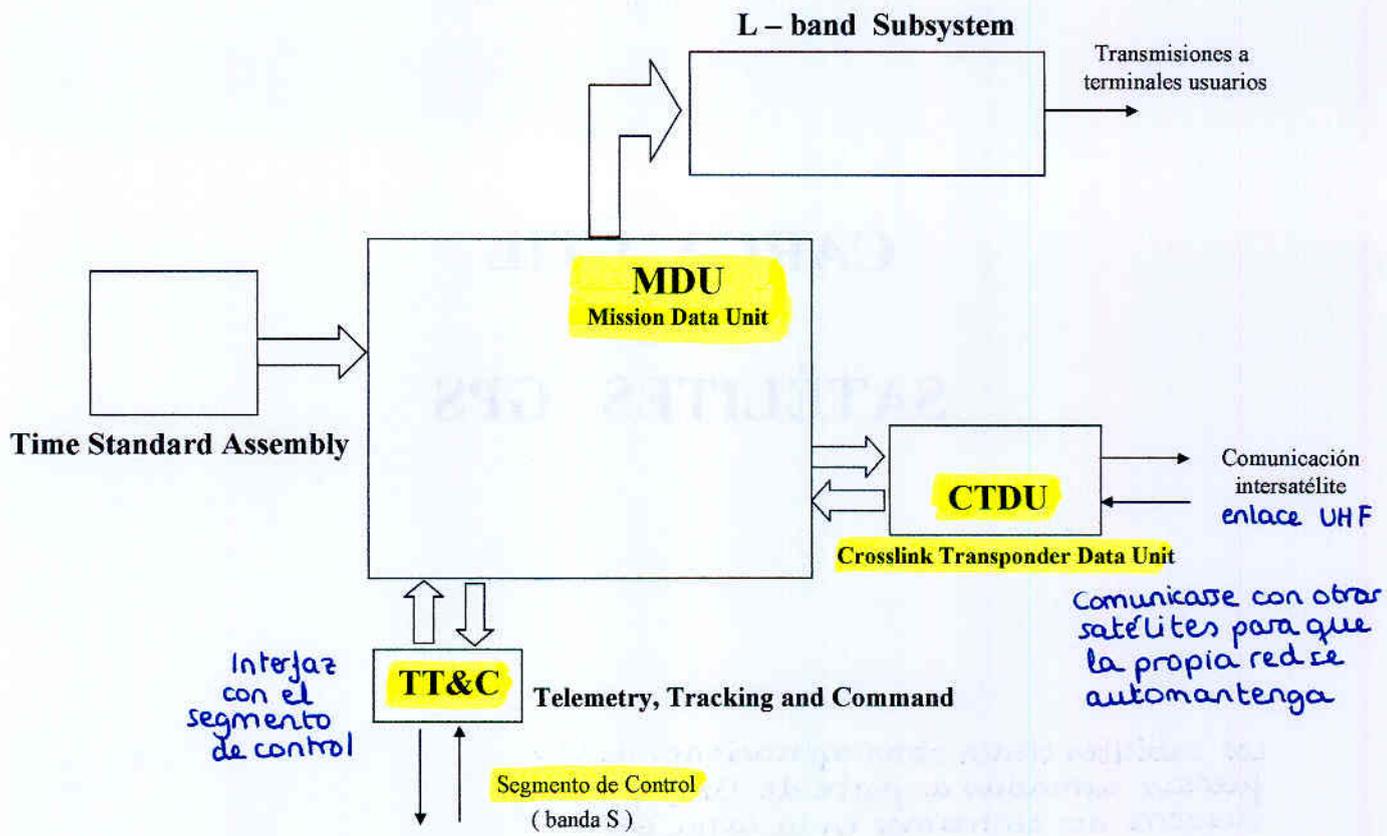
# CARGA ÚTIL de los SATÉLITES GPS

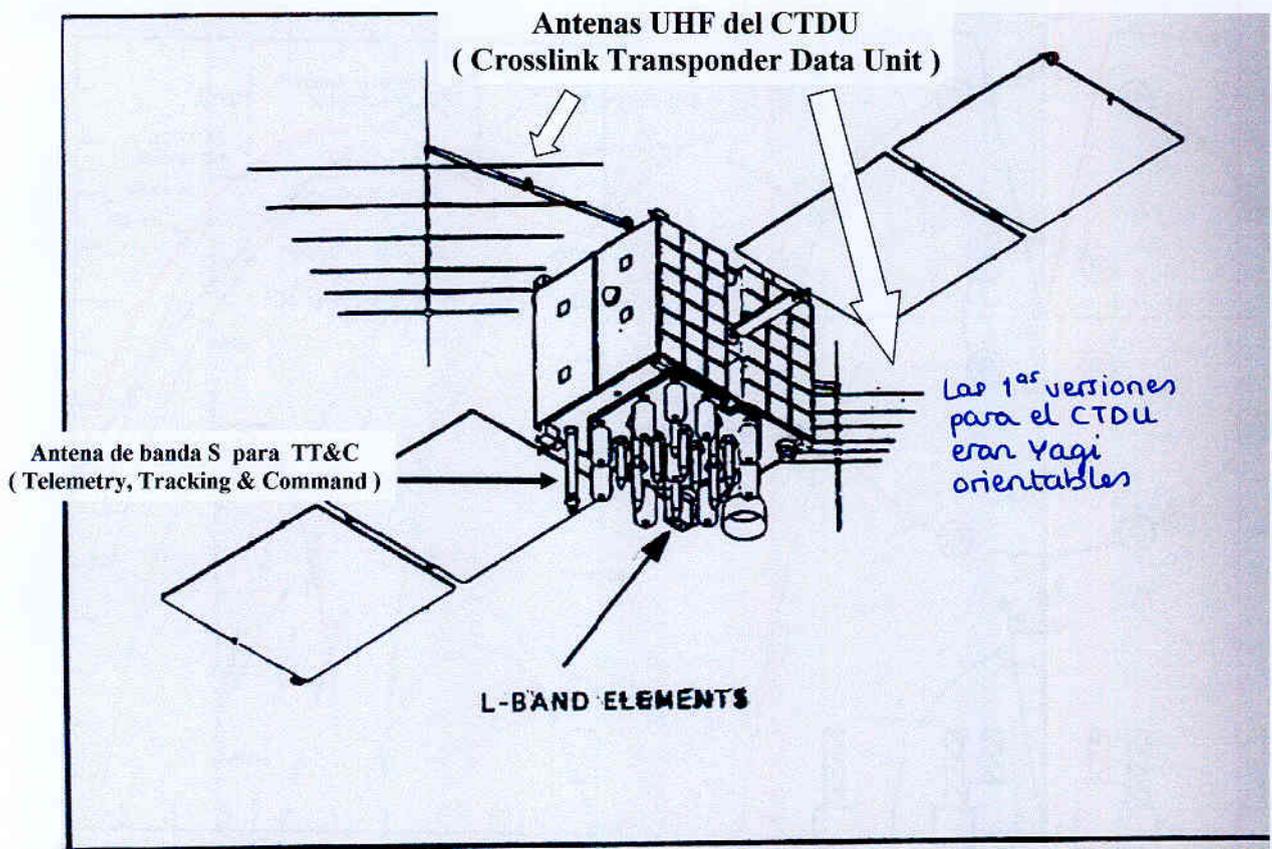
Los satélites tienen otras aplicaciones de las fuerzas armadas a parte de GPS, pero nosotros nos centramos en la carga GPS

## CARGA ÚTIL (Payload) de los SATÉLITES GPS

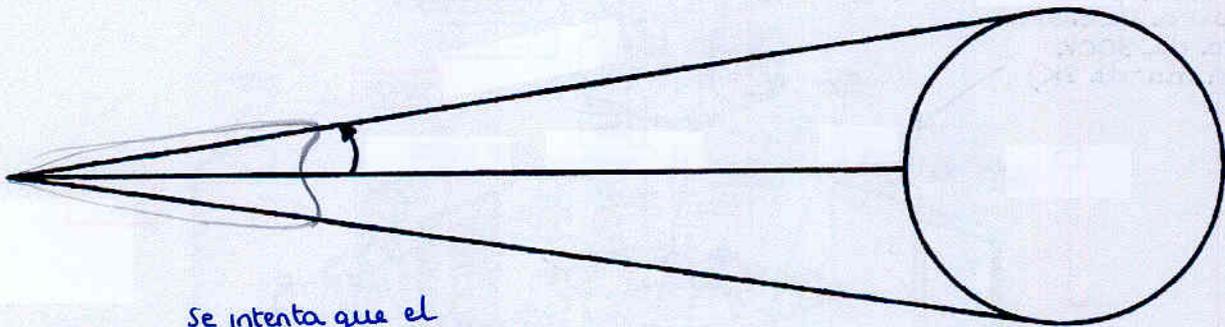


Generación y Transmisión de la señal GPS



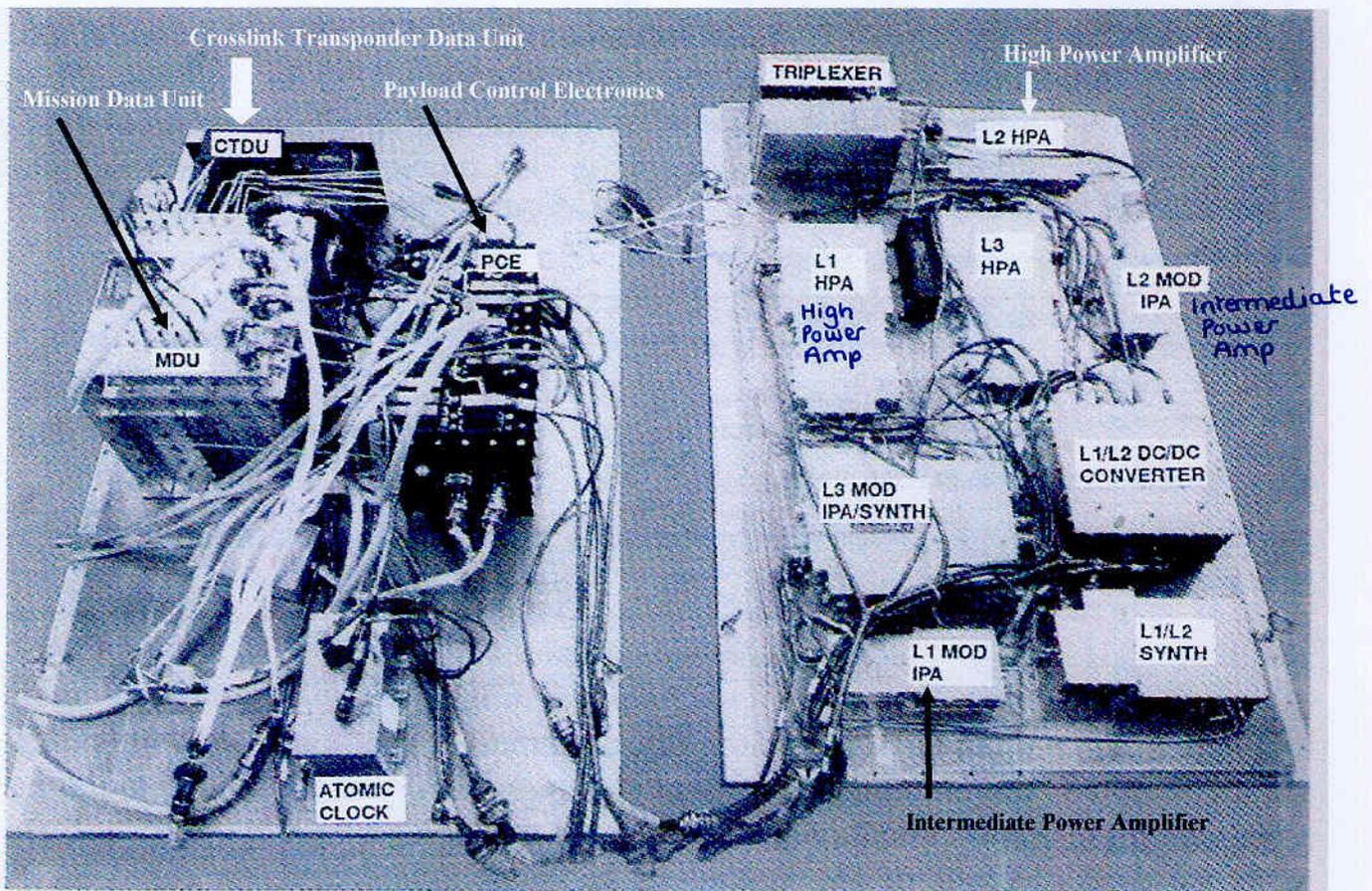


**Fig. 18** L-band transmitting array for the GPS spacecraft.



Se intenta que el diagrama de radiación distribuya la potencia por igual en toda la superficie visible de la tierra





**Fig. 5 The GPS Block IIR total navigation payload under test.**

*El MDU es una computadora con capacidad de proceso equivalente a un 386*

## **MDU : Mission Data Unit**

Cerebro del TNP : **Total Navigation Payload**

- .- Cálculo de las Efemérides ( *inicialmente no, sólo si tiene* Subsistema AUTONAV )
- .- Generación de Códigos Pseudoaleatorios
- .- Encriptación de la Información P ( Y )
- .- Datos NDS : Nuclear Detonation Detection System
- .- Monitorización del estado de componentes del TNP

**CPU : MIL-STD 1750 "Radiation -Hard Processor" @ 16 MHz**

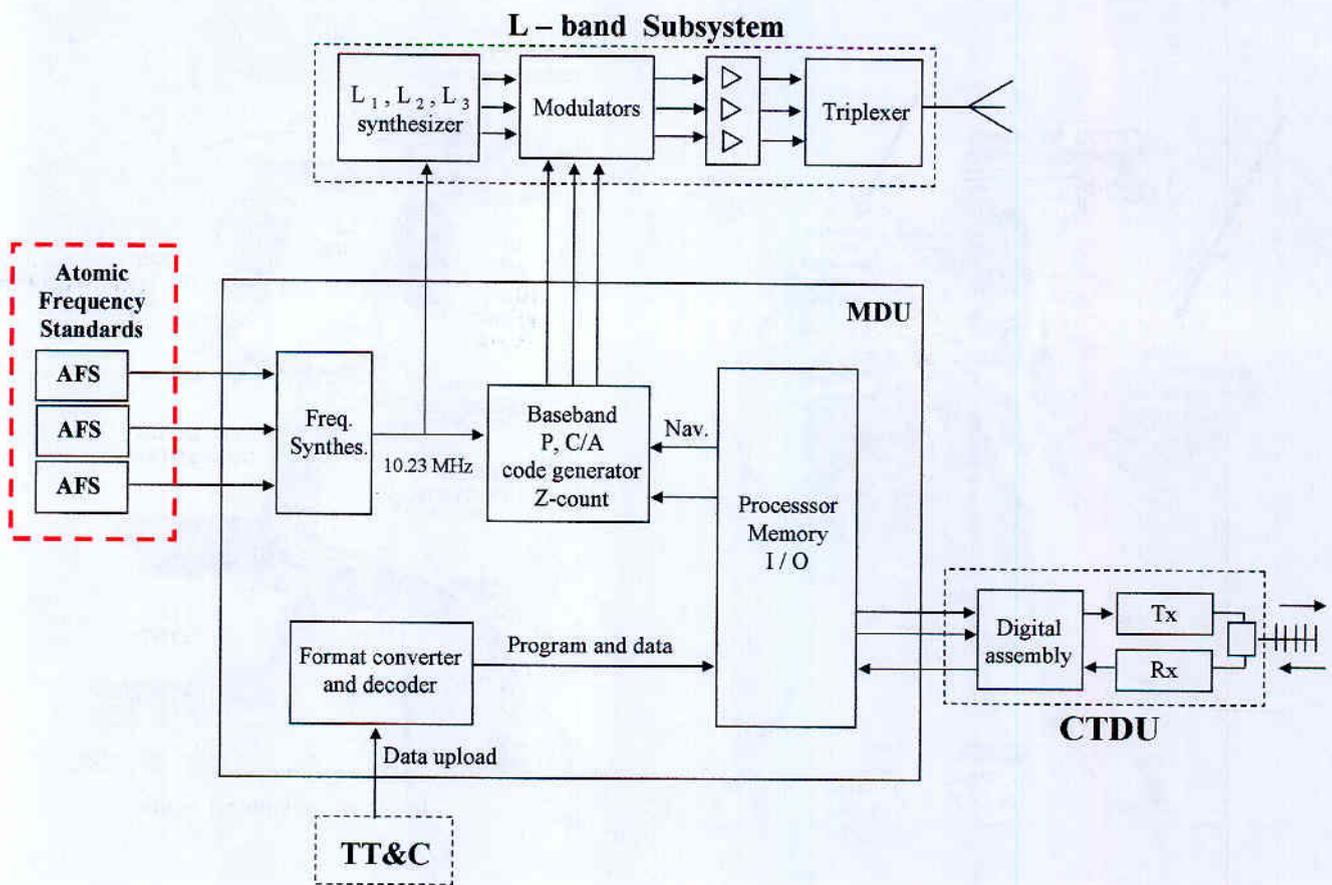
**Software : 25 000 líneas código ADA**

Propósito general, (cualquier tipo de problema )

Estructurado (tipo Pascal), sencillo

Aplicaciones en tiempo real y distribuidas,

Militar, años 70

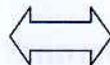


## AFS : Atomic Frequency Standards

El posicionamiento con GPS se basa en una medida muy exacta del tiempo

A la velocidad de propagación de las  
señales electromagnéticas,

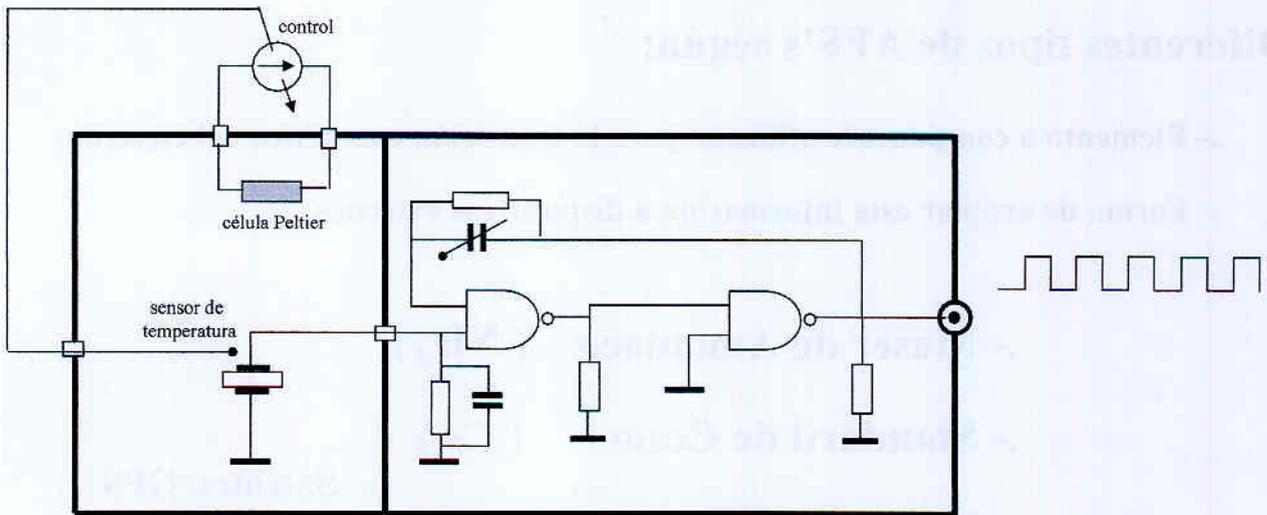
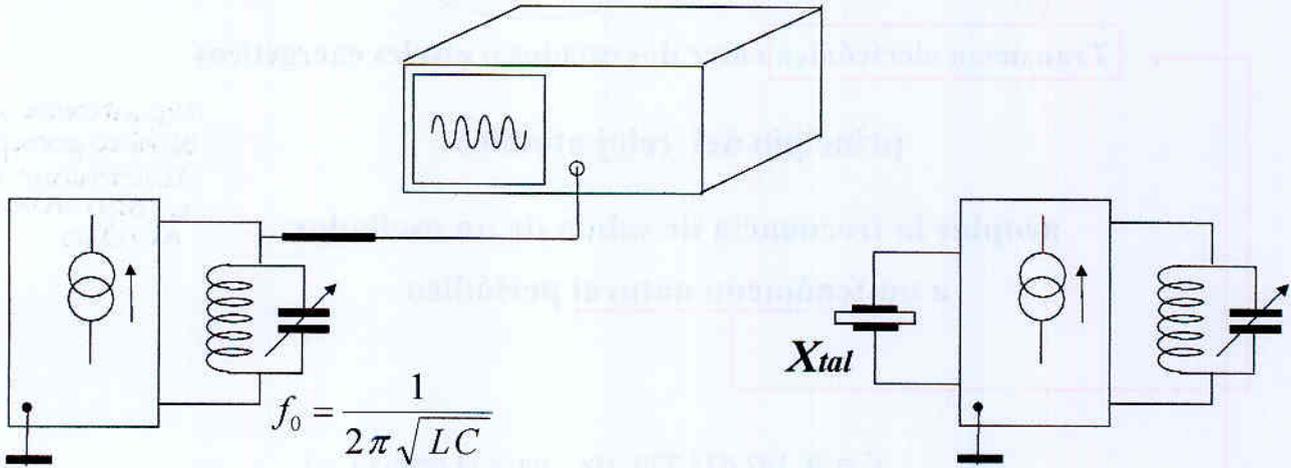
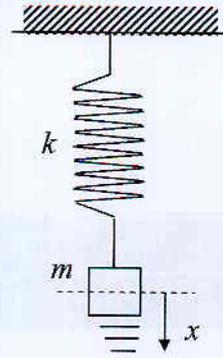
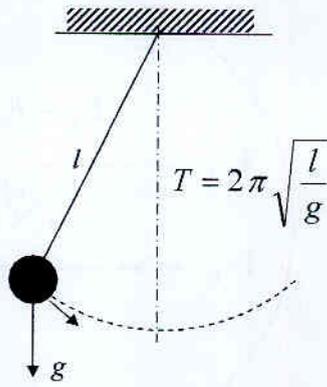
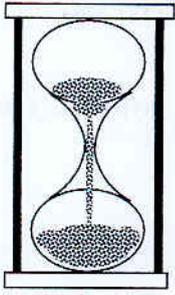
1 ns de incertidumbre

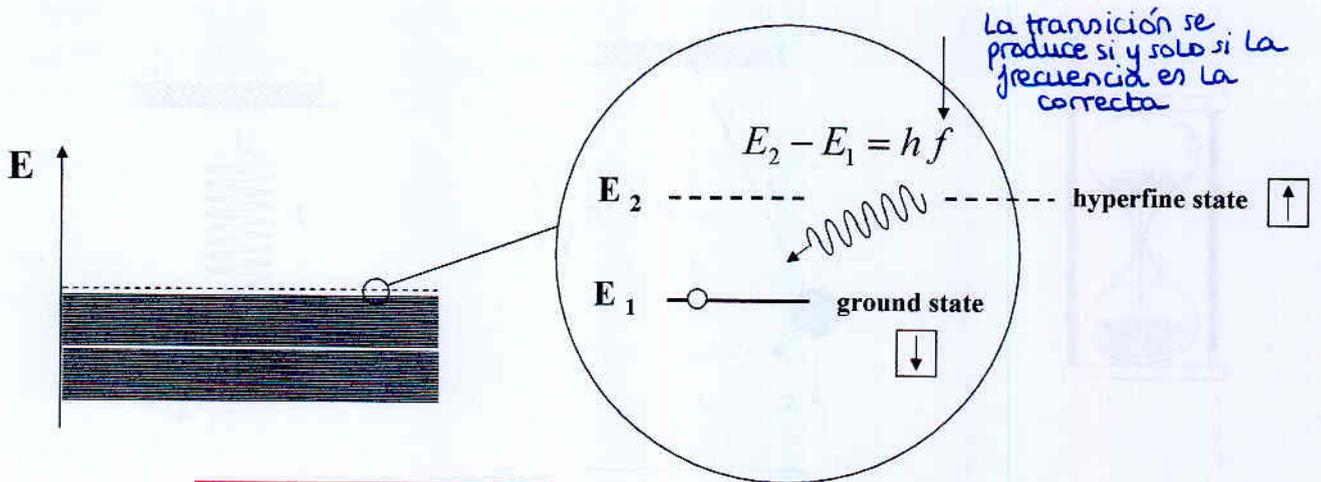


~ 0.3 m de incertidumbre en la  
medida de la distancia

¿ Cómo medimos el tiempo entre dos eventos ?

Contando el número de ciclos o periodos de un fenómeno natural estable





principio del reloj atómico  
 acoplar la frecuencia de salida de un oscilador  
 a un fenómeno natural periódico,

Nos interesa alguna técnica para poder discriminar átomos en diferentes niveles

$$f = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz para el cesio (Cs)}$$

### Diferentes tipos de AFS's según:

- .- Elemento o componente utilizado para la transición energética del electrón.
- .- Forma de acoplar esta información a dispositivos externos

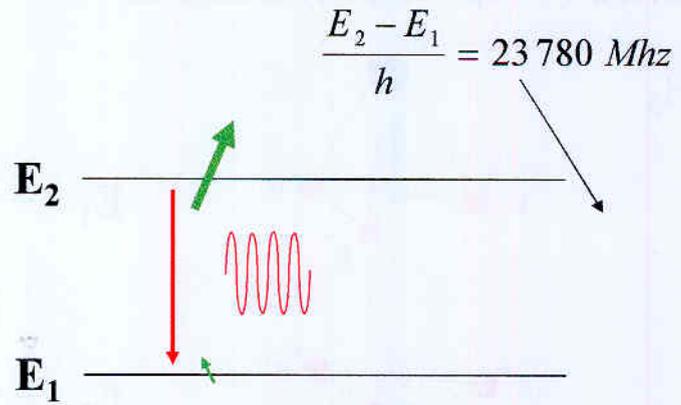
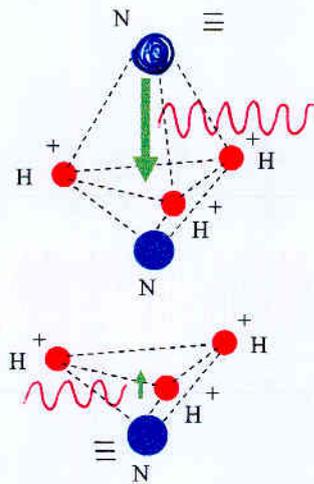
- .- Maser de Amoniaco (NH<sub>3</sub>)
  - .- Standard de Cesio (Cs)
  - .- Standard de Rubidio (Rb)
- } Satélites GPS
- .- Standard de Berilio (Be)
  - .- Trampa iónica de Mercurio (Hg)
  - .- Maser de Hidrógeno (H<sub>2</sub>)

**MASER de Amoniaco (1954)**

**LASER (1960)**

**Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation**

NH<sub>3</sub>

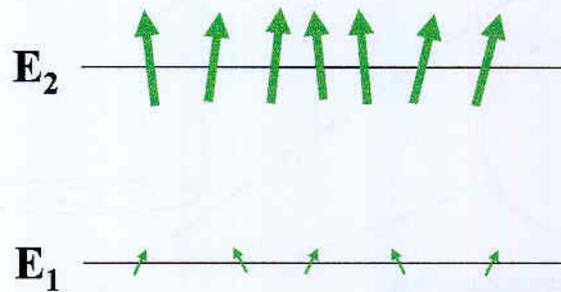
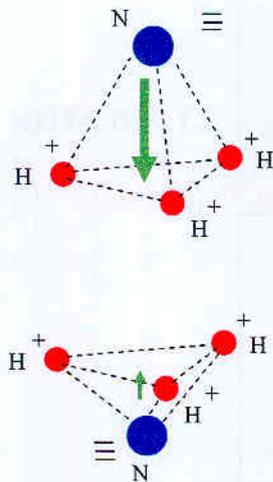


**MASER de Amoniaco (1954)**

**LASER (1960)**

**Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation**

NH<sub>3</sub>

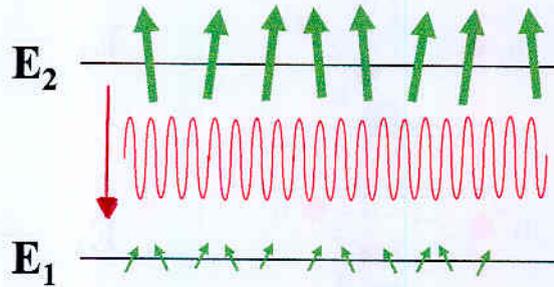
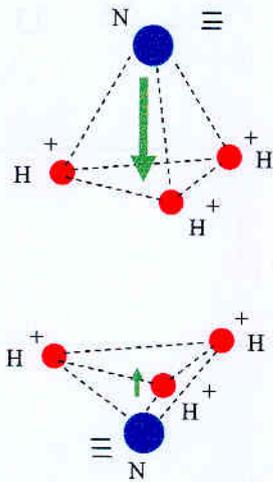


# MASER de Amoniaco (1954)

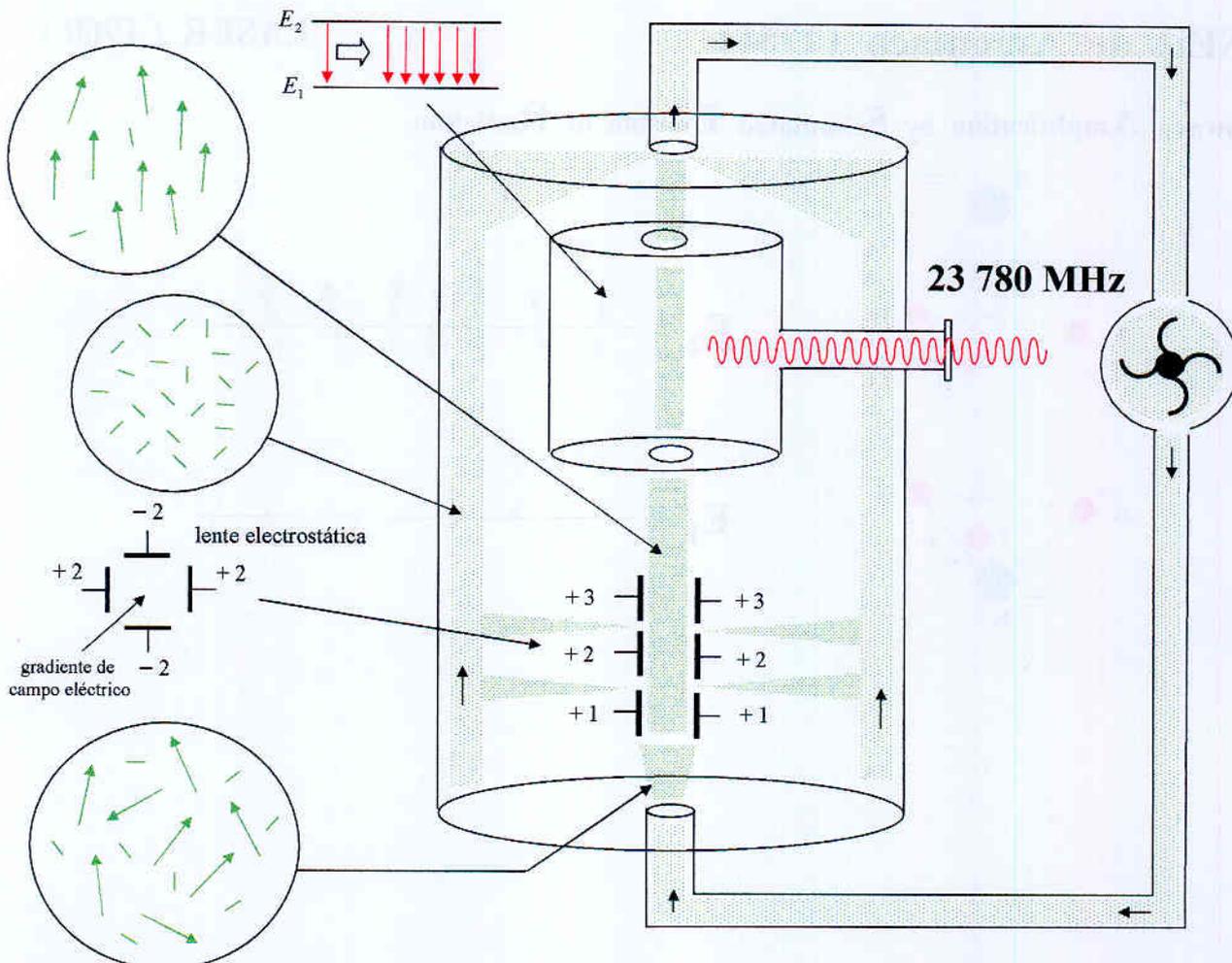
# LASER (1960)

## Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation

$\text{NH}_3$

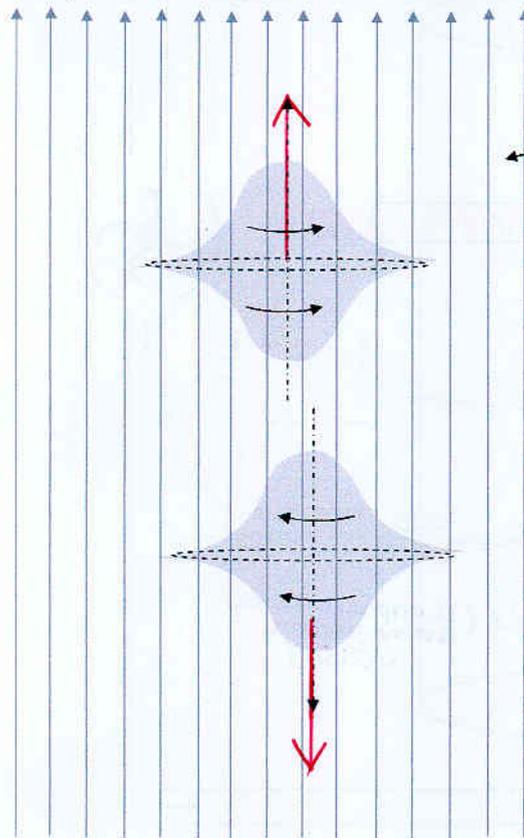


De manera natural es más probable  $E_1$  que  $E_2$   
 (estadística de Boltzmann)  
 Necesitamos un mecanismo para invertir esa  
 situación natural (inversión de población)



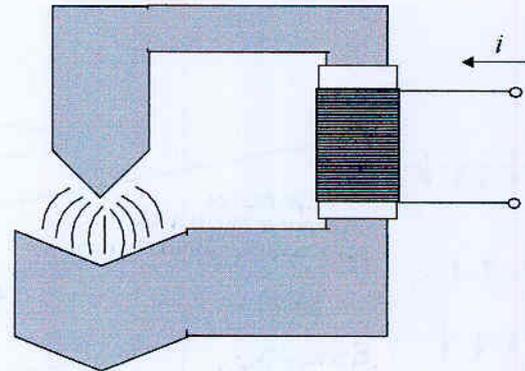
# Experimento de Stern - Gerlach (1922)

Comprobación experimental de la cuantificación del momento dipolar magnético del electrón



spin

campo magnético inhomogéneo

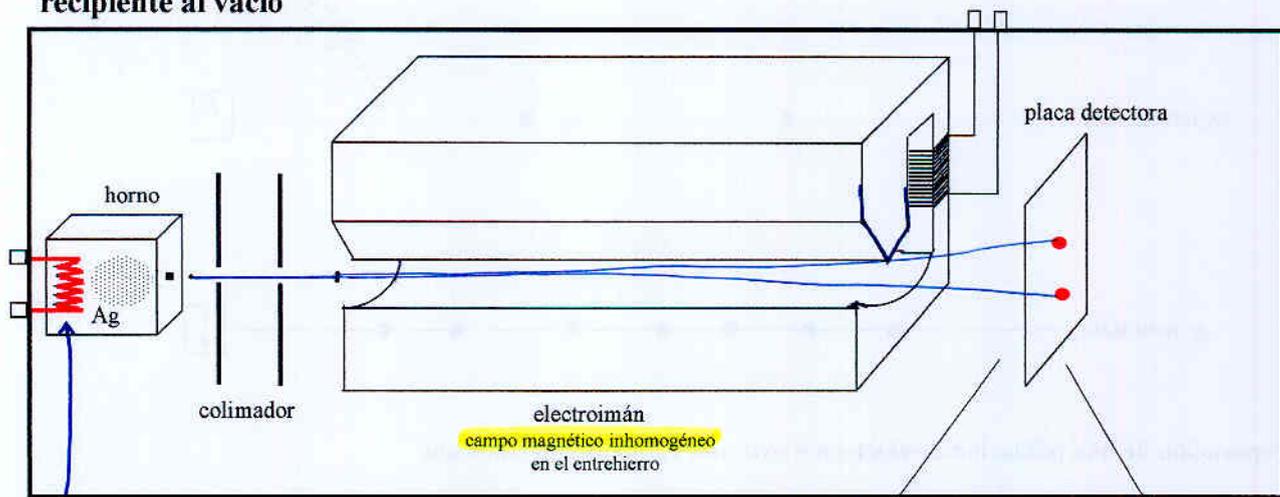


mientras que un campo homogéneo orienta los dipolos, un campo inhomogéneo introduce un par de fuerzas sobre los dipolos que los desplaza en una dirección u otra según sea su spin

confirmó experimentalmente la teoría de que el momento dipolar debido al spin de un electrón está cuantizado (tiene 2 estados)

# Experimento de Stern - Gerlach (1922)

recipiente al vacío

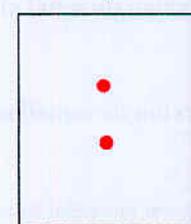


filamento sobre el que se ha depositado plata que al calentarse se vaporiza



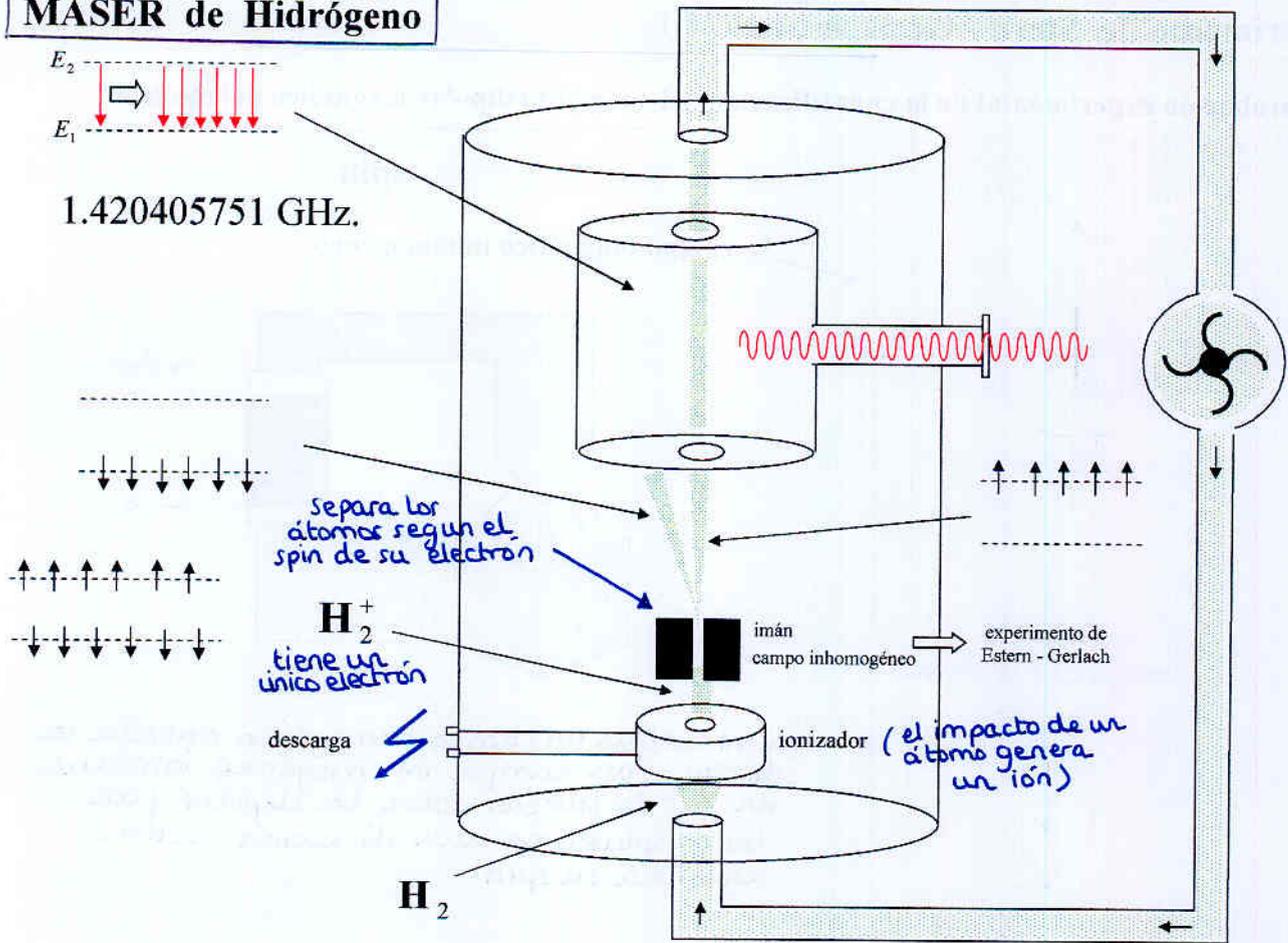
predicción clásica

?

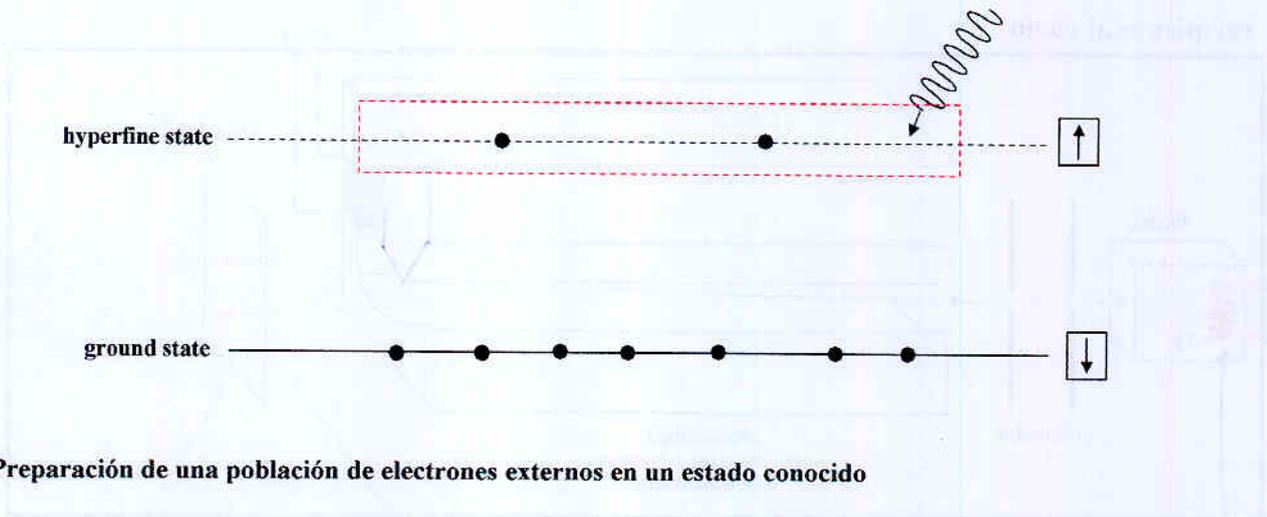


predicción cuántica

# MASER de Hidrógeno



## Todos los AFS tienen 3 funciones en común:



1.- Preparación de una población de electrones externos en un estado conocido

2.- Inyección de señal electromagnética que cause la transición energética

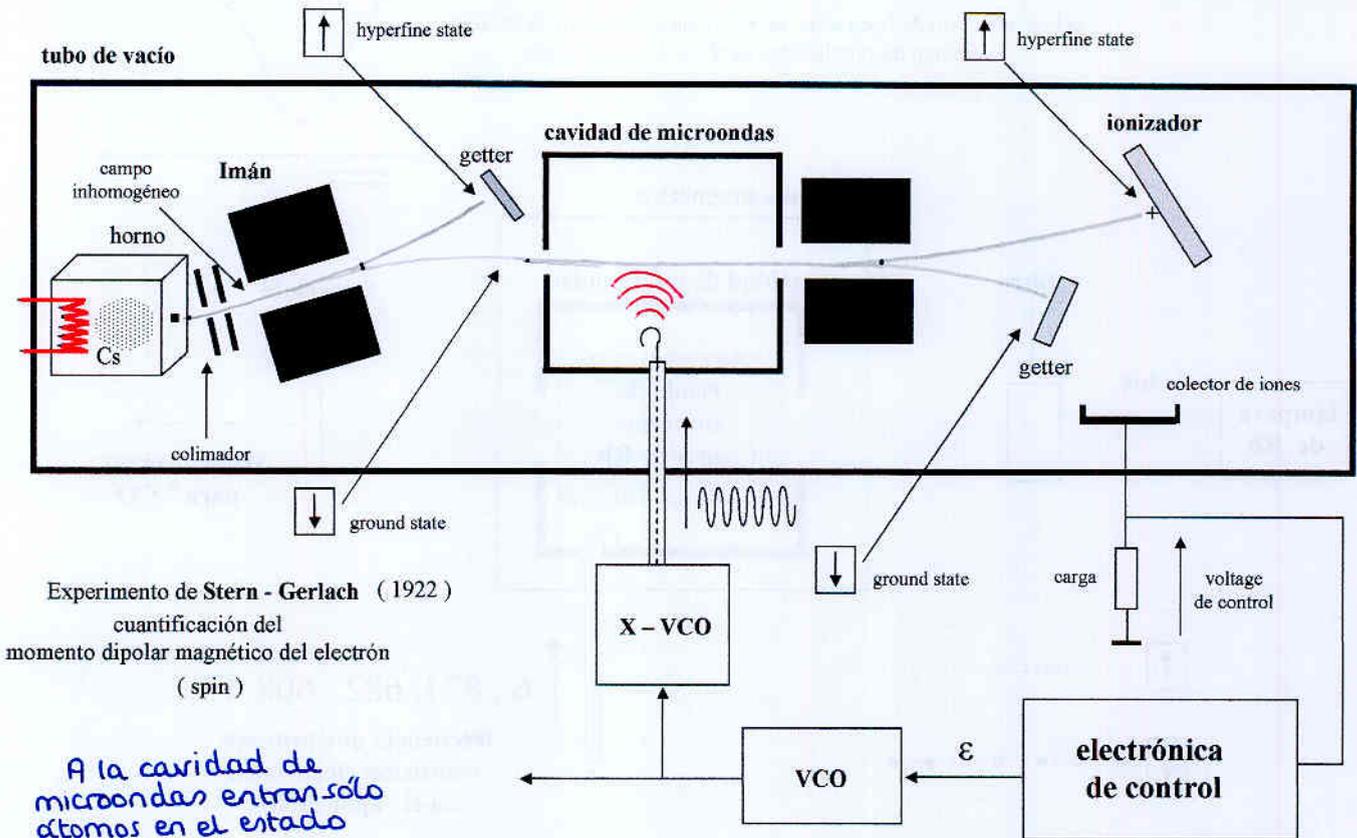
a mayor precisión, mayor número de transiciones

3.- Selección de aquellos átomos que presenten electrones en el estado energético "transicionado"



generar una señal de error para sintonizar un X-VCO

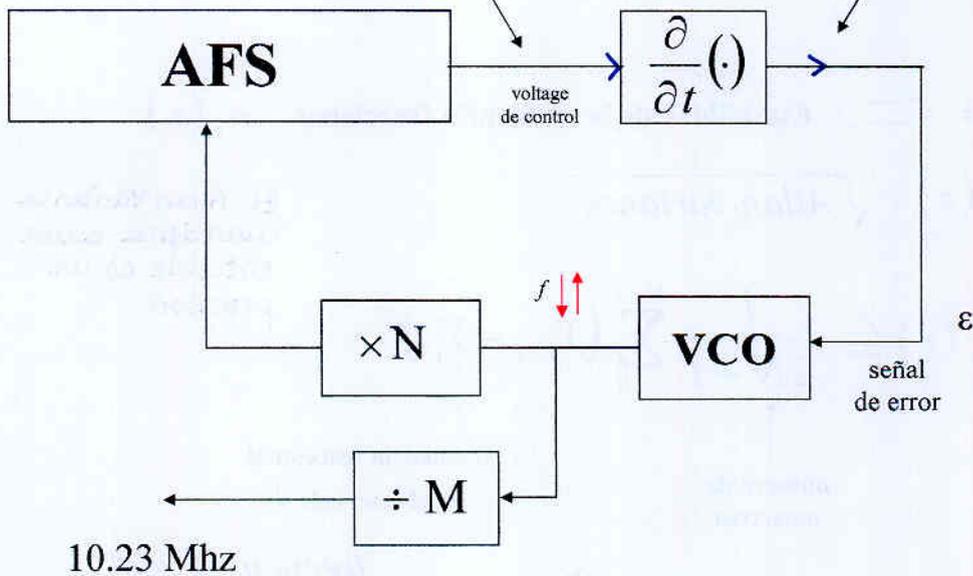
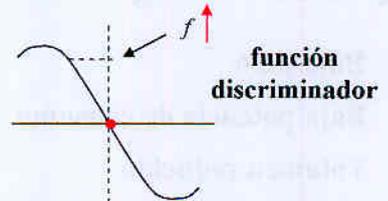
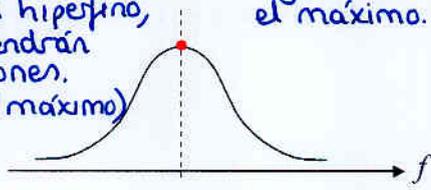
# Cesium beam frequency standard resonator



Experimento de Stern - Gerlach (1922)  
cuantificación del momento dipolar magnético del electrón (spin)

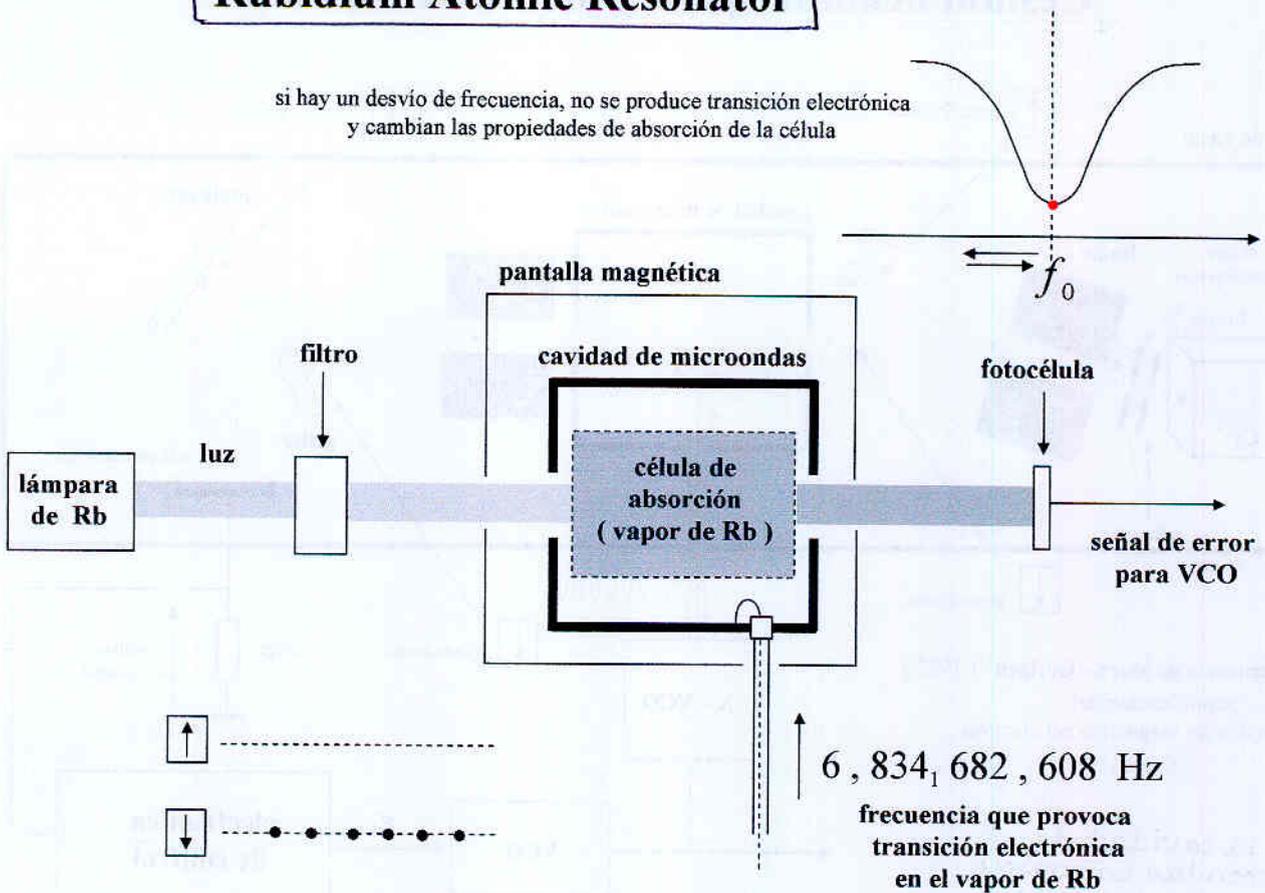
A la cavidad de microondas entran sólo átomos en el estado 'ground'.  
cuanto más cercana sea la frecuencia generada por el X-VCO a la frecuencia adecuada para pasar los átomos a estado hiperfino, más átomos se tendrán en el colector de iones. (voltage de control máximo)

mediante realimentación logramos mantenernos en el máximo.



# Rubidium Atomic Resonator

si hay un desvío de frecuencia, no se produce transición electrónica y cambian las propiedades de absorción de la célula



## ¿ Que se le exige a un AFS ?

- Bajo peso
- Baja potencia de consumo
- Volumen reducido
- Alta tolerancia al ambiente espacial
- Fiabilidad

Estabilidad de fase  $\longleftrightarrow$  Estabilidad de la frecuencia fraccional  $\sigma_y(\tau)$

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\text{Allan variance}}$$

Allan\_variance ?

$$\sigma_y^2(\tau) \triangleq \frac{1}{2N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2$$

número de muestras

frecuencia fraccional en el intervalo  $i$

El Allan Variance cuantifica cuan estable es un proceso

$$\gamma = \frac{\text{frecuencia real}}{\text{frecuencia nominal deseada}}$$

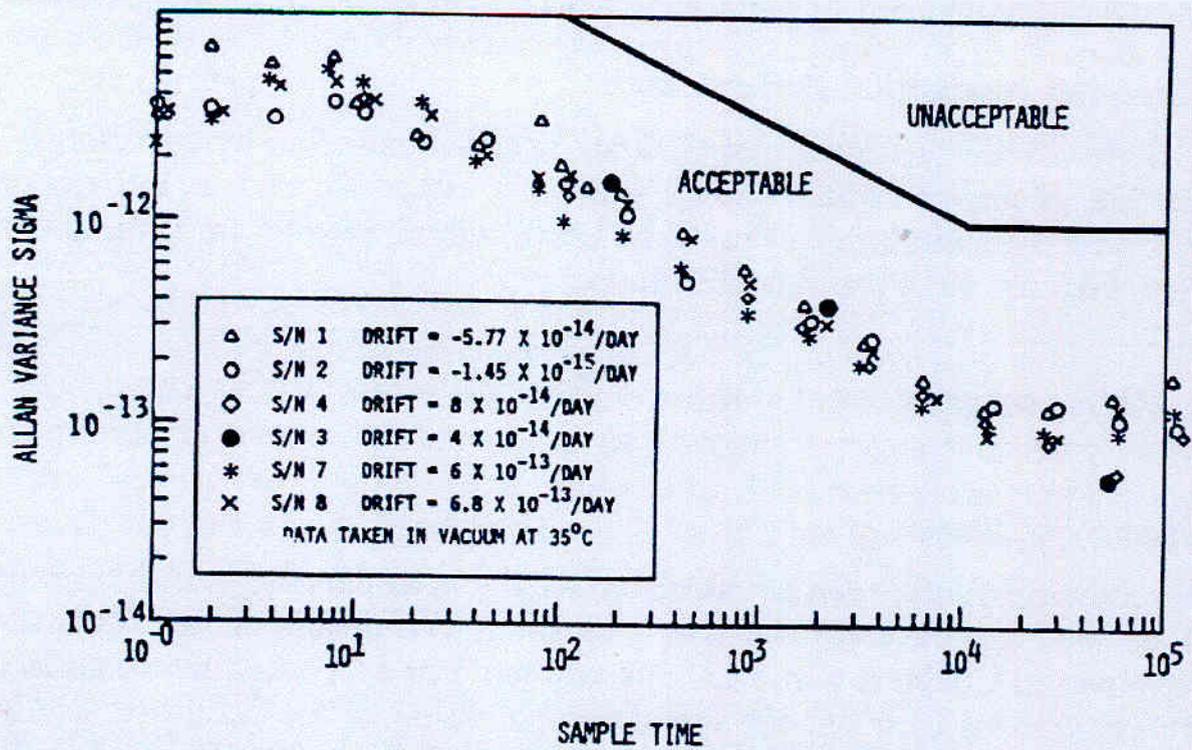


Fig. 7 Space qualified rubidium-cell frequency standard performance. These units were developed by Rockwell as a derivative of a clock designed by Efratom, Inc. (data courtesy of the U.S. Air Force).

Fig. 7. Space-oriented robot-mimetic program, actual performance. These units were developed in Norway as a derivative of a chart developed by Kistner, Inc. in a contract of the U.S. Air Force.

