ETSI Telecomunicación

Introducción a las Señales Aleatorias

Momentos conjuntos de varias V.A. aleatorias

Valor esperado: $\bar{g} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$

Momentos sobre el origen

$m_{nk} = \iint_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = E[X^n Y^k]$

$m_{01} = E[Y]$ — m_{0k} son los momentos de Y

$m_{10} = E[X]$

Momentos centrales (sobre la media)

$\mu_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^n (y-E[Y])^k f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = E[(X-E[X])^n (Y-E[Y])^k]$

$R_{XY} = m_{11}$ correlación — es como "la media de las variables multiplicadas"

$C_{XY} = \mu_{11}$ covarianza — se cumple $C_{XY} = R_{XY} - E[X]E[Y]$

$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{02}\mu_{20}}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1,1]$ coeficiente de correlación

X e Y son incorreladas $\Leftrightarrow R_{XY} = E[X]E[Y] \Leftrightarrow C_{XY} = 0$

$\Uparrow$ $\Downarrow$ si X e Y son gaussianas conjuntamente

X e Y son independientes

$E[XY] = E[X]E[Y]$ — incorreladas

X e Y son ortogonales $\Leftrightarrow R_{XY} = 0 \leftrightarrow C_{XY} = -E[X]E[Y]$

Funciones características conjuntas

$\Phi_{XY}(\omega_1,\omega_2) = E[e^{(j\omega_1 X + j\omega_2 Y)}]$

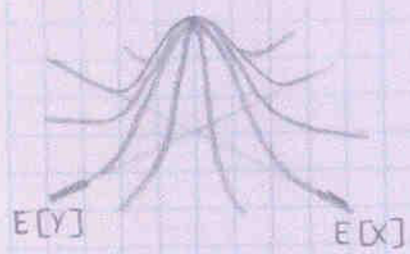
se cumple:

$\phi_X(\omega_1) = \phi_{XY}(\omega_1, 0)$

$\phi_Y(\omega_2) = \phi_{XY}(0, \omega_2)$

funciones características marginales a partir de la conjunta.

· V.A. conjuntamente gaussianas



cumplen una ecuación muy larga (pag 43) y además, el valor máximo

$f_{XY}(x,y) \leq f_{XY}(E[X], E[Y]) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}}$

siendo $\sigma_x^2 = E[(x-E[x])^2]$

$\rho = \frac{E[(x-E[x])(y-E[y])]}{\sigma_x \sigma_y}$ — se pueden deducir de la expresión de los momentos

cumplen: X e Y incorreladas $\Longleftrightarrow$

Apuntes de Pak

Introducción a las señales aleatorias

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 2º curso
Curso 2004/2005

Contenido

- Referencia rápida de la asignatura

Fecha de última actualización: 27 Agosto 2007

INTRODUCCION A LAS SEÑALES ALEATORIAS

TEMA 1. PROBABILIDAD

Frecuencia relativa de A: $f_r(A) = \frac{N_A}{N}$

Probabilidad de A: $P\{A\} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$

esta definición fallaba, pues
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \,/\, N > n_0 \Rightarrow \left|\frac{N_A}{N} - P\{A\}\right| < \varepsilon$

Espacio muestral

conjunto de todos los resultados de un cierto experimento

Pueden ser contables: ej naturales (dado)
incontables: ej n°s reales

Definición axiomática de Probabilidad

- $P\{A\} \geq 0$
- $P\{S\} = 1$ $\qquad 0 \leq P\{A\} \leq 1$
- N sucesos $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ n puede ser infinitos
  y A_i no se solapa con A_j $(A_i \cap A_j) = \emptyset$
  entonces

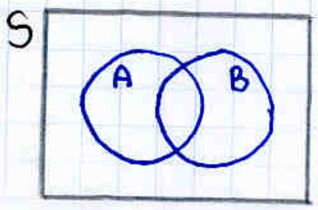
$$P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots\} = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{N} P\{A_n\}$$

A partir de estos tres AXIOMAS podemos desarrollar toda la teoría.

Probabilidad de la Unión y la Intersección

$P\{A \cap B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cup B\}$
tb escrito $P\{AB\}$

$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$



Probabilidad Condicional

Probabilidad de A dado B

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

Permite otra forma de calcular la intersección

$$P\{A \cap B\} = P\{A|B\} \cdot P\{B\}$$

ejemplo

$A \equiv 2^a$ tirada sea 1
$B \equiv 1^a$ tirada sea 1

$$P\{A \cap B\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ejemplo

Baraja de 52 cartas, se extraen 2 cartas al azar
52 cartas
4 palos
13 cartas / palos

$A \equiv 1^a$ corazón
$B \equiv 2^a$ corazón
$C \equiv 1^a$ no corazón

1. $P\{A\} = 13/52 = 1/4$

$P\{B|A\} = 12/51$

2. $P\{B|C\} = 13/51$

3. $P\{AB\} = P\{A|B\} \cdot P\{B\}$ $\quad P\{AB\} = P(A)+P(B)-P(A \cup B)$ no nos sirve

$P\{BA\} = P\{B|A\} \cdot P\{A\}$

$= 12/51 \cdot 1/4 = 1/17$

Probabilidad Total

$S \equiv \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$

¡no se solapen! $B_i \cap B_j = \emptyset$

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P\{B_i\} \cdot P\{A|B_i\}}_{P\{A \cap B_i\}}$$

Notación para negar un suceso

$P\{B_1\} = P$

$P\{\overline{B_1}\} = 1 - P$

Teorema de Bayes

$$P\{B|A\} = \frac{P\{B \cap A\}}{P\{A\}} \quad \Bigg| \quad P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P\{B \cap A\} = P\{A \cap B\} \\ \shortparallel \\ P\{A\} \cdot P\{B|A\} = P\{B\} \cdot P\{A|B\} \end{array}}$$

Lógico

Ejemplo 1.2
sistema de comunicación binario que causa errores ocasionales

$B1 \equiv$ Emitir 1 $\quad P\{B1\} = 0'6$
$B0 \equiv$ Emitir 0 $\quad P\{B0\} = 0'4$
$A1 \equiv$ Recibir 1
$A2 \equiv$ Recibir 0

Se ha estudiado que la probabilidad de que se transmita mal es 10%

$P\{A1 | B1\} = 0'9 \qquad P\{A0 | B1\} = 0'1$
$P\{A1 | B0\} = 0'1 \qquad P\{A0 | B0\} = 0'9$

a) Probabilidad de recepción de cada símbolo

$$P\{A_0\} = P\{B_0\} \cdot P\{A_0|B_0\} + P\{B_1\} \cdot P\{A_0 | B_1\}$$
$$= 0'4 \cdot 0'9 + 0'6 \cdot 0'1$$
$$= 0'42$$

$$P\{A_1\} = P\{B_0\} \cdot P\{A_1|B_0\} + P\{B_1\} \cdot P\{A_1|B_1\}$$
$$= 0'4 \cdot 0'1 + 0'6 \cdot 0'9$$
$$= 0'58$$

b) Probabilidad de acertar estando en el receptor sabiendo lo que se ha recibido

$$P\{B_1 | A_1\} = \frac{P\{B1\} \cdot P\{A1|B1\}}{P\{A1\}} = \frac{0'6 \cdot 0'9}{0'58} = 0'931$$
$$= 0'931$$

$$P\{B0 | A0\} = \frac{P\{B0\} \cdot P\{A0|B0\}}{P\{A0\}} = \ldots = 0'857$$

Probabilidad de error

se ha recibido bien un cero

se ha recibido un cero que era un 1 → $P\{B1 | A0\} = 1 - P\{B0|A0\} = 0'143$

se ha recibido bien un 1

→ $P\{B0 | A1\} = 1 - P\{B1|A1\} = 0'069$

Independencia de sucesos

$$\boxed{\begin{array}{l} P\{A \mid B\} = P\{A\} \\ P\{B \mid A\} = P\{B\} \end{array}}$$

ej. un dado
ej. sacar cartas REPONIENDOLAS tras sacarlas

$\boxed{\text{No dependen el uno del otro}}$

se deduce
si A y B indep. $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$

Exclusión mutua

$P\{A \cap B\} = 0$ $\boxed{\text{no pueden ocurrir a la vez}}$

Independencia estadística de más de un suceso

Para A, B y C independientes se debe cumplir la independencia de las parejas AB, AC y BC
Y la del trío: $P\{A \cap B \cap C\} = P\{A\} P\{B\} P\{C\}$

TEMA 2. Variable aleatoria

Espacio muestral S: los posibles resultados de cierto experimento

variable aleatoria X

$s \longrightarrow \mathbb{R}$

asigna un número a cada resultado

S: dominio de X $x = X(s)$ $\mathbb{R}$: rango de X

condiciones para ser V.A.
- la $P\{X \leq \alpha\}$ debe ser $= \sum P\{X = x\}$ de todos los $x \leq \alpha$
- $P\{X=-\infty\} = P\{X=+\infty\} = 0$

Función de distribución

$F_X(x) = P\{X \leq x\}$

- es continua por la derecha
- no decreciente

Función densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$\int_{-\infty}^{x} = P\{X \leq x\}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f_X = 1$

media: m_x
desviación típica: σ_x
varianza: σ_x^2

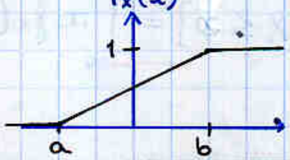
Gaussiana:

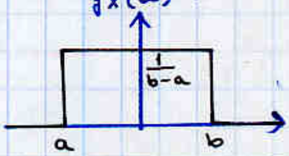
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$F(x) := F_X(x)$ gaussiana con $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$
↳ tablas $\boxed{F_X(x) = F\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)}$

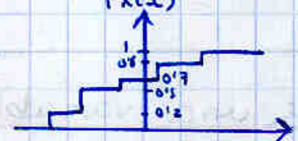
- Binomial   nota $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = NCk$
- Poisson
- Exponencial
- Rayleigh

caso particular: **Distribución Uniforme**





caso particular: **V.A. discreta**



Función de distribución condicionada:

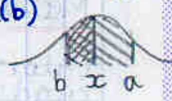
recuerda $\boxed{P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}}$

$$F_X(x|B) = P\{X \leq x | B\} = \frac{P\{X \leq x \cap B\}}{P\{B\}}$$

según sea B

$$F_X(x|X\leq a) = \frac{P\{X \leq x \cap X \leq a\}}{P\{X \leq a\}} = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ \frac{F_X(x)}{F_X(a)} & x < a \end{cases} \xrightarrow{d} f_X(x|X\leq a) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ \frac{f_X}{\int_{-\infty}^{a} f_X} & x < a \end{cases}$$

$$F_X(x|b<X\leq a) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ \frac{F_X(x) - F_X(b)}{F_X(a) - F_X(b)} & b \leq x < a \\ 0 & x < b \end{cases} \xrightarrow{d} f_X(x|b<X\leq a) = \begin{cases} 0 & \text{otra } x \\ \frac{f_X}{F_X(a) - F_X(b)} & x \in [b, a[\end{cases}$$



Teorema Probabilidad Total

$\boxed{P\{A\} = P\{A|B_1\}P\{B_1\} + \ldots + P\{A|B_n\}P\{B_n\}}$

$F_X(x) = F_X(x|B_1)P\{B_1\} + \ldots$

$f_X(x) = f_X(x|B_1)P\{B_1\} + \ldots$

versión continua:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\{A|X=x\} f_X(x)\, dx = P\{A\}$$

Teorema de Bayes

$\boxed{P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}}{P\{B\}} P\{A\}}$

$P\{A|B\}P\{B\} = P\{B|A\}P\{A\}$
$P\{A \cap B\} = P\{B \cap A\}$

$$P\{A|X \leq x\} = \frac{F_X(x|A)}{F_X(x)} P\{A\}$$

versión continua:

$$f_X(x|A) = \frac{P\{A|X=x\} f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P\{A|X=x\} f_X(x)\, dx}$$

Operaciones sobre una V. A.

- valor esperado ≡ valor medio ≡ esperanza

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx}$$

para V. A discretas es $\sum x_i P\{x_i\}$

- valor esperado de una función

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\, f_X(x)\, dx} \overset{Y=g(X)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = E[Y]$$

f_X original

se puede demostrar de aquí

- **linealidad** $E[a_1 g_1(X) + \dots + a_n g_n(X)]$

$$= a_1 E[g_1(X)] + \dots + a_n E[g_n(X)]$$

- valor esperado condicional

$$\boxed{E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|A)\, dx}$$

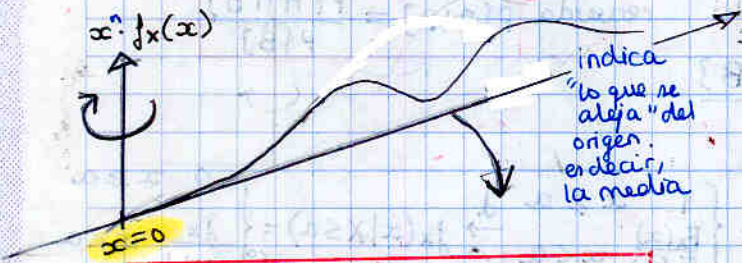
para $A \equiv (X \le b)$

$$E[X|X\le b] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x|X\le b)\, dx = \frac{\int_{-\infty}^{b} x\, f_X(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx}$$

$$f_X(x|x\le b) = \frac{f_X(x)}{\underbrace{\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx}_{F(b)}}$$ por derivación de $\frac{F(x)}{F(b)}$

Momentos de una variable aleatoria

Momentos sobre el origen



$$\boxed{m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx = E[X^n]}$$

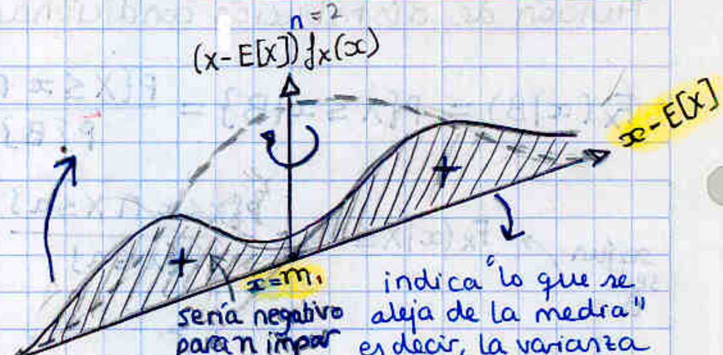
no está elevado a nada

Media: $m_1 = E[X]$

Valor cuadrático medio: $m_2 = E[X^2]$ $\quad \mu_2 = \boxed{\sigma_x^2 = m_2 - m_1^2}$

NOTA: si $E[X]=0 \Rightarrow m_n = \mu_n$

Momentos centrales (en torno a la media)



$$\boxed{\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^n f_X(x)\, dx = E[(X-E(X))^n]}$$

todo elevado a n — sigue igual

$$\boxed{\text{varianza: } \mu_2 = E[(X-E(X))^2]} \; \boxed{= \sigma_x^2}$$

(las partes negativas se vuelven positivas)

Función característica

$$\boxed{\phi_X(\omega) = E[e^{j\omega x}]} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, e^{j\omega x}\, dx$$ ¡¡es la TF con el signo de ω cambiado!!

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(\omega)\, e^{-j\omega x}\, d\omega$$ ¡¡la TF^{-1} con el signo de x cambiado!!

se cumple: $$\boxed{m_n = (-j)^n \left(\frac{d^n \phi_X(\omega)}{d\omega^n}\right)_{\omega=0}}$$

Transformación de una V.A.

$Y = g(X)$ (Y: V.A., X: V.A.) debe cumplir:
- Dominio de g debe incluir todos los posibles x
- $\{Y \leq y\}$ debe ser un evento posible
- $P\{g(x) = \pm\infty\}$ debe ser cero.

· obtención de $f_Y(y)$ a partir de $f_X(x)$

$$Y = g(X)$$

1. Obtener raices reales de $y = g(x)$ que serán $x_1, x_2, x_3, \dots$
2. Derivar $g(x)$ que será $g'(x)$
3. $$\boxed{f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}}$$

no olvidar el modulo

si no hay raices reales $\hookrightarrow f_Y(y) = 0$

raices:

no es cuando $g(x)=0$ sino cuando $y = g(x) \Rightarrow g(x) - y = 0$

ej $Y = \frac{1}{X}$

raices reales

$\frac{1}{x} - y = 0 \Rightarrow x = 1/y$

en realidad las raices son $x = g^{-1}(y)$ [la inversa]

ejemplos:

1. $Y = aX + b$

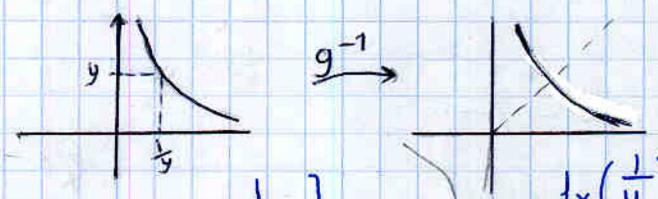
$y = g(x) = ax + b$

raices: $ax + b - y = 0 \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$

$g'(x) = a$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}$$

2. $Y = \frac{1}{X}$



$y = g(x) = \frac{1}{x}$

raices: $x = \frac{1}{y}$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

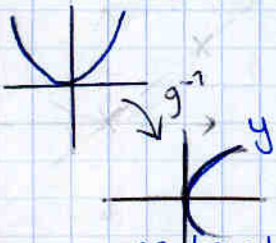
$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$$

3. $Y = aX^2$

$y = g(x) = ax^2$ $\qquad g'(x) = 2ax$

raices: $ax^2 - y = 0$

casos:



$y < 0 \Rightarrow$ no hay raices $\Rightarrow f_Y(y) = 0$

$y = 0 \Rightarrow$ raiz $x = 0 \Rightarrow f_Y(0) = \frac{f_X(0)}{0}$ en cero ocurre algo extraño

$y \geq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y/a} \Rightarrow f_Y(y \geq 0) = \frac{1}{2\sqrt{ya}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\right]$

por tanto:
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ya}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\right] \cdot u(t)$$
→ en $y<0$ es cero

4. $Y = X\,u(X)$ $\qquad y = g(x) = x\,u(x)$ $\qquad g'(x) = u(x)$ salvo en 0 (derivada de un producto)

raices:

$y < 0 \to$ no hay raices

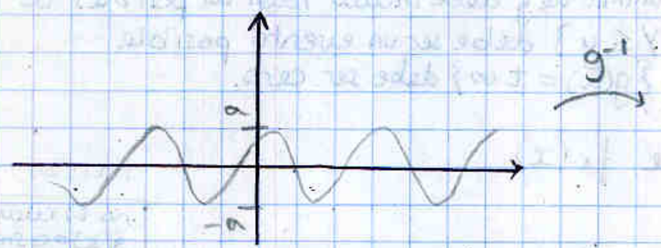
$y > 0 \to$ raices $x = y \Rightarrow f_Y(y) = f_X(x)$

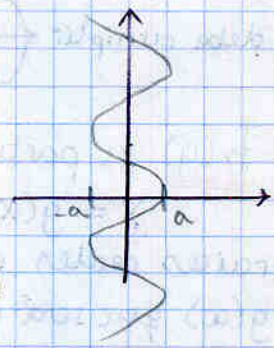
$y = 0 \to$ hay que pensar: $P\{Y=0\} = P\{X \leq 0\} \Rightarrow f_Y(0) = F_X(0)\,\delta(y)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(y)\,u(x) + F_X(0)\,\delta(y)$$

5. $Y = a \operatorname{sen}(X + \theta) \qquad a > 0$

$$g'(x) = a\cos(x+\theta)$$





$|y| > a \rightarrow$ no hay raices

$|y| < a \rightarrow$ hay ∞ raices

$$x_n = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{a}\right) - \theta$$

$$g'(x_n) = a\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{a}\right)\right)$$
$$= \pm\sqrt{a^2 - y^2}$$

$a^2 = y^2 + (a\cos\alpha)^2$

$(a\cos\alpha)^2 = a^2 - y^2$

$$|g'(x_n)| = \sqrt{a^2 - y^2}$$

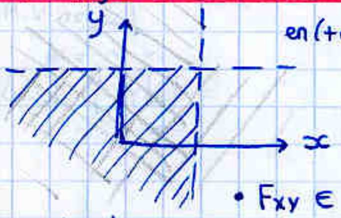
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\left[\sum f_X\left(\underset{n\text{-ésimo}}{\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{a}\right)} - \theta\right)\right]$$

TEMA 3. VARIABLE ALEATORIA MULTIDIMENSIONAL

varias magnitudes aleatorias interaccionan para dar lugar a otra

Función de distribución

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}}$$



en $(+\infty,+\infty)$ vale 1

en $(-\infty,-\infty)$ vale cero

- $F_{XY} \in [0,1]$
- es no decreciente en x e y

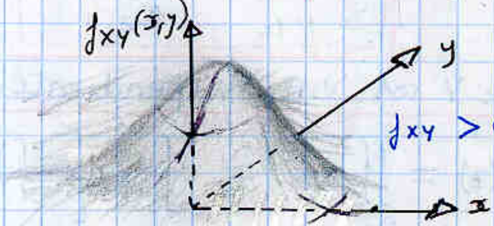
Funciones de distribución marginales:

$$F_{XY}(x,\infty) = F_X(x)$$
$$F_{XY}(\infty,y) = F_Y(y)$$

se puede obtener F_X de F_{XY}, la inversa no se cumple en general

Función densidad de probabilidad

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y}}$$



$f_{XY} > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY} = 1$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}$$

utiliza variables mudas para integrar

$$P\left\{\begin{matrix} X \in [x_1,x_2] \\ Y \in [y_1,y_2] \end{matrix}\right\} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}$$

Funciones de densidad de probabilidad marginales

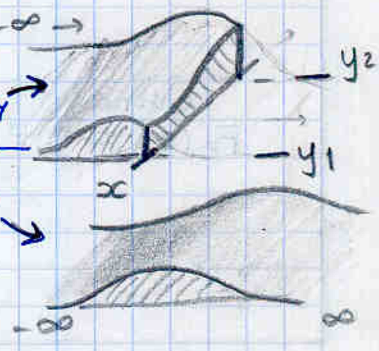
$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f_{XY}\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{XY}\, dx$$

Condicionadas:

recordando $F_X(x|B) = P\{X \le x | B\}$

ej: $F_X(x | Y \le y_0) = \dfrac{F_{XY}(x,y_0)}{F_Y(y_0)}$

ej: $F_X(x | y_1 < Y \le y_2) = \dfrac{F_{XY}(x,y_2) - F_{XY}(x,y_1)}{F_Y(y_2) - F_Y(y_1)} = \dfrac{\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}}{\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}}$



Independencia estadística

$$\boxed{P\{A \cap B\} = P\{A\} P\{B\}}$$

X e Y son V.A. independientes $\Longleftrightarrow$ $F_{XY} = F_X \cdot F_Y$, $f_{XY} = f_X \cdot f_Y$

si consigues factorizar F_{XY} de esa forma, entonces son V.A. indep.

como no dependen una de otra da igual que a una la condiciones con la otra

ej: $F_X(x | Y \le y) = F_X(x)$

$f_X(x | Y \le y) = f_X(x)$

FUNCIONES de varias V. A.

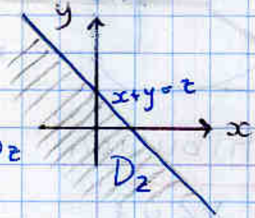
$$\boxed{Z = g(X,Y)}$$

Para calcular $P\{Z \le z\}$ fíjate que $\{Z \le z\} \equiv \{g(X,Y) \le z\} \equiv (x,y) \in D_z$ ← un área en (x,y)

$P\{Z \le z\} \underset{\text{por def}}{=} F_Z(z)$

ej. $z = X + Y$

$z \le 1 \equiv (x,y) \in D_z$



$$P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}\, dx\, dy$$

si son V.A. indep

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y \left[\int_{-\infty}^{z-y} f_X\, dx\right] dy$$

entonces:
$$\boxed{F_Z(z) = \iint_{D_z} f_{XY}}$$
tal y como sabemos hacer en análisis

si X e Y son V.A. independientes

$$F_Z(z) = \iint_{D_z} f_{XY} = \int f_X \left[\int f_Y\, dy \right] dx$$

y además: en el ejemplo $z = X+Y$
$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, f_X(z-y)\, dy = f_X(z) * f_Y(z)$$

X e Y V.A. independientes, $Z = X + Y$ $\Longrightarrow$ $f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z)$

ejemplo $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ en este caso: $D_z \equiv$

$F_Z(z) =$
$$P\{Z \le z\} = \int_0^{2\pi}\int_0^{z} f_{XY}\, dr\, d\varphi$$
si conseguimos expresar f_{XY} como $f_{XY}(r)$ simetría radial

ej. X e Y gaussianas: media nula misma σ_x

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

entonces
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = 2\pi \int_0^z r\, f_{XY}(r)\, dr = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^z r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, dr$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

derivando podemos obtener $f_Z(z)$

Momentos conjuntos de varias V.A. aleatorias

Valor esperado: $$\boxed{\bar{g} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$

Momentos sobre el origen	Momentos centrales (sobre la media)
$\boxed{m_{nk} = \iint_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = E[X^n Y^k]}$	$\mu_{nk} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^n (y-E[Y])^k f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$
$m_{01} = E[Y]$ — m_{0k} son los momentos de Y	$= E\left[(X-E[X])^n (Y-E[Y])^k\right]$
$m_{10} = E[X]$ — m_{n0} son los momentos de X	

$\boxed{R_{XY} = m_{11}}$ correlación — es como "la media de las ~~vari~~ variables multiplicada"

$R_{XY} = E[XY]$

$\boxed{C_{XY} = \mu_{11}}$ covarianza

se cumple $\boxed{C_{XY} = R_{XY} - E[X]E[Y]}$

coeficiente de correlación $\rho = \dfrac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{02}\mu_{20}}} = \dfrac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1,1]$

X e Y son incorreladas $\Longleftrightarrow$ $R_{XY} = E[X]E[Y]$ $\Leftrightarrow$ $C_{XY} = 0$, $\rho = 0$

$\Uparrow$ $\Downarrow$ si X e Y son gaussianas conjuntamente

X e Y son independientes

$\boxed{E[XY] = E[X]E[Y]}$ $\uparrow$ incorreladas

X e Y son ortogonales $\Leftrightarrow$ $R_{XY} = 0$ $\leftrightarrow$ $C_{XY} = -E[X]E[Y]$

Funciones características conjuntas

$$\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = E\left[e^{(j\omega_1 X + j\omega_2 Y)}\right]$$

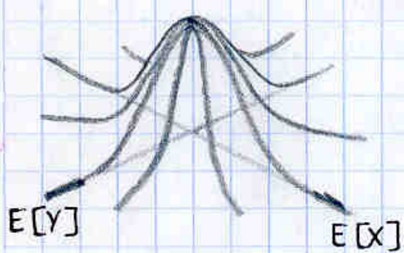
se cumple:

$$\phi_X(\omega_1) = \phi_{XY}(\omega_1, 0)$$

$$\phi_Y(\omega_2) = \phi_{XY}(0, \omega_2)$$

funciones características marginales a partir de la conjunta.

• V.A. conjuntamente gaussianas



cumplen una ecuación muy larga (pag 43) y además, el valor máximo

$$f_{XY}(x,y) \le f_{XY}(E[X], E[Y]) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}}$$

siendo $\sigma_x^2 = E[(x-E[X])^2]$

$$\rho = \frac{E[(x-E[X])(y-E[Y])]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

se pueden deducir de la expresión de los momentos

cumplen:

X e Y incorreladas $\Longleftrightarrow$ X e Y independientes

· **V. A. complejas**

se puede escribir $Z = X + jY$

$$E[Z] = E[X] + j\,E[Y]$$

$$E[g(Z)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

que ocurre si unimos varias V.A. complejas ?

• V.A. independientes $\Longleftrightarrow f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) = f_{Z_1}(z_1) \cdot f_{Z_2}(z_2)$ esta nomenclatura me la invento para entenderlo

la forma correcta de escribirlo sería

$$f_{X_1Y_1X_2Y_2}(x_1,y_1,x_2,y_2) = f_{X_1Y_1}(x_1,y_1) \cdot f_{X_2Y_2}(x_2,y_2)$$

• $R_{Z_1Z_2} = E[Z_1^* Z_2]$

• $C_{Z_1Z_2} = E\left((Z_1 - E[Z_1])^* \cdot (Z_2 - E[Z_2])\right)$

· las definiciones de incorrelación y ortogonalidad son las mismas

Teorema del límite central

sean N V.A $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ independientes

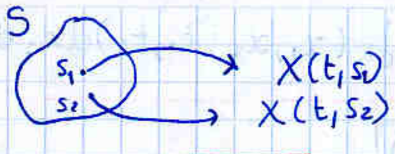
y varianzas $\sigma_i^2 \underset{\text{mucho menor}}{\ll} \sum_{n=1}^{n} \sigma_n^2$

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ recuerda: $f_X = f_{X_1} * f_{X_2} * \dots * f_{X_n}$

$\boxed{\text{X tiende a ser gaussiana cuando } N \to \infty}$

Cuando un fenómeno físico es superposición de un nº suficiente de V.A se puede considerar gaussiano con buenos resultados.

TEMA 4. PROCESOS ALEATORIOS



cada realización s genera un $X(t)$ en lugar de un único valor X

el Proceso aleatorio o estocástico es el conjunto de todas las funciones posibles $X(t)\ \forall s$

- Proceso aleatorio completo : (t y s variables): $X(t,s)$
- Realización de P.A. (s fijo, t variable) : $x(t)$ por comod. lo llamamos $X(t)$
  es decir, función determinista en el tiempo
- Variable aleatoria generada por el P.A. (t fijo y s variable) : $X(t)$
- una amplitud constante (t y s fijos) $x(t)$

Clasificación

Tiempo:

en cada cuadro hay dibujado $x(t)$, una posible realización de $X(t,s)$ para un s fijo	Secuencia aleatoria (SA) tiempo discreto	(PA) Proceso aleatorio tiempo continuo
Amplitud: discreto variación de amplitudes discreta	S.A. discreta	P.A. discreto
Amplitud: continuo variación de amplitudes continua	S.A. continua	P.A. continuo

P.A. predecible : Se puede predecir valores futuros a partir de los pasados de cualquier realización
ej. $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$
A, ω_0 y/o θ son V.A.

P.A. no predecible
ej: ruido blanco

Función de distribución (FD) y función de densidad de probabilidad (fdp)

un P.A. genera una V.A. para cada t, por tanto FD y fdp dependen de t

- Funciones de probabilidad de primer orden :

$$F_X(x, t_0) = P\{X(t_0) \le x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$f_X(x, t_0) = \frac{\partial F_X(x, t_0)}{\partial x}$$

t_0 es un instante de tiempo

Tienen las mismas propiedades que la FD y fdp vistas para una V.A. en el tema 2

- Funciones de probabilidad de segundo orden :

para q. lo entiendas. Debería llamarse F_{XX} y f_{XX}

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \le x_1,\ X(t_2) \le x_2\}$$

$x_1, x_2 \in\ ]-\infty, \infty[$
t_1, t_2 son instantes de tiempo

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(\ \ )}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Lo tratamos como si $X(t_1)$ y $X(t_2)$ fueran dos V.A. como en el tema anterior. De hecho lo son. Tienen las mismas propiedades

- " " " " orden N :

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \ldots$$

en la práctica usamos sólo las de primer y segundo orden.

Momentos de un proceso aleatorio

Se cumple todo exactamente igual

sobre el origen

$$m_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x,t)\,dx = E[X(t)^n]$$

$$m_1(t) = E[X(t)]$$
$$m_2(t) = E[X(t)^2]$$

centrales

$$\mu_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X(t)])^n f_X(x,t)\,dx$$
$$= E[(X(t) - E[X(t)])^n]$$

$$\mu_2(t) = \sigma_X^2(t) = E[(X(t) - E[X(t)])^n]$$
$$\sigma_x^2 = m_2(t) - m_1^2(t)$$

Momentos conjuntos de un P.A. (cogiendo 2 V.A. $X(t_1)$ $X(t_2)$)

Autocorrelación: $\boxed{R_{XX}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \, f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2}$

$= E[X(t_1)X(t_2)]$

Autocovarianza $C_{XX}(t_1,t_2) = E[(X(t_1)-E[X(t_1)])(X(t_2)-E[X(t_2)])]$

se sigue cumpliendo $C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)]$

Correlación y covarianza cruzada (tomando 2 V.A. de P.A.'s distintos $X(t_1)$, $Y(t_2)$)

sigue siendo todo igual:

$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$

$C_{XY}(t_1,t_2) = E[(X(t_1)-E[X(t_1)])(Y(t_2)-E[Y(t_2)])]$

Lo que nos ha dicho todo el cuadro anterior, es, básicamente: como un P.A. $X(t)$ nos genera una V.A. para cada t; podemos coger:

V.A. $X(t_0)$ (tema 2) $\longrightarrow$ $F_X(x,t_0)$, $f_X(x,t_0)$ } funciones de probabilidad de orden 1

$m_n(t_0) \to m_2(t_0)$, $m_1(t_0)$

$\mu_n(t_0) - \mu_2(t_0)$

todo funciones que dependen de t_0

2 V.A. $X(t_1)$ y $X(t_2)$ (de un mismo P.A.) y hacer sus momentos conjuntos (tema 3)

$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$, $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ } funciones de probabilidad de orden 2.

$m_{nk}(t_1,t_2) \longrightarrow R_{XX}(t_1,t_2)$ autocorrelación

$\mu_{nk}(t_1,t_2) \longrightarrow C_{XX}(t_1,t_2)$ autocovarianza

2 V.A. $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ (cada una de un P.A. distinto)

y hacer sus momentos conjuntos (tema 3)

$R_{XY}(t_1,t_2)$ correlación cruzada

$C_{XY}(t_1,t_2)$ covarianza cruzada

Procesos aleatorios estacionarios

- Estacionario de primer orden:

$$f_x(x,t) = f_x(x, t+\Delta t) = f_x(x) \ \forall t, \Delta t$$

sus funciones de probabilidad de primer orden no dependen de t $\Longrightarrow$ $E[X(t)] = \overline{X}$ cte

- Estacionario de segundo orden:

$$f_x(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_x(x_1,x_2, t_1+\Delta t, t_2+\Delta t) = f_x(x_1, x_2; \tau)$$

$\tau = t_2 - t_1$

sus funciones de probabilidad de segundo orden sólo dependen de $\tau = t_2 - t_1$ $\Rightarrow$ $R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}(\tau)$

$\hookrightarrow R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

- Estacionario en sentido amplio

sólo exigimos las cosas que en primer y segundo orden eran una mera consecuencia de las condiciones de FD y fdp sobre la media y la autocorrelación

Es una condición más relajada que las de primer y segundo orden

$$\boxed{\text{estacionario en sentido amplio} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} E[X(t)] = \overline{X} \text{ cte} \\ R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}(\tau) \end{array}}$$

para comprobarla, hacer $R_{xx}(t, t+\tau) = \ldots = R_{xx}(\tau)$

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = E\left[X(t)\,X(t+\tau)\right]}$$

estas pequeñas condiciones que no implican a F_x ni f_x son suficientes para asegurar que

> Todas las V.A. producidas por un P.A. estacionario en sentido amplio tienen mismos estadísticos de 1er orden $[E[X], E[X^2], \sigma_x^2]$
> media, valor cuadrático medio, varianza

- Estacionario en sentido estricto:

las funciones de probabilidad de orden N cumplen $f_x(x_1, \ldots; t_1, \ldots) = f_x(x_1, \ldots; t_1+\Delta t, \ldots)$

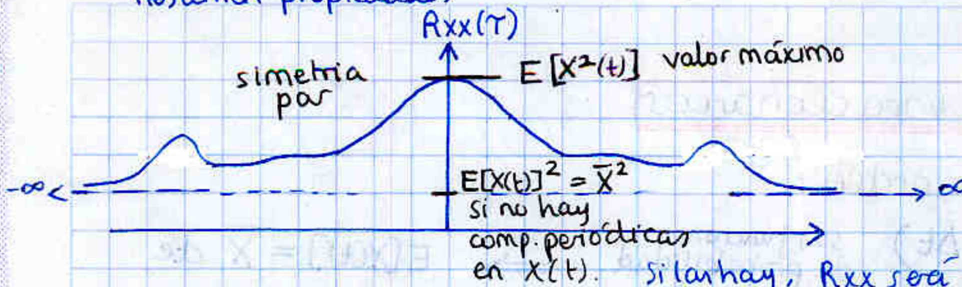
estacionario estricto $\Rightarrow$ estacionario para cualquier orden $k \leq N$

Propiedades de la función de autocorrelación de un P.A. estacionario

- $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$  valor máximo en 0
- $R_{xx}(0) = E[X^2(t)] = \overline{X^2}$ lógico, sabiendo $R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$
- $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ simetría par, lógico si $R_{xx}(\tau)$ sólo depende de la diferencia, que mas da $t_1 - t_2$ o $t_2 - t_1$
- si $X(t)$ no tiene componentes periódicas $\Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} R_{xx}(\tau) = \overline{X}^2 = [E[X(t)]]^2$
- si $X(t)$ tiene componentes periódicas $\Rightarrow R_{xx}(\tau)$ tiene comp. periódicas del mismo periodo

- su TF cumple ciertas cosas relacionadas con potencia G_x que veremos

Resumen propiedades



Si las hay, R_{xx} será también mismo periodo

P.A.'s conjuntamente estacionarios

X(t) e Y(t) son conjuntamente estacionarios $\Longleftrightarrow$

- Cada uno de ellos es estacionario (sentido amplio) $R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}(\tau)$, $R_{yy}(t_1,t_2) = R_{yy}(\tau)$, $E[X(t)] = \bar{X}$, $E[Y(t)] = \bar{Y}$
- $R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$

se cumple:

$$R_{xy}(\tau) = E[X(t)\,Y(t+\tau)]$$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - E[X(t)]E[Y(t)] \text{ (como siempre)}$$

Propiedades de R_{xy}

$$\begin{cases} R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \\ |R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)} \left(= \sqrt{E[X^2(t)]E[Y^2(t)]}\right) \text{ parece lógico} \\ |R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}(R_{xx}(0) + R_{yy}(0)) \text{ el valor medio de ambos} \end{cases}$$

las condiciones: son las mismas que para V.A.'s

- Ortogonalidad: $R_{xy}(\tau) = 0$
- Incorrelación: $R_{xy}(\tau) = \bar{X}\bar{Y}$ $\quad C_{xy}(\tau) = 0$
- Independencia $f_{xy}(\ldots) = f_x(\ldots)f_y(\ldots)$

sólo entre P.A distintos. no existen estas cosas para 2 V.A. que vienen de un mismo P.A.

Independencia $\Longrightarrow$ Incorrelación

$\Longleftarrow$ si son P.A. gausianos

Incorrelación + uno de ellos con media nula $\Longrightarrow$ ortogonalidad

De hecho, lo que es ortogonal/son los P.A's. Es como lo mismo a un nivel más incorrelados/independientes

A veces en enunciados se dice que considere $X(t_1)$ y $X(t_2)$ independientes ya que t_1 está muy separado de t_2.

$t_2 = t_1 + \tau$, $\tau \to \infty$

$$E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = \lim_{\tau\to\infty} R_{xx}(\tau) = \bar{X}^2 = E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

Procesos aleatorios ergódicos

cuando los promedios estadísticos coinciden con los respectivos promedios temporales.   ergódico $\Rightarrow$ estacionario

Valor medio:

- Temporal : $\langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$
- Estadístico : $E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,t)\,dx$

Autocorrelación:

autocorrelación temporal

- Temporal : $\boxed{\rho_x(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$
- Estadística : $R_{XX}(\tau) = E[X(t)\,X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f_X(x_1,x_2;\tau)\,dx_1 dx_2$

Podemos considerar $\langle x(t)\rangle$ una V.A. que depende de la realización concreta por tanto

$E[\langle x(t)\rangle] = E\left[\lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt\right] = \lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X(t)]\,dt$

similarmente

$E[\rho_x(t)] = E[\ldots] = \lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X(t)\,X(t+\tau)]\,dt$

$\xrightarrow[\text{es estacionario}]{\text{si el proceso}}$ $E[X(t)]$ cte, $R_{XX} = E[X(t)X(t+\tau)]$

$E[\langle x(t)\rangle] = \bar{X}$

$E[\rho_x(t)] = R_{XX}(\tau)$

se dice que
$\langle x(t)\rangle$ es un estimador insesgado de $\bar{X}$ si $E[\langle x(t)\rangle] = \bar{X}$
$\rho_x(t)$ es un " " de $R_{XX}(\tau)$ $E[\rho_x(t)] = R_{XX}(\tau)$
} esto ocurre cuando el proceso es estacionario

la media estadística de un P.A. $X(t)$ se podría calcular a partir de la media temporal de cualquiera de sus infinitas realizaciones

se dice que
$\langle x(t)\rangle$ es un estimador consistente de $\bar{X}$ si su varianza es nula $\sigma^2_{\langle x(t)\rangle}$ (o al menos tiende a cero cuando $T\to\infty$)
(no tienen porque cumplirlo los P.A. estacionarios)

para comprobarlo:

$\sigma^2_{\langle x(t)\rangle} = E[\langle x(t)\rangle^2] - \bar{X}^2 = E\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t_1)\,dt_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t_2)\,dt_2\right)\right] - \bar{X}^2$

recuerda
$\boxed{\sigma_X^2 = E[X^2] - \bar{X}^2}$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E[X(t_1)X(t_2)]}_{R_{XX}(t_1,t_2)}\,dt_1 dt_2 - \bar{X}^2 = 0\ ?$

vemos que la varianza de $\langle x(t)\rangle$ depende de un estadístico de 2º orden $(R_{XX}(t_1,t_2))$
en general comprobar la consistencia de un estimador puede llegar a ser complicado ya que intervienen estadísticos de orden doble del que estamos analizando

un P.A. $X(t)$ es ergódico $\Longleftrightarrow$ Todos sus promedios temporales son estimadores insesgados y consistentes de sus respectivos promedios estadísticos

a veces se utiliza $E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)]E[X(t_2)]$ si t_1 y t_2 están muy separados y se puede considerar que las dos V.A. sean ~~[illegible]~~ independientes

ergódico $\Rightarrow$ estacionario

recordatorio: definiciones de correlación

→ <u>2 V.A. X e Y</u> $R_{XY} = m_{11} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}\, dx\, dy$

- si son incorreladas: $R_{XY} = E[X]\cdot E[Y]$

→ <u>2 V.A. $X(t_1)$ $X(t_2)$ de un mismo P.A.</u>

<u>autocorrelación</u>: $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2$

debería llamarse f_{XX}

- si es estacionario: $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

y cumple ciertas propiedades

→ <u>2 V.A. $X(t_1)$ $Y(t_2)$ de dos P.A.</u>

<u>correlación cruzada</u> $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f_{XY}(x_1, y_2; t_1, t_2)\, dx_1 dy_2$

- si son conjuntamente estacionarios:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$

y cumple ciertas propiedades

- Los dos P.A. pueden ser incorrelados entre sí

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = E[X(t)]E[Y(t+\tau)] = \overline{X}\,\overline{Y}$$

TEMA 5. CARACTERISTICAS ESPECTRALES DE LOS P.A.

No se puede calcular TF de un P.A., pero si un espectro de potencia DEP

• Potencia de un P.A

$$x_T(t) \begin{cases} x(t) & -T<t<T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$ señal truncada tomando una determinada realización de X(t)

Energía: x(t) en [-T,T] $\quad E(T) = \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt \overset{\text{T}^{\text{a}}\text{ Parseval}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2\,d\omega$

de la truncada

TF (no confundir con una V.A)

Potencia de x(t) en [-T,T) $\quad P(T) = \frac{1}{2T}\cdot E(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}\,d\omega$

ésta P(T) es en realidad una V.A. según la realización de X(t)

podemos calcular su esperanza $E[P(T)]$

Potencia media de X(t) en [-T,T] $\quad P_X(T) = E[P(T)]$

y podemos hacer el lim $T \to \infty$

Potencia Media del P.A. x(t)

$$P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X^2(t)]\,dt \quad \text{dominio del tiempo}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}\,d\omega \quad \text{dominio frecuencial}$$

P.A estacionario $\Longrightarrow P_X = \overline{X^2} = R_{XX}(0)$ valor cuadrático medio

• Densidad espectral de potencia

podemos interpretar el integrando de P_X en el dominio frecuencial como un espectro de potencia:

Densidad Espectral de Potencia (DEP) $\quad G_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}$

recuerda $X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} X(t)\, e^{-j\omega t}\,dt$

tal que $P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega)\,d\omega$

Propiedades de la DEP:

- $G_X(\omega) \geq 0$ siempre positiva
- $G_X(\omega) = G_X(-\omega)$ es par
- es una función real
- $G_{X'}(\omega) = \omega^2 G_X(\omega)$

nota, en la TF de la variable τ, no t

$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle R_X(t,t+\tau)\rangle e^{-j\omega\tau}\,d\tau$

se cumple:

$$\langle R_{XX}(t,t+\tau)\rangle \overset{TF}{\rightleftarrows} G_X(\omega)$$

promedio temporal de la autocorrelación

si X(t) es estacionario $\langle R_{XX}(t,t+\tau)\rangle = R_{XX}(\tau)$

Teorema de Wiener - Khinchin : $\quad R_{XX}(\tau) \overset{TF}{\rightleftarrows} G_X(\omega)$

- **Densidad espectral de potencia cruzada**

$$\boxed{G_{XY}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[X_T^*(\omega)\ Y_T(\omega)]}{2T}}$$

Potencia media cruzada $\quad P_{XY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega)\, d\omega$

si $W(t) = X(t) + Y(t)$
$X(t)$ e $Y(t)$ conj. estac.

$$\boxed{\begin{aligned} P_W &= R_W(0) \\ &= P_X + P_Y + 2P_{XY} \\ &= R_X(0) + R_Y(0) + 2R_{XY}(0) \end{aligned}}$$

la potencia cruzada (positiva o negativa) nos dice lo que se están acoplando (o molestando mutuamente) las señales.

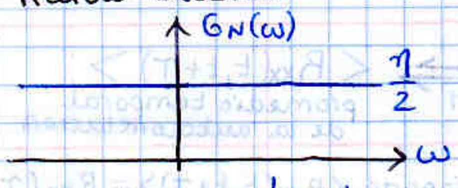
Es la cantidad de potencia añadida o sustraída debido a la correlación de X e Y

Propiedades DEP cruzada

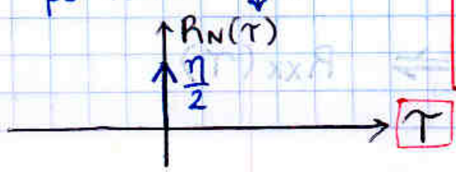
- $G_{XY}(\omega) = G_{YX}(-\omega) = G^*_{YX}(\omega)$
- simetría hermítica: $G_{XY}(\omega) = G^*_{XY}(-\omega)$
  $G_{YX}(\omega) = G^*_{YX}(-\omega)$
  consecuencia: · la parte real es par
  · la parte imaginaria es impar
- $X(t)$ e $Y(t)$ P.A. ortogonales $\longrightarrow G_{XY}(\omega) = 0$
- $X(t)$ e $Y(t)$ P.A. incorrelados $\Longrightarrow G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 2\pi\, \overline{X}\,\overline{Y}\, \delta(\omega)$
- $\langle R_{XY}(t, t+\tau)\rangle \xleftrightarrow{TF} G_{XY}(\omega)$
  promedio temporal de la correlación cruzada
- $X(t)$ e $Y(t)$ conjuntamente estacionarios $\Longrightarrow \boxed{R_{XY}(\tau) \xleftrightarrow{TF} G_{XY}(\omega)}$

- **Ruido** el ruido es un P.A. de media nula.

- Ruido blanco



por tanto $\downarrow TF^{-1}$



$$\boxed{G_N(\omega) = \frac{\eta}{2}}$$

DEP constante para todas las frecuencias.

$P_N = \infty = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G\, d\omega$

$$\boxed{R_{NN}(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)}$$

- Ruido blanco gaussiano

fdp es gaussiana
como la media es nula
$C_{NN}(\tau) = R_{NN}(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$

recuerda que en gaussiana
incorrelación $\Longleftrightarrow$ independientes

TEMA 6. SISTEMAS LINEALES CON ENTRADAS ALEATORIAS

trabajamos con sistemas lineales, invariantes y estables.

$$x(t),\ X(\omega) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega)\end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) = h(t) * x(t) \\ Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(t)\end{matrix}$$

recuerda

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

- **Respuesta de los SLI a Entradas Aleatorias**

A partir de ahora siempre supondremos $X(t)$ un proceso estacionario

- Media

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) X(t-\lambda) d\lambda\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \underbrace{E[X(t-\lambda)]}_{\substack{\text{si es estacionario} \\ = \bar{X}}} d\lambda$$

$$\boxed{\bar{Y} = \bar{X} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, d\lambda}$$ media constante

- Valor cuadrático medio

muy típico para demostrar cosas en SLI

$$\boxed{E[Y^2(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) X(t-\lambda_1) d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) X(t-\lambda_2)\, d\lambda_2\right]}$$

típico, al multiplicar dos cosas iguales cuidado: hay que utilizar variables mudas distintas.

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E[X(t-\lambda_1)X(t-\lambda_2)]}_{R_{XX}(\lambda_1-\lambda_2)}\, h(\lambda_1)h(\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

$$\boxed{\overline{Y^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\lambda_1-\lambda_2)\, h(\lambda_1)h(\lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2}$$ valor cuadrático medio constante

- Autocorrelación de la salida

$$R_{YY}(t,t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) X(t-\lambda_1) d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) X(t+\tau-\lambda_2)\, d\lambda_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E[X(t-\lambda_1)\cdot X(t+\tau-\lambda_2)]}_{R_{XX}(\tau+\lambda_1-\lambda_2)}\, h(\lambda_1)h(\lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\, h(\lambda_1)h(\lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)\end{aligned}}$$

autocorrelación depende de τ

$x(t)$ estacionario a la entrada SLI $\Longrightarrow$ $y(t)$ a la salida también estacionario

- Correlación cruzada entrada-salida

$$R_{XY}(t,t+\tau) = \ldots = \boxed{R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)}$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

correlación cruzada sólo depende de τ

$x(t)$ estacionario a la entrada SLI $\Longrightarrow$ $y(t)$ y $x(t)$ son conjuntamente estacionarios

- DEP de la salida de un SLI

aplicando que las convoluciones en el tiempo son multiplicaciones en la frecuencia

$$G_Y(\omega) = TF[R_{YY}(\tau)] = TF[R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)] = G_X(\omega)\cdot H(\omega)\cdot H^*(\omega)$$

$$\boxed{G_Y(\omega) = G_X(\omega)\cdot |H(\omega)|^2} \qquad P_Y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{G_X(\omega)\,|H(\omega)|^2}_{G_Y(\omega)}d\omega$$

- DEP cruzada entrada-salida de un SLI

$$G_{XY}(\omega) = TF[R_{XY}(\tau)] = G_X(\omega)H(\omega)$$

$$G_{YX}(\omega) = TF[R_{YX}(\tau)] = G_X(\omega)\,H^*(\omega)$$

Ruido blanco en la entrada

recordemos: DEP para ruido blanco $G_N(\omega) = \frac{\eta}{2}$

por tanto, la salida de un SLI con ruido blanco a la entrada:

$$\boxed{G_Y(\omega) = \frac{\eta}{2}|H(\omega)|^2} \qquad P_Y = \frac{\eta}{2\pi}\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega$$

$|H(\omega)|^2$ es par

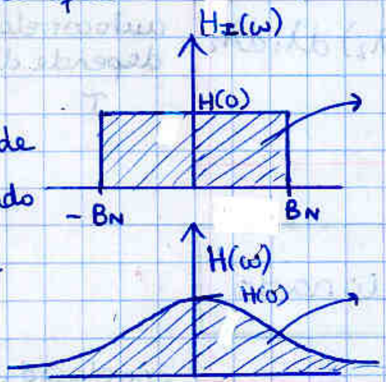
a la salida se obtienen las mismas características espectrales que tiene el S.L.I.

↳ esto se utiliza para medir el ancho de banda equivalente

Ancho de banda equivalente:

La anchura que tendría un $H_Z(\omega)$ del tipo

que a la salida tuviera la misma potencia que el sistema que queremos estudiar cuando a la entrada hay ruido blanco



el área de H elevada al cuadrado será la misma

$$P_{Y'} = \frac{\eta}{2\pi}\int_0^{B_N}|H(0)|^2\, d\omega$$

por ser par

$$P_Y = \frac{\eta}{2\pi}\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2\, d\omega$$

$$P_{Y'} = P_Y$$

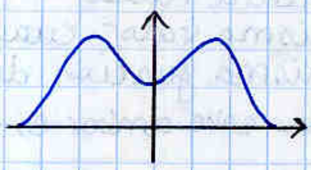
$$|H(0)|^2 B_n = \int_0^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega$$

$$\boxed{B_n = \frac{\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega}{|H(0)|^2}}$$

(para un filtro paso bajo)

Procesos aleatorios Paso Banda

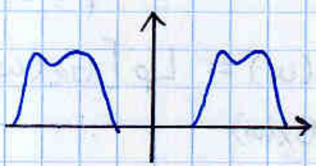
Paso bajo: espectro centrado alrededor de $\omega = 0$



Paso banda: espectro centrado en torno a $\omega > 0$. Su ancho de banda no incluye $\omega = 0$

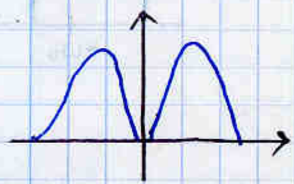
Banda estrecha: Ancho de banda W mucho menor que su frecuencia central ω_0

Banda ancha: No cumple ser banda estrecha

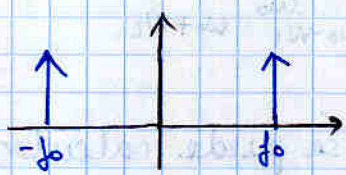


ambigüedades:

- Canal de voz está entre 300 Hz y 4 kHz. Aunque no toca el cero, se considera paso bajo.



- Sinusoide de frecuencia f_0 podría considerarse paso bajo o paso banda.
- En cualquier caso, es de banda estrecha



deltas en f_0 y $-f_0$

Representación de proceso aleatorio paso banda

$$\boxed{X(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))}$$

$A(t)$ es P.A. ≥ 0 ≡ envolvente de $X(t)$

$\varphi(t)$ es P.A. ≡ desviación instantánea de fase de $X(t)$

Otra forma común de representación de un proceso paso banda es

$$\boxed{X(t) = X_c(t)\cos(\omega_0 t) - X_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}$$

$X_c(t)$ es P.A ≡ componente en fase de $X(t)$

$X_s(t)$ es P.A. ≡ componente en cuadratura de $X(t)$

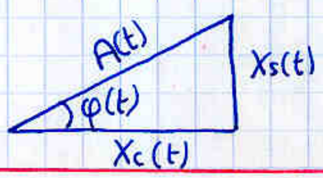
se cumple

$$A(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \arctan \frac{X_s(t)}{X_c(t)}$$

$$X_c(t) = A(t)\cos(\varphi(t))$$

$$X_s(t) = A(t)\,\mathrm{sen}(\varphi(t))$$



$X_c(t)$ y $X_s(t)$ se suelen llamar componentes paso bajo.

Propiedades de las componentes en fase y en cuadratura de un P.A. paso banda

- $X_c(t)$ y $X_s(t)$ procesos conjuntamente estacionarios
- Ambos tienen media nula
- Ambos tienen mismo valor cuadrático = al de $X(t)$
- Ambos tienen misma función de autocorrelación $R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau)$
- Correlación cruzada entre ambos es impar y cumple:

$$R_{X_cX_s}(\tau) = -R_{X_sX_c}(\tau) = -R_{X_cX_s}(-\tau)$$

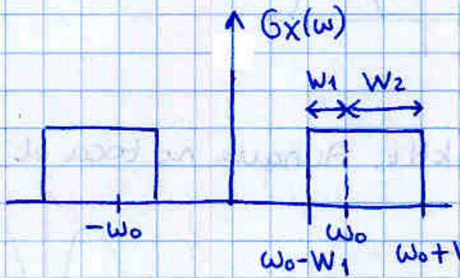
- Correlación cruzada en $\tau = 0$ es nula

$$R_{X_cX_s}(0) = 0 = E[X_c(t)X_s(t)]$$

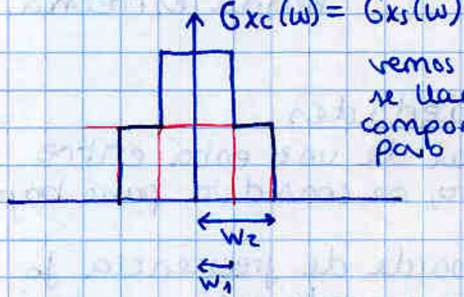
- se puede calcular sus DEP a partir de la de $X(t)$

veamos como: nota $L_p[\cdot]$ significa "la parte paso bajo" (Low-pass)

$$G_{X_c}(\omega) = G_{X_s}(\omega) = L_p[G_X(\omega-\omega_0) + G_X(\omega+\omega_0)]$$



$\Rightarrow$



vemos porque se llaman componentes paso bajo.

- La DEP cruzada se puede calcular

$$G_{X_cX_s}(\omega) = -G_{X_sX_c}(\omega) = j\,L_p[G_X(\omega-\omega_0) - G_X(\omega+\omega_0)]$$