

Propiedades de los SLI

- Sistema Identidad: $h(t) = \delta(t)$ $x(t) \rightarrow \square \rightarrow x(t)$
- Sistema Inverso: $h(t) = \delta(t - t_0)$ $x(t) \rightarrow \square \rightarrow x(t - t_0)$
- Amplificador / Atenuador: $h(t) = k \cdot \delta(t)$ $x(t) \rightarrow \square \rightarrow k \cdot x(t)$
- Sistema causal: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- Sistema Inverso / Sistema Inverso

ETSI Telecomunicación

Sistemas

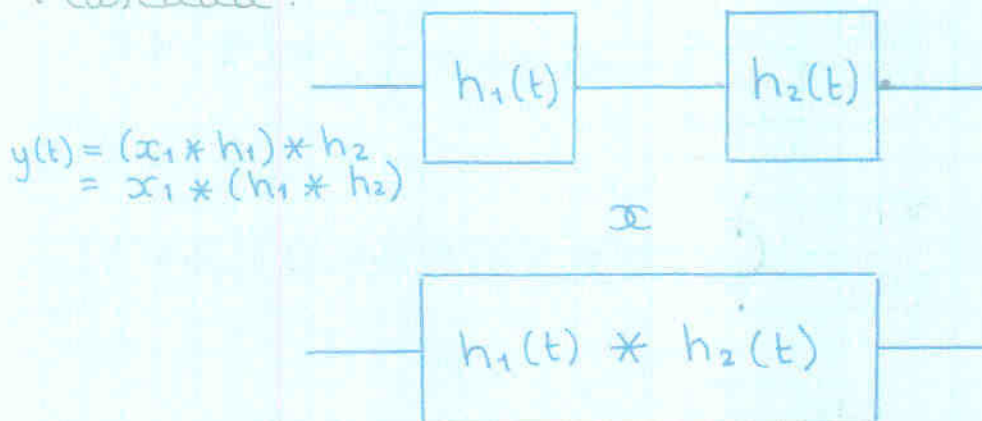
Lineales I

ejemplo:

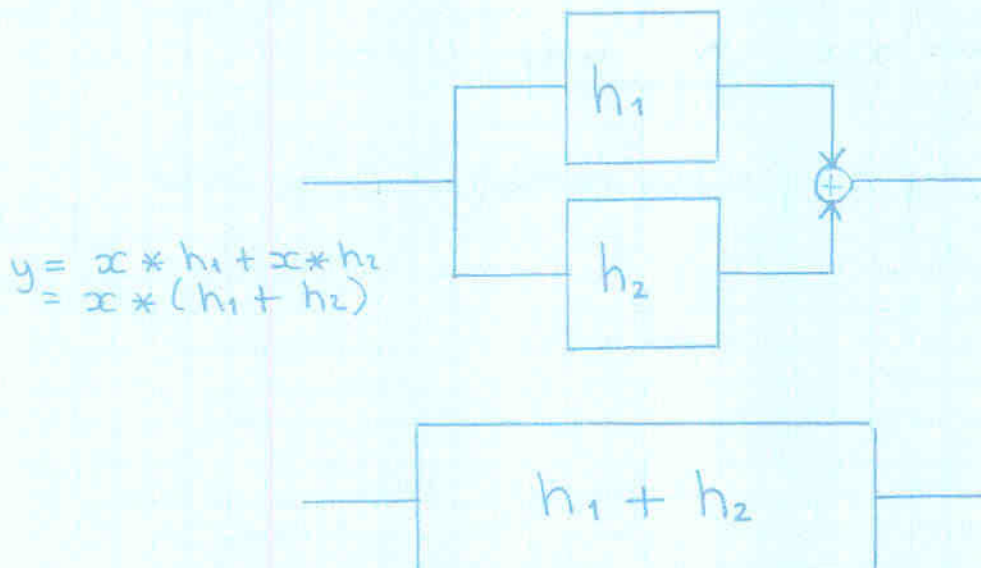
- Sistema encabellado: $x(t) * \delta(t + t_0) = x(t)$

Asociación de sistemas

• cascada:



• paralelo



Sistemas Lineales I

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 2º curso
Curso 2004/2005

Contenido

- Referencia rápida
- Apuntes de la asignatura.

Fecha de última actualización: 28 Agosto 2007

Sistemas Lineales I - Referencia Rápida

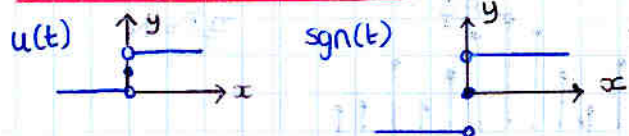
TEMA 1. Señales

Energía: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

Potencia media: $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

- señales definidas en energía: $E < \infty, P = 0$
- definidas en potencia: $E = \infty, P > 0$

Señales elementales



$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

se anula en $t = 1, 2, 3, \dots$
 $\text{sinc}(0) \rightarrow 1$

$\frac{1}{2} \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t} = 5 \text{sinc}(10t)$
 $\uparrow \sin \pi$

sampling
 $S_a(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)$

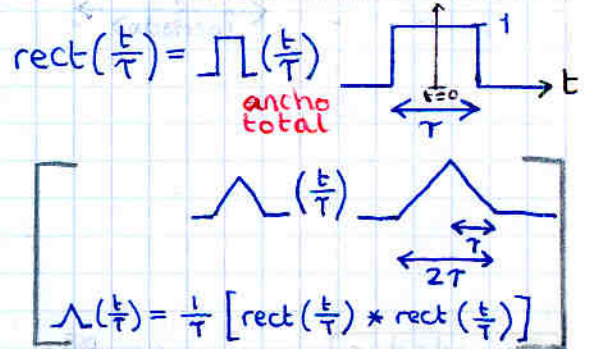
Periódicas: $x(t) = x(t+T)$
 Pares: (simétrica) $x(t) = x(-t)$
 Impares: (antisimétrica) $x(t) = -x(-t)$
 descomposición en parte par $x_e = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$ e impar $x_o = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$
 $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

Transformaciones:

- Desplazamiento: $x(t) \rightarrow x(t-t_0)$
- Reflexión: $x(t) \rightarrow x(-t)$
- Escala temporal: $x(t) \rightarrow x(at)$

$a > 1 \rightarrow$ comprimimos
 $a < 1, b = 1/a \rightarrow$ expandimos

$x(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}) = x(\frac{2}{3}(-1(t-2))) = x(t_2)$
 si despejas t como $f(t_2)$ verás los cambios que sufre $x(t)$



TEMA 2. Sistemas Continuos

- Lineal: $\alpha x_1 + \beta x_2 \rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$
- Invariante: $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$
- con memoria: $y(t_0)$ depende de $x(t_0)$ y/o $x(t) \neq t_0$
 - causal: solo $t \leq t_0$
 - anticausal: solo $t \geq t_0$

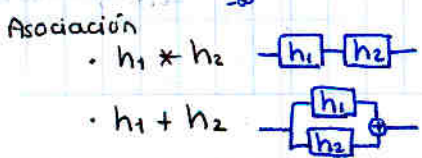
Respuesta al impulso

como $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$
 $y(t) = L[x(t)] = x(t) * \underbrace{L[\delta(t)]}_{h(t)}$

$y(t) = x(t) * h(t)$

Propiedades

- Identidad: $h(t) = \delta(t)$
- Retardador: $h(t) = \delta(t-t_0)$
- Amplificador: $h(t) = k \delta(t)$
- Causal: $h(t < 0) = 0$
- Invertible: $h(t) * h_2(t) = \delta(t)$
- Estable: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$



- invertible: podemos calcular sistema inverso $h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$
- estable (BIBO): $|x| < B_1 \rightarrow |y| < B_2$

Convolución:

$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$
 área bajo la multiplicación de $x(\tau)$ y $y(\tau)$ reflejado y trasladado a t .

convolución con δ
 $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

para señales periódicas
 $= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle}$
 el resultado en t_0 periódico del mismo periodo

Correlación cruzada

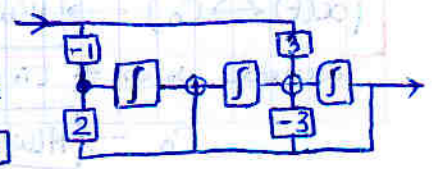
$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t) y(\tau) d\tau$
 $R_{xy}(t) = R_{yx}(-t)$

Autocorrelación:

$R_x(t) = R_{xx}(t)$
 $R_x(0) = \text{Energía}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$
 $R_x(t) \leq R_x(0)$
 $R_z = R_x + R_y + R_{xy} + R_{yx} \quad (z = x + y)$

Aplicación a ecs dif:

$y''' + 3y'' - y' - 2y = 3x'' - x \xrightarrow{D^3}$
 $y + 30y' - D^2y - 20^3y = 3D^3x - D^3x$
 $y = D^3[2y-x] + D^2[y] + D^1[-3y+3x]$



TEMA 3 - Series de Fourier

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn \frac{2\pi}{T} t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

Condiciones de Dirichlet: $\exists$ DSF si:

- ser absolutamente integrable
- tener n° finito discontinuidades
- tener n° finito de máximos y mínimos

$x(t)$ real

si $x(t)$ es real:

$$C_n^* = C_{-n} \quad \left\{ \begin{array}{l} |C_{-n}| = |C_n| \\ \angle C_n = -\angle C_{-n} \end{array} \right.$$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t)$$

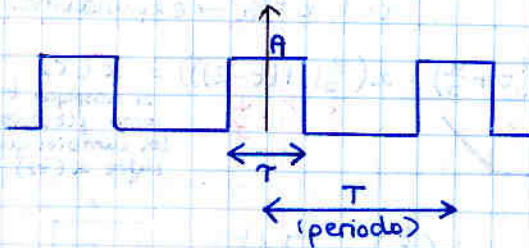
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cos(\frac{2\pi}{T} nt) dt = 2 \operatorname{Re}\{C_n\}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sin(\frac{2\pi}{T} nt) dt = -2 \operatorname{Im}\{C_n\}$$

en discontinuidades: $\hat{x}(t_0) = [x(t_0^+) + x(t_0^-)] \frac{1}{2}$

si $x(t)$ es par, solo hay a_n
impar, solo b_n

Señal cuadrada

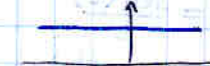


$$C_n = A \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}(n \frac{\tau}{T})$$

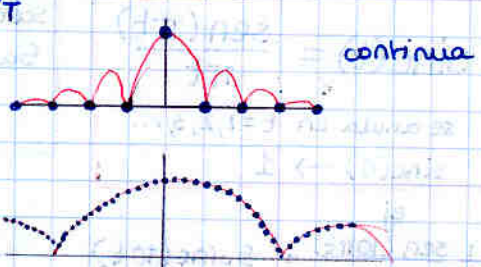
$$C_0 = A \frac{\tau}{T}$$

se anula en $\frac{n\tau}{T} = N$

si $\tau = T$



si $\tau \leq T$



Propiedades

Sea $x(t) \leftrightarrow \alpha_n$
 $y(t) \leftrightarrow \beta_n$

- linealidad
- producto
- convolucion
- desplaz. temp.
- desplaz. freq.

$$k_1 x(t) + k_2 y(t) \leftrightarrow k_1 \alpha_n + k_2 \beta_n$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{t-m} \alpha_m$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow \alpha_n \cdot \beta_n$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow \beta_n \cdot e^{-jn \frac{2\pi}{T} t_0}$$

$$x(t) \cdot e^{jn_0 \frac{2\pi}{T} t} \leftrightarrow \beta_{n-n_0}$$

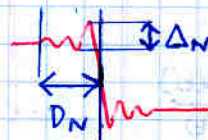
Teorema Parseval

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot y^*(t) dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \beta_n^*$$

en particular $y(t) = x(t)$

$$\operatorname{Pot}_{x(t)} = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2$$

Fenómeno de Gibbs (DSF discontin.)



al aumentar N
disminuye D_N
pero no Δ_N

Respuesta en frecuencia

$$h(t) \xleftrightarrow{TF} H(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau$$

SLI con entradas periódicas

Caso Básico

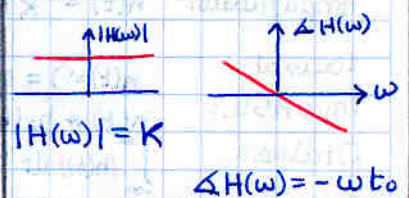
$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{H(\omega)} y(t) = e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) = |H(\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \angle H(\omega_0))}$$

cuando $x(t)$ es una suma de 'casos básicos' $x(t) = \sum C_n e^{j\omega_0 n t}$

Sistema sin distorsión

$$y(t) = K x(t - t_0)$$

$$H(\omega) = K e^{-j\omega t_0}$$



$$(x(t) \leftrightarrow C_n) \xrightarrow{H(\omega)} (y(t) \leftrightarrow C_n \cdot H(n\omega_0))$$

recuerda ω_0 es $\frac{2\pi}{T_0}$ (T_0 es el periodo de $x(t)$)

$$C_n \xrightarrow{H(\omega)} C_n H(n\omega_0)$$

TEMA 4- Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

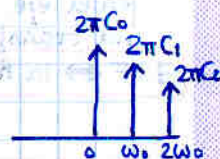
Condiciones existencia

- abs integrable
- nº finito discontinuidades
- nº finito máximos y mínimos

TF de una señal periódica:

$$x(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$$

siendo C_n los coef del DSF



$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

propiedad retardo en t

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad a > 0$$

Propiedad retardo en t (el signo cambia)

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{j}{2} \delta(\omega + \omega_0)$$

es como si en el DSF T fuera 2π y se dividiera la expresión por 2π

1 tono son 2 δ

Dualidad:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi \cdot x(-\omega)$$

Propiedades

linealidad:

(como siempre)

simetría:

$$x(t) \text{ real} \Rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega)$$

$$x(t) \text{ real y par} \Rightarrow X(\omega) \text{ real y par}$$

desplaz temp:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

escalado temp:

$$x(kt) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

uno se comprime, el otro se expande

derivación:

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

enfatura altas frecuencias

integración:

$$\int_{-\infty}^x x(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

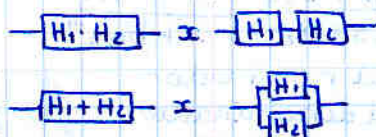
nivel de continua

convolución:

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

agrupación de sistemas:

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * Y(\omega)]$$



Densidad Espectral de Energía

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$$

Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot Y^*(\omega) d\omega$$

en particular $x(t) = y(t)$

$$\text{Energía} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Aplicación a sistemas

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Modulación:

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * 2\pi \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Retardo grupo / fase

Principio de incertidumbre

T: medida de la duración temporal $T \cdot B \geq \text{cte}$

B: medida del ancho de banda

Ancho de banda RMS

$$B = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |x|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 d\omega} \right]^{1/2} \quad T = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dt} \right]^{1/2} \quad \text{cte} = 1$$

Ancho de banda equivalente

$$B = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |x|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 d\omega} \quad T = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |x|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dt} \quad \text{cte} = 2\pi$$

TEMA 5: Transformada de Laplace

Bilateral:

$$TL_B[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= TF[e^{-st} \cdot x(t)]$$

para $t < 0$, esto agranda la señal

la TL en $\sigma=0$, es decir, en el eje $j\omega$, es justamente la Transformada de Fourier

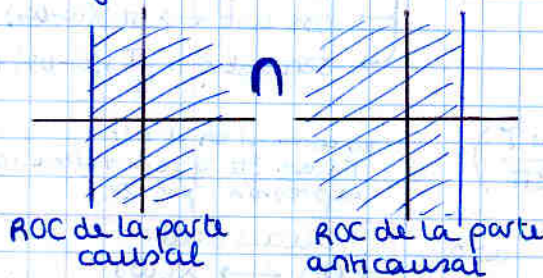
$\exists TF \leftrightarrow$ la ROC incluye $j\omega \leftrightarrow$ sistema estable

$$TL_B[x(t)] = TL[x(t) \cdot u(t)] + TL[x(-t)u(t)]_{s \rightarrow -s}$$

si $x(t)$ es causal $\Rightarrow TL_B[x(t)] = TL[x(t)] = TF[e^{-st} x(t)]$

Region de convergencia (ROC): región del plano s donde TL converge

• señal genérica

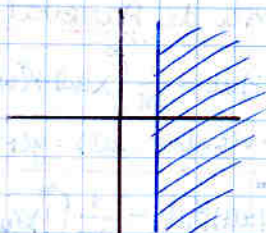


ROC de señal genérica.

Intersección de la parte causal y anticausal

si no imponemos causalidad, dos señales pueden tener misma TLB y sólo distinguirse en la ROC

ROC de señal causal



$$e^{+at} \cdot u(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{s-a}$$

$$ROC: Re(s) > a$$

+a será un polo

$$u(t) \cdot \frac{2}{3}(e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}) \leftrightarrow \frac{2}{3}(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}) \quad ROC: Re(s) > -1 \text{ (la mayor de las } a\text{'s)}$$

Propiedades

• Linealidad:

Desplaz en t: $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-s t_0} X(s)$

Escalado en t: $x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X(s/\alpha)$

Desplazamiento en s: $e^{+s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s-s_0)$

un caso signo distinto

Integración en t: $\int_0^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$

Derivación en t: $x'(t) \leftrightarrow sX(s) - X(0)$

Derivación en s: $(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$

cuando se actúa en s el signo de la derivada cambia en t

Convolución: $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s) \cdot H(s)$

Teorema del valor inicial/final

$$x(s) = \frac{s \cdot X(s)}{s \rightarrow 0^+} \quad s \rightarrow \infty$$

$$x(s) = \frac{s \cdot X(s)}{s \rightarrow \infty} \quad s \rightarrow 0$$

el 0 DEBE estar en la ROC, sino el resultado será erróneo.

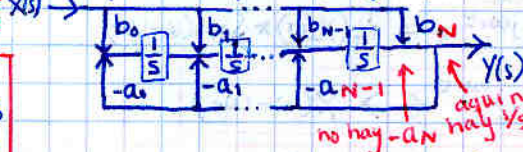
T.L. racionales:

$$X(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

ceros: raíces del numerador

polos: raíces del denominador

los polos delimitan la ROC se pueden implementar fácil



ROC si $x(t)$ causal
Causal: $Re(s_{polo}) < \dots$
Anticausal: $Re(s_{polo}) > \dots$

TL inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

o dentro de la ROC

otro método:

TL racional $\rightarrow$ descomposición en fracciones simples (factorizar denominador)

$$X(s) = \frac{5s+3}{(s-2)(s+3)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

$$A_i = X(s) \cdot (s-p_i)_{s=p_i} \xrightarrow{TL^{-1}} A_i e^{p_i t} + \dots$$

SLI de ecs. dif (C.I. nulas)

$$(\sum a_i D_i) y(t) = (\sum b_i D_i) x(t)$$

aplicando TL

$$\sum a_i s^i Y(s) = \sum b_i s^i X(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$$

es una T.L. racional fácilmente implementable

TEMA 1. SEÑALES

- Concepto: se definen matemáticamente como una función de una o más variables.
- Clasificación de las señales según variable indep.
 - Unidimensionales / Multidimensionales
 - Continuas / Discretas
- Señales periódicas

$$x(t) = x(t + nT) \quad n \in \mathbb{Z}$$

T : periodo fundamental

ejemplo: ¿es la suma de dos señales periódicas también periódica?

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

$$z(t+T) = ax(t+T) + by(t+T)$$

sabiendo $x(t) = x(t + nT_1)$
 $y(t) = y(t + mT_2)$

$$z(t+T) = ax(t + nT_1) + by(t + mT_2)$$

$$T = nT_1 = mT_2$$

$$\text{condición: } \frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$$

Energía y potencia

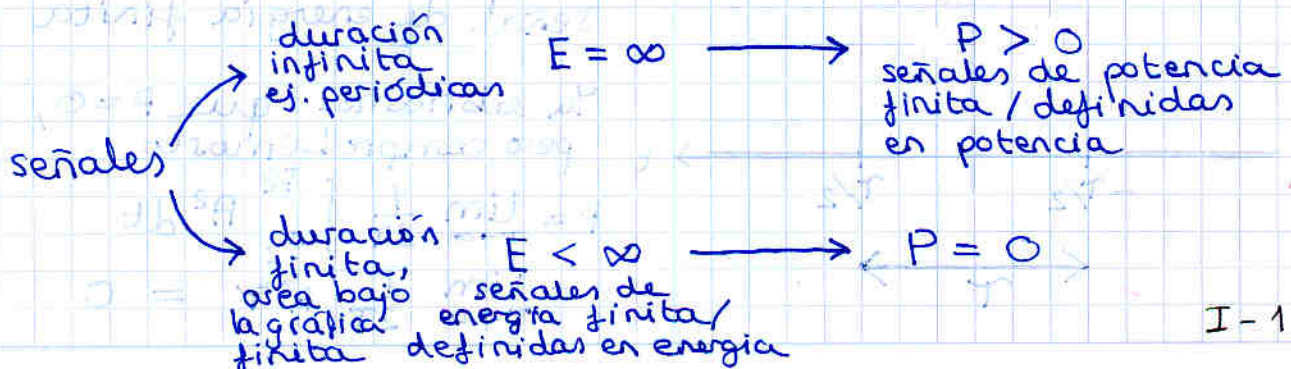
Energía:
Total

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$|x(t)|^2 \equiv$ potencia instantánea

Potencia:
Media

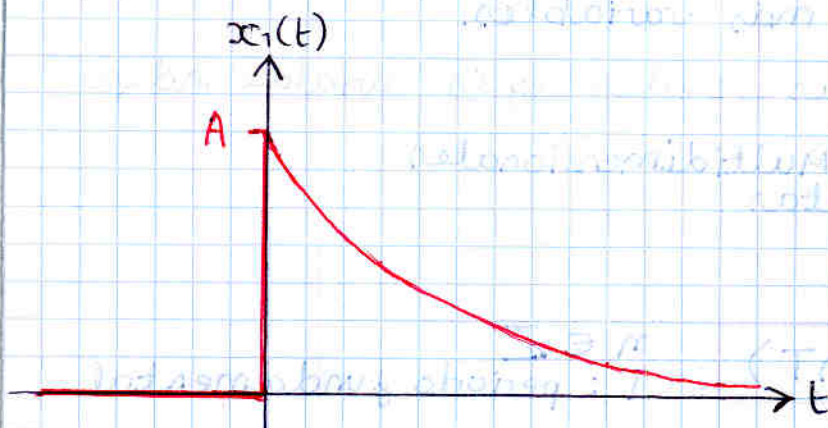
$$P = \lim_{2T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$



ejercicio:

Calcular energía y potencia de:

$$a) x_1(t) = \begin{cases} A \cdot \exp(-t) & t > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$E = \int_0^{\infty} A^2 \exp(-2t) dt = \frac{A^2}{2} \quad \text{señal de energía finita}$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T A^2 \exp(-2t) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{A^2}{-2} [\exp(-2T) - 1] = 0$$

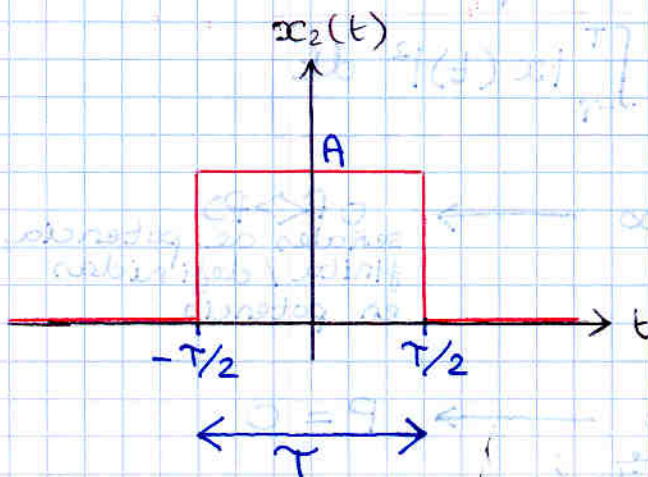
$$b) x_2(t) = \begin{cases} A & |t| < T/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

esta señal, llamada pulso rectangular de ancho T , se abrevia como:

$$x_2(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

rect de rectangular
 indica la variable indep.
 No es una división
 ancho TOTAL

$$= A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$E = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 T$$

señal de energía finita

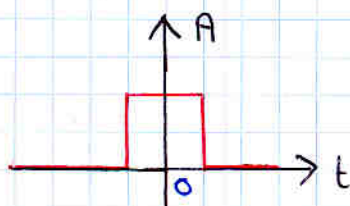
Ya sabíamos que $P=0$, pero comprobémoslo

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt$$

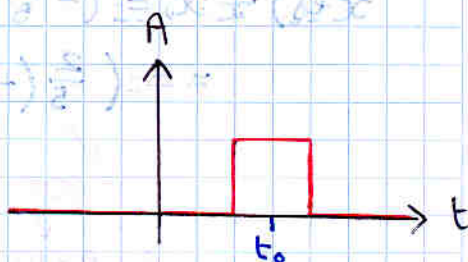
$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} A^2 T = 0$$

Transformaciones de la variable independiente

• Desplazamiento en el tiempo



$$x(t) \rightarrow x(t - t_0)$$



• Reflexión

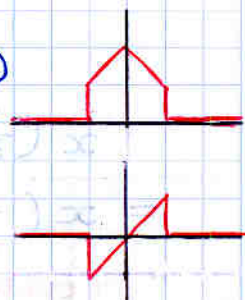


$$x(t) \rightarrow x(-t)$$



Permite clasificar:

- Señales pares / simétricas: $x(t) = x(-t)$
- Señales impares / antisimétricas: $x(t) = -x(-t)$



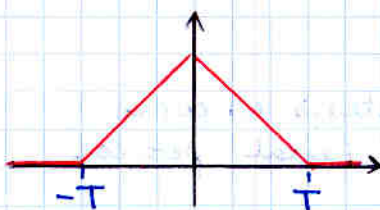
Cualquier señal puede ser descompuesta como una señal simétrica + otra antisimétrica

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

• Cambio de escala temporal

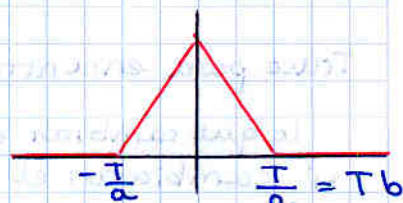


$$x(t) \rightarrow x(at)$$

si $a < 1$
se usa:

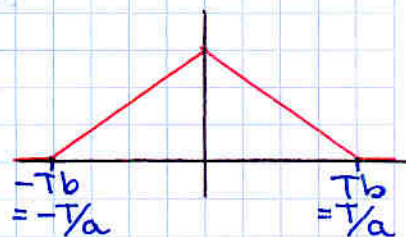
$$\rightarrow x\left(\frac{t}{b}\right)$$

$$(b = \frac{1}{a})$$



$a > 1 \Rightarrow$ comprimimos

$a < 1 \Rightarrow (b = \frac{1}{a})$ expandimos



Orden de las transformaciones

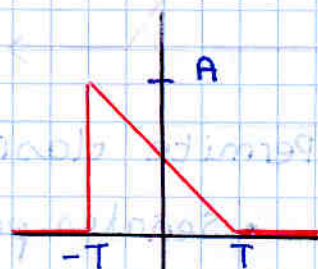
Hay que aplicar las transformaciones desde fuera hacia dentro

$$x(t) \rightarrow x\left(-\frac{2}{5}t + \frac{4}{5}\right)$$
$$= x\left(\frac{2}{5}(-1(t-2))\right)$$

1. Escala temporal $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{5}{2} = 2.5$ ensanche
2. Reflexión
3. Traslación

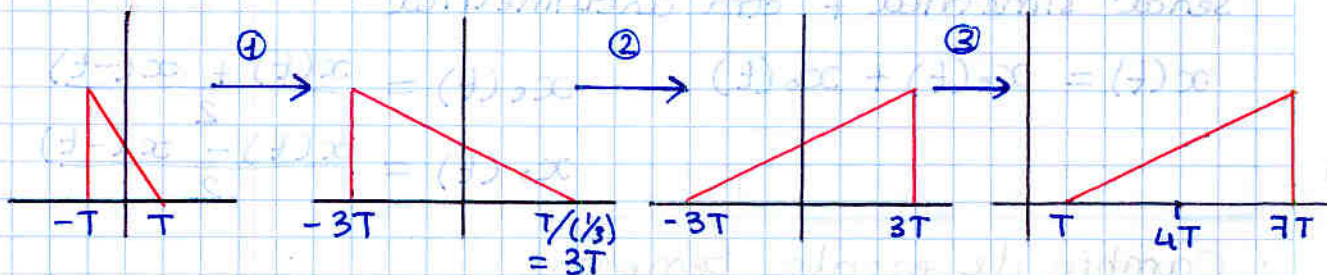
Ejercicio

Dibujar $x\left(\frac{1}{3}(-t + 5T)\right)$ siendo $x(t)$



$$x\left(\frac{1}{3}(-t + 4T)\right)$$
$$= x\left(\frac{1}{3}(-1(t - 4T))\right)$$

1. Escala Temporal
2. Reflexión
3. desplaz.



Truco para encontrarle la lógica:

lo que cambias al hacer cosas dentro del parentesis es como si cambiaras el eje x dejando la función igual pero con un nuevo eje.

$$x\left(\frac{2}{5}(-1(t-2))\right) = x(\tau)$$

↑
nuevo eje

$$\frac{2}{5}(-1(t-2)) = \tau$$

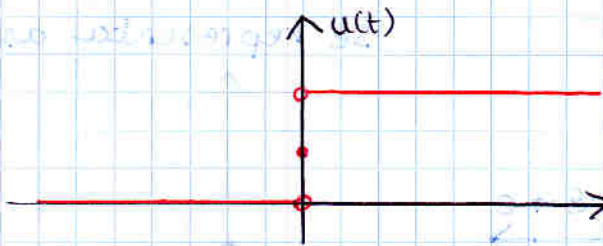
en τ , la función es la inicial pero en t ha sufrido una serie de cambios.

$$t = -\frac{5}{2}\tau + 2$$

2 1 3

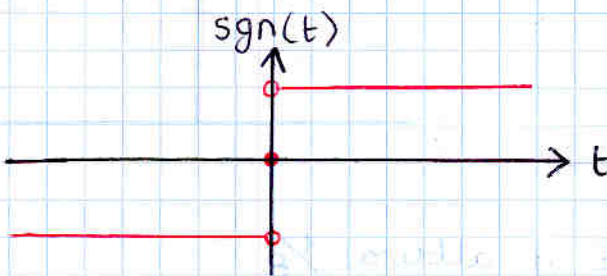
Señales elementales

• Escalón unidad



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

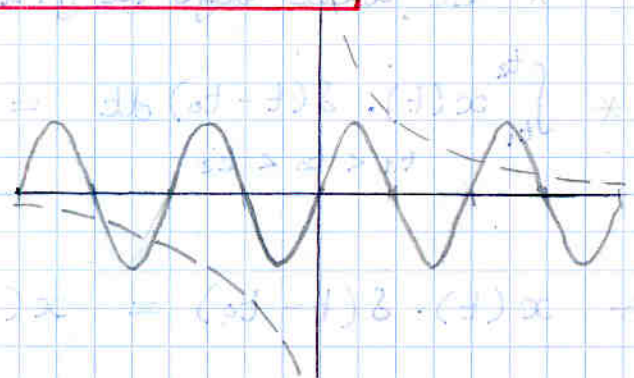
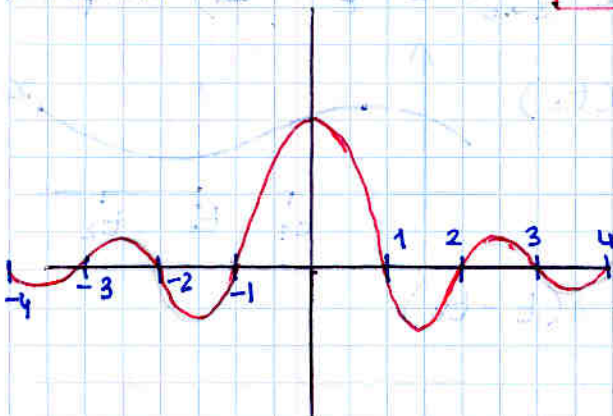
• Función signo



$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

• Función sinc

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t}$$



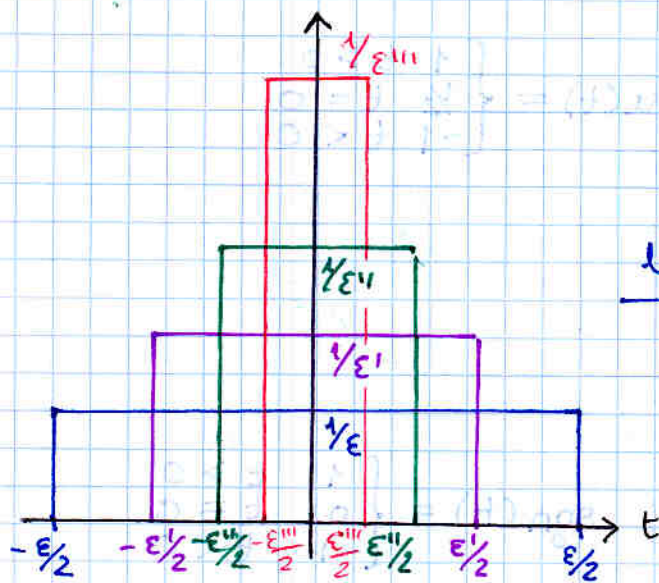
$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc}(t) = \left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{\text{L'H}} \frac{\pi \cos \pi t}{\pi} = 1$$

• Función sampling

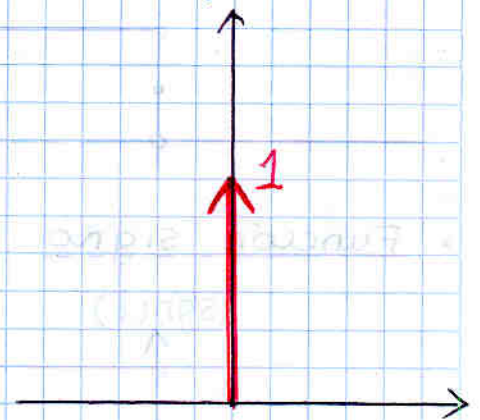
$$\text{sa}(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

• Impulso unidad o función delta (delta de Dirac)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \square\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$



Se representa así

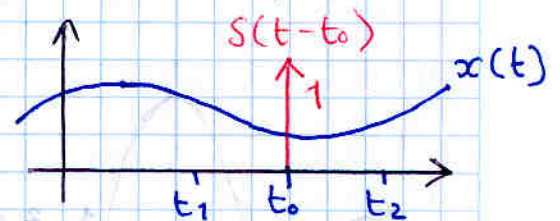


señal rectangular de anchura ε y altura $1/\varepsilon$

Propiedades:

* El área bajo la gráfica ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$) siempre es uno

$$* \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad t_1 < t_0 < t_2$$



$$* x(t) \cdot \delta(t - t_0) = \underline{x(t_0)} \cdot \delta(t - t_0)$$

una cte
en todos los demás puntos,
multiplicada por cero.

$x(t)$ queda

$$* \delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

$$* \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t) \quad \leftarrow \text{LÓGICO}$$

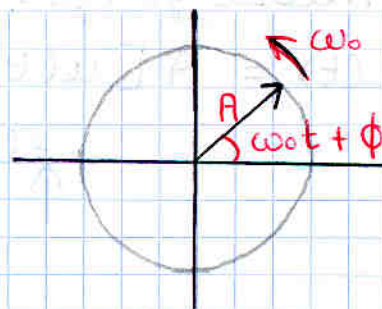
$\uparrow$ escalón
unidad

salvo para $t=0$

• Sinusoide compleja

$$z(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

A : cte real. Amplitud
 ω_0 : pulsación (rad/s)
 ϕ : fase inicial



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\{z(t)\} &= x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \operatorname{Im}\{z(t)\} &= y(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \right\} \text{ sinusoides reales}$$

$$\text{Periodo } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Potencia de la sinusoide compleja

$$P_z = \frac{1}{T} \int_0^T |z(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt$$

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &= A^2 |e^{j(\omega_0 t + \phi)}| \\ &= A^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

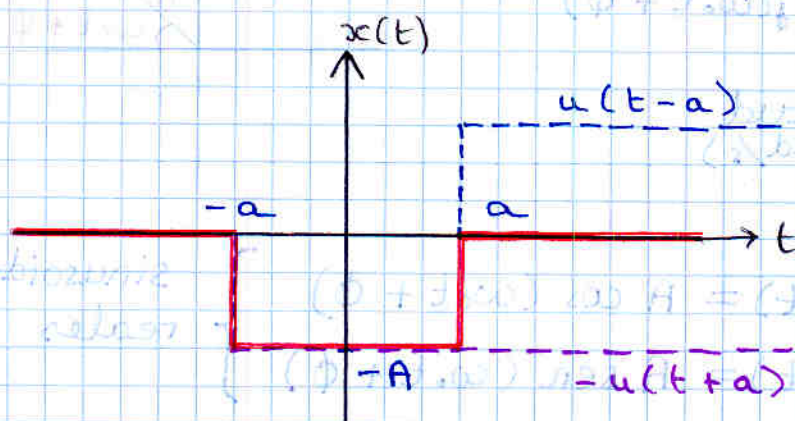
$$\boxed{P_z = A^2} \text{ señal de potencia media finita}$$

$$\text{ademas } \boxed{P_{x(t)} = \frac{A^2}{2} \quad P_{y(t)} = \frac{A^2}{2}}$$

la potencia de la sinusoide compleja se reparte entre las dos sinusoides reales

Ejercicio: ¿son las siguientes señales de potencia media finita?

a) $x(t) = A [u(t-a) - u(t+a)]$



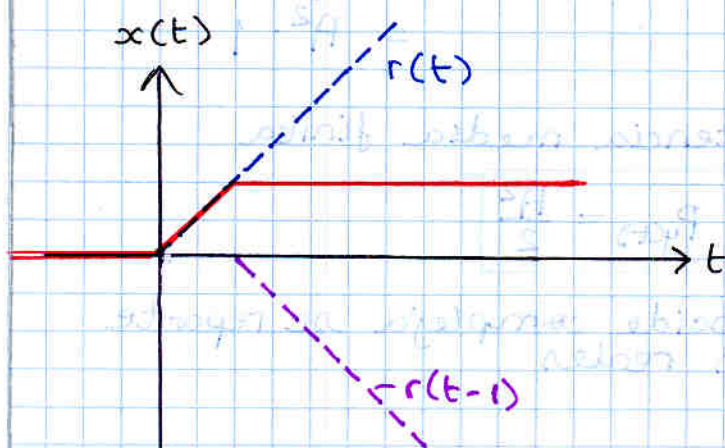
Al ser de duración finita $\rightarrow$ Energía finita

$$E = \int_{-a}^a A^2 dt = 2aA^2$$

b) $x(t) = r(t) - r(t-1)$

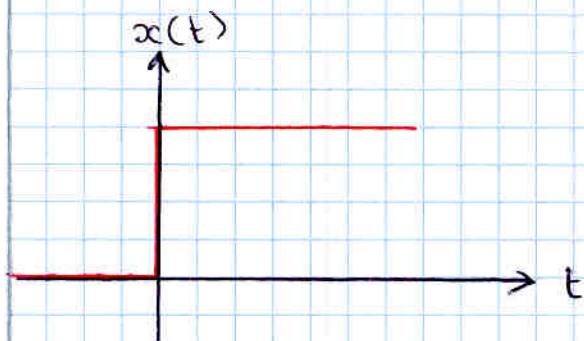
$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$\uparrow$ función rampa



$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_0^1 t^2 dt + \int_1^T 1^2 dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{3} + (T-1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) $x(t) = u(t)$



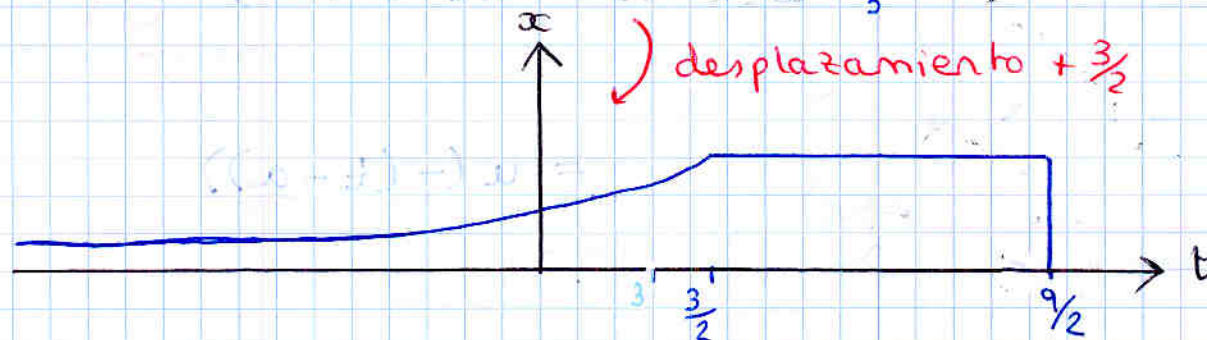
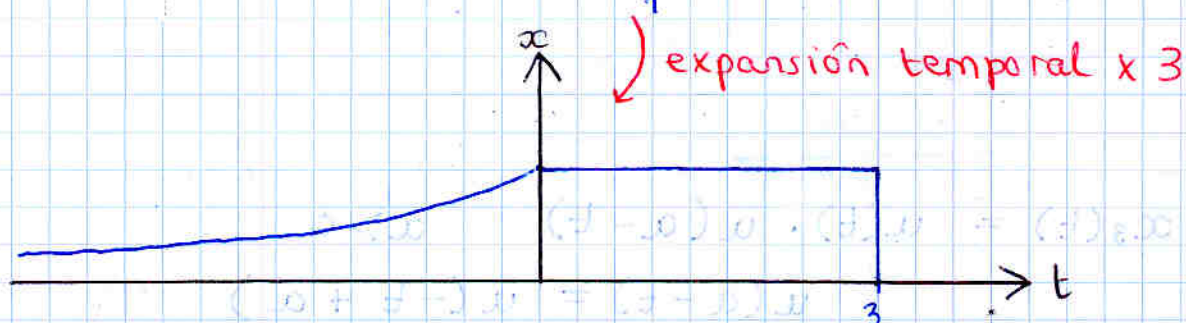
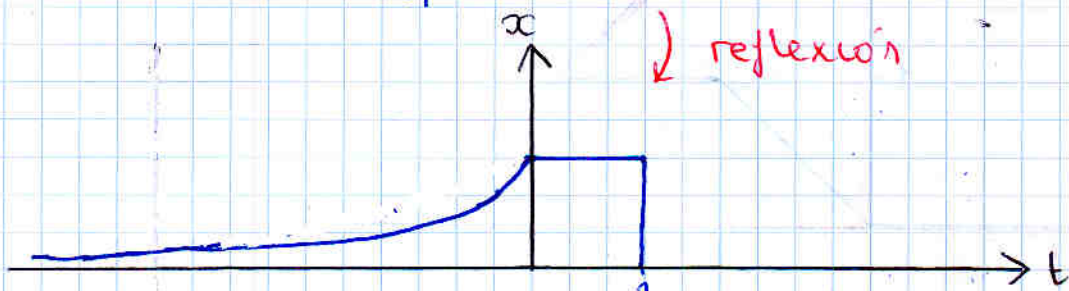
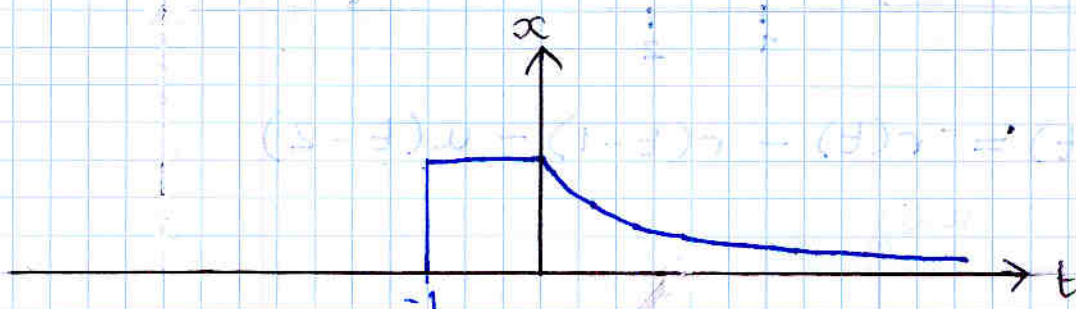
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1^2 dt = \frac{1}{2}$$

Dibujar y encontrar la expresión analítica de

$x(-\frac{t}{3} + \frac{1}{2})$ siendo $x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 0 \\ \exp(-t) & t > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$$x(-\frac{t}{3} + \frac{1}{2}) = x(-\frac{1}{3}t + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}) = x(-\frac{1}{3}(t - \frac{3}{2}))$$

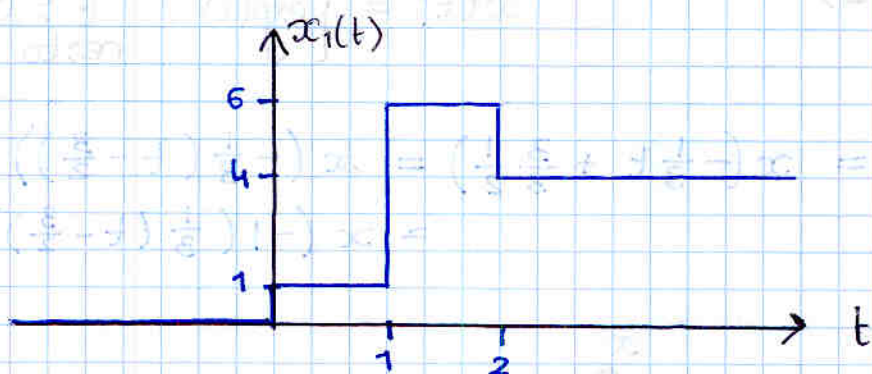
$$= x(-1(\frac{1}{3}(t - \frac{3}{2})))$$



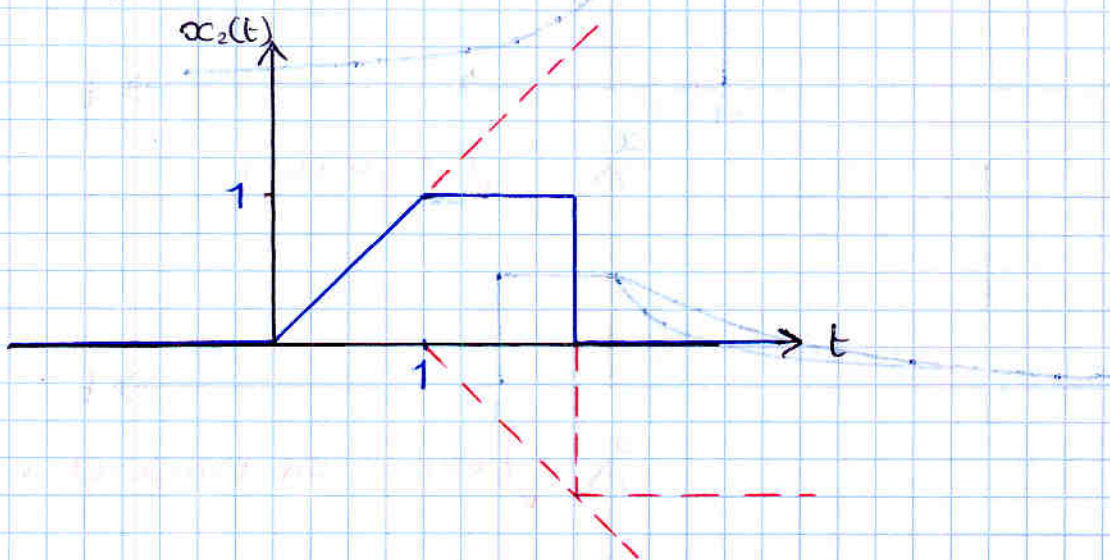
$$\begin{cases} \exp(\frac{1}{3}(t - \frac{3}{2})) & t \leq \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} < t \leq \frac{9}{2} \\ 0 & t > \frac{9}{2} \end{cases}$$

Dibujar las siguientes señales

a) $x_1(t) = u(t) + 5u(t-1) - 2u(t-2)$



b) $x_2(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-2)$



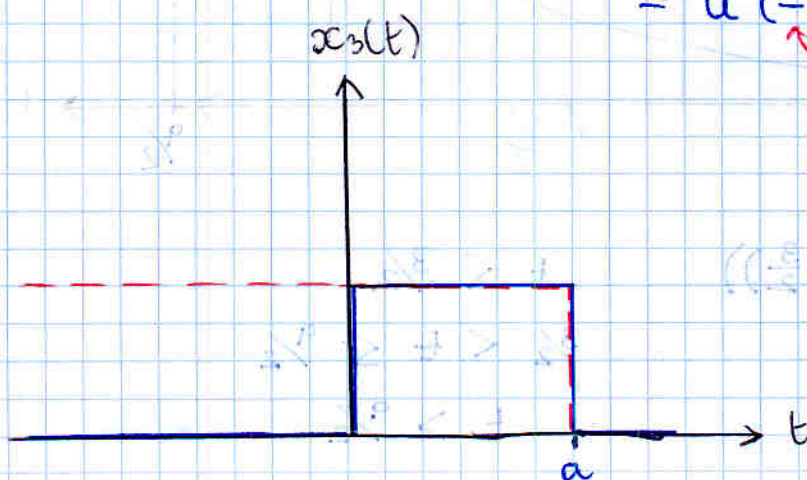
c) $x_3(t) = u(t) \cdot u(a-t) \quad a > 0$

$u(a-t) = u(-t+a)$

podría parecer que ya está

$= u(-(t-a))$

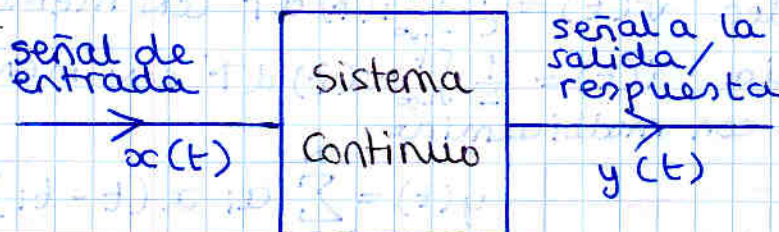
1. reflexión 2. desplaz



TEMA 2. SISTEMAS CONTINUOS

Concepto

Modela la mayoría de fenómenos físicos de respuesta a una excitación



ejemplos:

- circuitos electrónicos
- Transmisión de una señal (canal de comunic.)
- Radar

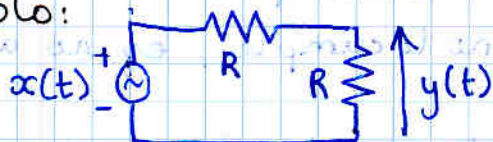
entrada: pulso emitido salida: eco que se recibe

Clasificación de sistemas

Lineales / no lineales

sistema lineal $\iff$ cumple el principio de linealidad
 $\alpha x_1 + \beta x_2 \rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$

ejemplo:



$$y(t) = \frac{x(t)}{2}$$

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Rightarrow y(t) = \frac{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)}{2} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Variantes / Invariantes

sistema invariante $\iff$ la salida del sistema a la entrada retardada es la propia salida retardada
en los que no ocurre son variantes.



ejemplo

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(t)$$

VARIANTE

$$x(t-t_0) \Rightarrow y(t) = x(t-t_0) \cos(t) \neq x(t-t_0) \cos(t-t_0)$$

ejemplo

sistema retardador: $y(t) = x(t - t_1)$
INVARIANTE $x(t-t_0) \Rightarrow y(t) = x(t-t_1-t_0) = y(t-t_0)$

• Con memoria / sin memoria

sistema sin memoria $\Leftrightarrow y(t_0)$ sólo depende de $x(t_0)$

sistema con memoria $\Leftrightarrow y(t_0)$ depende de $x(t_0)$
y/o de $x(t)$ $t \neq t_0$

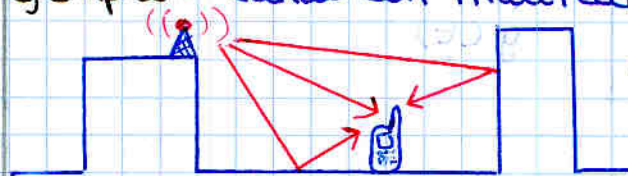
ejemplos:

• Resistencia $v(t) = R \cdot i(t)$ SIN MEMORIA

• Condensador $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ CON MEMORIA

• Inductancia $i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ CON MEMORIA

ejemplo: canal con multicaminos



$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i x(t - t_i)$$

CON MEMORIA

• Causal / no causal

sistema causal $\Leftrightarrow y(t_0)$ depende de $x(t)$
sólo para $t \leq t_0$

si no lo cumple, es no causal

• Anticausal / no anticausal

sistema anticausal $\Leftrightarrow y(t_0)$ depende de $x(t)$
sólo par $t > t_0$

si no lo cumple, es no anticausal

sistema es anticausal $\Rightarrow$ el sistema es no causal

sistema es causal $\Rightarrow$ el sistema es no anticausal



ejemplo:

$y(t) = x(t-5) \Rightarrow$ causal, no anticausal

$y(t) = x(t+5) \Rightarrow$ anticausal, no causal

$y(t) = x(t-5) + x(t+5) \Rightarrow$ no causal,
no anticausal

los únicos sistemas posibles de implementar físicamente son los causal

- Sistema invertible / no invertible

sistema invertible $\iff$ Podemos calcular la entrada a partir de la salida

Al sistema capaz de esto se le denomina sistema inverso

ejemplo:

$$\begin{aligned} y(t) &= a x(t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{a} y(t) && \text{INVERTIBLE} \\ y(t) &= \cos(x(t)) && \text{NO INVERTIBLE} \end{aligned}$$

- Sistema estable (BIBO) / no estable

BIBO = Bounded Input Bounded Output

sistema estable $\iff |x(t)| < B_1 \implies |y(t)| < B_2 \quad B_1, B_2 < \infty$

ejemplos:

$$\begin{aligned} y(t) &= a \cdot x(t) && \text{ESTABLE} \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau && \text{INESTABLE} \end{aligned}$$

SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES (S.L.I)

Respuesta al Impulso

Podemos escribir cualquier $x(t)$ de la forma

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Aplicando a este $x(t)$ el operador lineal $y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$

$$y(t) = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right]$$

$$(\text{linealidad}) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{cte en } t} \mathcal{L}[\delta(t - \tau)] d\tau$$

$\uparrow$ funciona sobre la variable 't'

Conociendo la salida a una δ ya conocemos la salida a cualquier señal



Definimos;

Respuesta al impulso ($h(t)$): la salida de un sistema a una δ

$$h(t) = \mathcal{L}[\delta(t)]$$



Permite escribir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

ya no aparece el operador lineal; esta incluido en h .



Operador convolución

Def:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau$$

Propiedades: muy importantes para hacer problemas

- Conmutativa:

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1$$

- Asociativa:

$$x_1 * x_2 * x_3 = (x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$$

- Distributiva:

$$x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$$

Aplicación a SLI.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

ejemplo: aplicación y propiedades

sistema retardador $x(t) \rightarrow \boxed{h(t) = \delta(t-t_0)} \xrightarrow{x(t-t_0)}$

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &= x(t) * h(t) \\ &= x(t) * \delta(t-t_0) \end{aligned}$$

calcular la salida a la señal $x(t)$ al pasar por un sistema con la siguiente respuesta al impulso

$$h(t) = 5\delta(t-3) + 8\delta(t-5)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= x(t) * [5\delta(t-3) + 8\delta(t-5)] \\ &= 5x(t) * \delta(t-3) + 8x(t) * \delta(t-5) \end{aligned}$$

$$y(t) = 5x(t-3) + 8x(t-5)$$

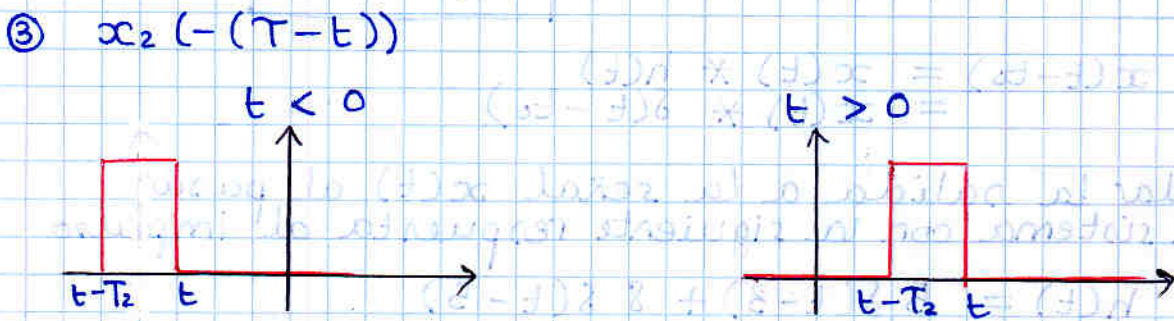
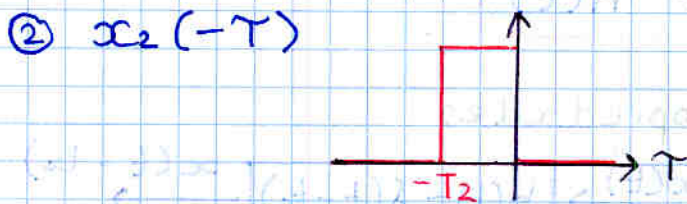
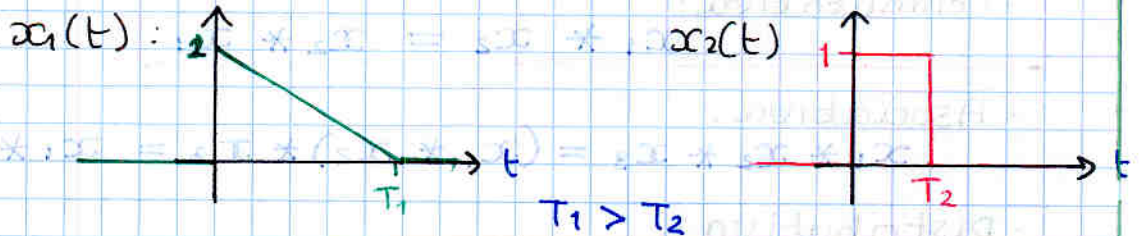
Interpretación gráfica de la convolución

$$x_1(t) * x_2(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(-(\tau-t)) d\tau$$

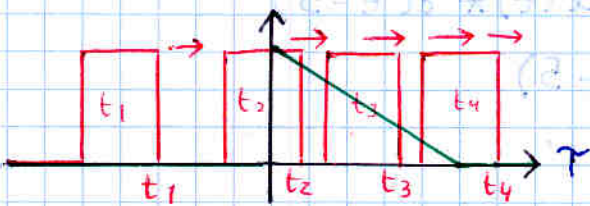
inversion displac.

Para cada instante t , se multiplica $x_1(\tau)$ por $x_2(\tau)$ invertida y desplazada t ($x_2(-(\tau-t))$). El valor de $y(t)$ es el área bajo la gráfica de esa multiplicación.

ejemplo



④ Calcular el área del producto de ambas señales.
Dicha área es el resultado de la convolución para t



la señal $x_2(-(T-t))$ se va moviendo conforme pasa t . En cada instante t se multiplica con $x_1(\tau)$ y se calcula el área obteniendo $y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t x_1(\tau) \cdot 1 d\tau & 0 \leq t < T_1 \\ \int_{t-T_2}^t x_1(\tau) \cdot 1 d\tau & T_2 \leq t < T_1 \\ \int_{t-T_2}^{T_1} x_1(\tau) \cdot 1 d\tau & T_1 \leq t < T_1 + T_2 \\ 0 & T_1 + T_2 < t \end{cases}$$

Propiedades de los SLI

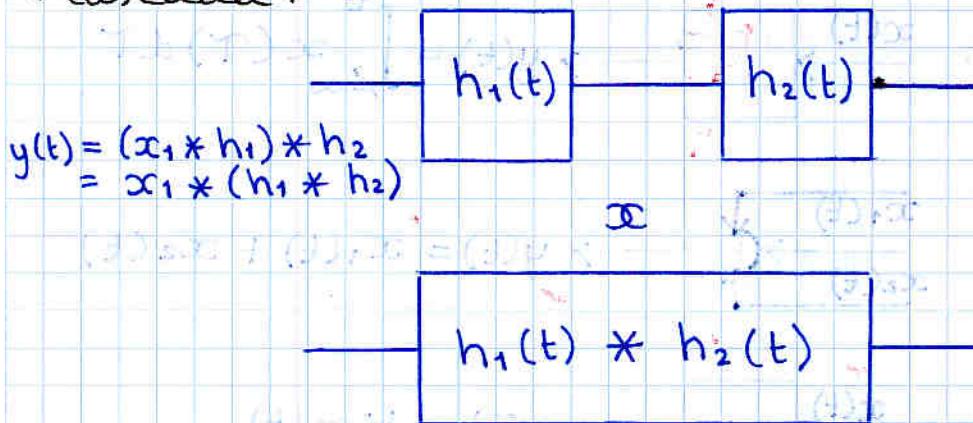
- Sistema Identidad: $h(t) = \delta(t)$ $x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow x(t)$
- Sistema Retardador: $h(t) = \delta(t - t_0)$ $x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow x(t - t_0)$
- Amplificador / Atenuador: $h(t) = k \cdot \delta(t)$ $x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow k \cdot x(t)$
- Sistema causal: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- Sistema invertible: $\exists h_I(t)$ sistema inverso /
 $h(t) * h_I(t) = \delta(t)$

ejemplo: $\delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$

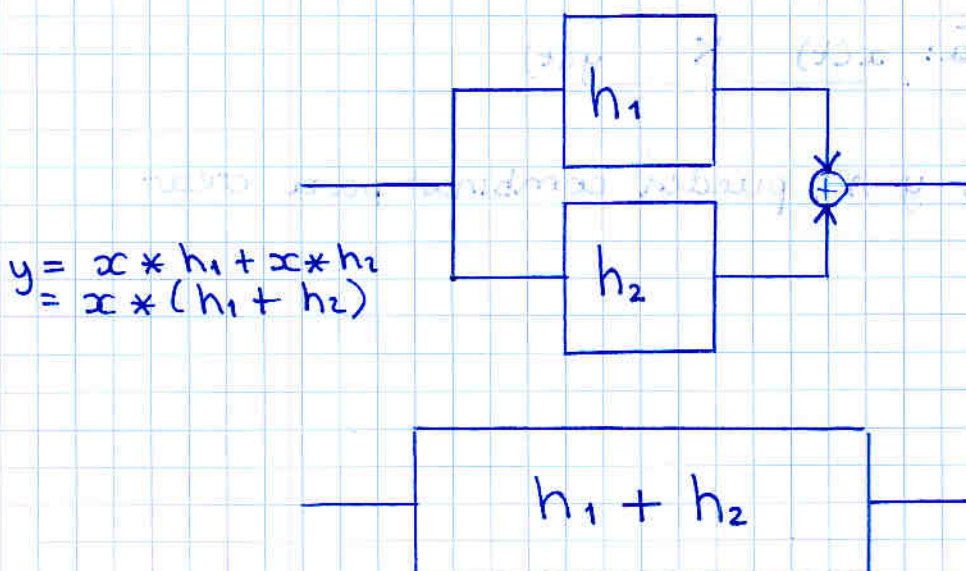
- Sistema estable: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

Asociación de sistemas

- cascada:



- paralelo



Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales

Supongamos que la siguiente ecuación modela un sistema físico con excitación $x(t)$ y respuesta $y(t)$

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad \{a_i\}, \{b_i\} \text{ coefs reales y ctes}$$

Bajo ciertas limitaciones:

→ condiciones iniciales nulas $\left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=t_0} = 0$

→ $N \geq M$

Si se cumplen esas dos limitaciones, el sistema puede ser implementado como un S.L.I. a partir de ciertos componentes básicos.

Componentes Básicos:

Integrador: $x(t) \rightarrow \int \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Sumador: $x_1(t), x_2(t) \rightarrow \oplus \rightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Multiplicador: $x(t) \rightarrow K \rightarrow y(t) = K x(t)$

de forma abreviada: $x(t) \xrightarrow{K} y(t)$

Los 3 son SLI, y se pueden combinar para crear un SLI.

Problemas que se puede convertir en SLI para el caso $M=N$

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

Definimos:

$$D^K x(t) = \frac{d^K x(t)}{dt^K}$$

$$D^{-K} x(t) = \text{integrar } K \text{ veces}$$

$$D^N(a_N y(t)) + D^{N-1}(a_{N-1} y(t)) + \dots + a_0 y(t) = D^N(b_N x(t)) + \dots + b_0 x(t)$$

pasando todo al mismo lado: (por comodidad $x \equiv x(t)$)

$$D^N(a_N y - b_N x) + D^{N-1}(a_{N-1} y - b_{N-1} x) + \dots + D^1(a_1 y - b_1 x) + (a_0 y - b_0 x) = 0$$

integraremos n veces a ambos lados

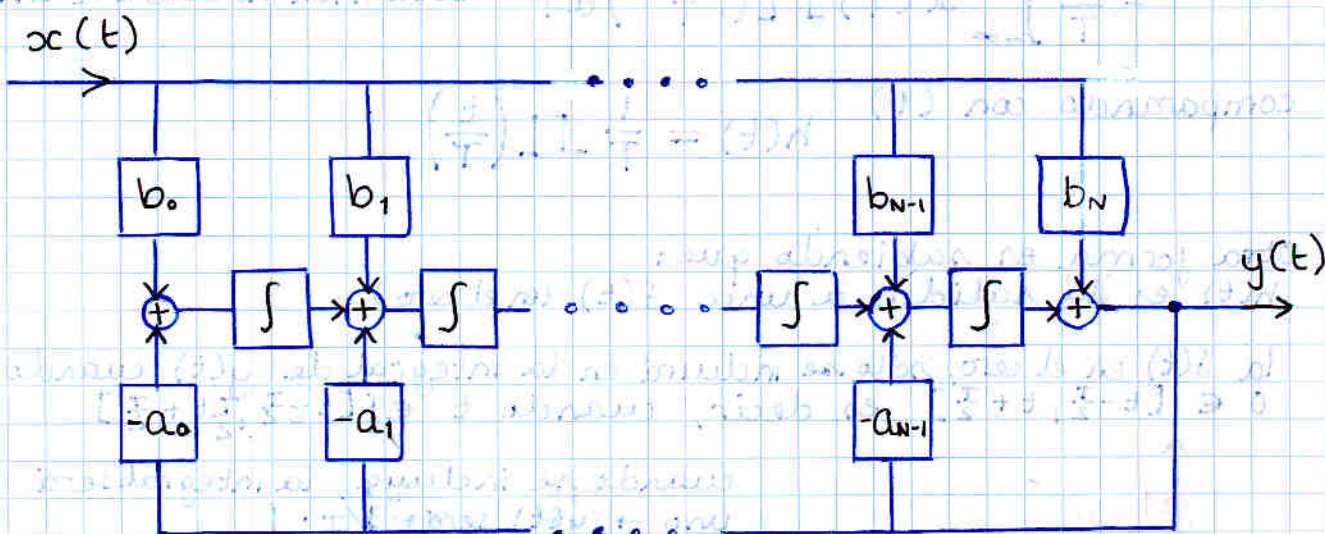
$$(a_N y - b_N x) + D^{-1}(a_{N-1} y - b_{N-1} x) + \dots + D^{-N+1}(a_1 y - b_1 x) + D^{-N}(a_0 y - b_0 x) = 0$$

ahora despejamos $y(t)$

suponemos $a_N = 1$ por sencillez, sino bastaría con dividir todo por a_N

$$y(t) = b_N x + D^{-1}(b_{N-1} x - a_{N-1} y) + \dots + D^{-N+1}(b_1 x - a_1 y) + D^{-N}(a_0 y - b_0 x)$$

esto ya se puede implementar como un SLI



Ejercicios del tema 2

ejemplo 2.3.2

calcular la respuesta al impulso del SLI descrito por la ecuación

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

Hay que conseguir escribir $y(t)$ de la forma



si multiplicamos $x(\tau)$ por $\square$, conseguimos que $y(t)$ sea el área desde $-\infty$ a ∞ , lo cual se parece a lo que buscamos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \square\left(\frac{\tau-t}{T}\right) d\tau \quad \text{centro en } t \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \square\left(\frac{-(t-\tau)}{T}\right) d\tau \quad \text{anchura } T \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \square\left(\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau \quad \text{para que se parezca más a } h(t) * x(t) \text{ damos la vuelta a las variables} \\ &\quad \text{la inversión no altera a } \square \end{aligned}$$

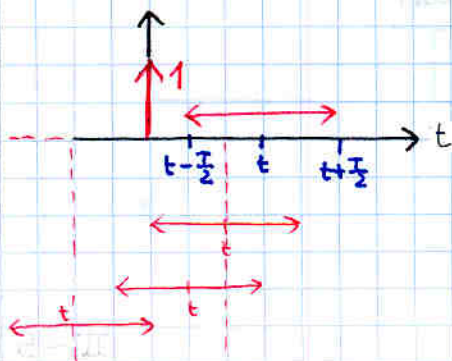
comparando con (1)

$$h(t) = \frac{1}{T} \square\left(\frac{t}{T}\right)$$

Otra forma es sabiendo que:

$h(t)$ es la salida a una $\delta(t)$ (en el cero)

la $\delta(t)$ en el cero, sólo se incluirá en la integral de $y(t)$ cuando $0 \in [t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}]$ es decir, cuando $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$



cuando se incluya, la integral será

uno $\rightarrow y(t)$ será $1/T \cdot 1$

cuando no se incluya, $\rightarrow y(t)$ será 0

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otros} \end{cases} \quad \text{si la entrada} = h(t) \text{ es } \delta(t)$$



ejercicio 2.3

j) calcular analíticamente

$$y(t) = \text{sgn}(t) * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$y(t) = \text{sgn}(t) * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$y(t) = (-1 + 2u(t)) * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)$$

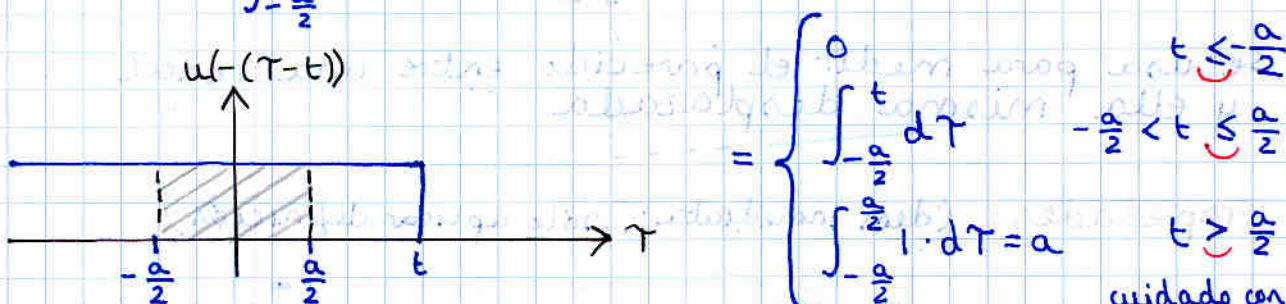
$$= [-1 * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)] + [2u(t) * \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)]$$

Para calcular convoluciones siempre conviene que la función que se invierte y se mueva sea la más sencilla.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{a}\right) \cdot (-1) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{a}\right) \cdot 2u(-(\tau-t)) d\tau$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-1) d\tau + 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u(t-\tau) d\tau$$

$$= 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u(t-\tau) d\tau - a$$



$$= \begin{cases} 0 & t \leq -\frac{a}{2} \\ \int_{-\frac{a}{2}}^t d\tau & -\frac{a}{2} < t \leq \frac{a}{2} \\ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1 \cdot d\tau = a & t > \frac{a}{2} \end{cases}$$

cuidado con no incluir un mismo punto dos veces.

$$y(t) = \begin{cases} -a & t \leq -\frac{a}{2} \\ -a + 2 \cdot (t + \frac{a}{2}) & -\frac{a}{2} < t \leq \frac{a}{2} \\ -a + 2 \cdot a & t > \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} -a & t \leq -\frac{a}{2} \\ 2t & -\frac{a}{2} < t \leq \frac{a}{2} \\ a & t > \frac{a}{2} \end{cases}$$

2.6

Correlación cruzada

se define:

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t) y(\tau) d\tau$$

mide el parecido entre $x(\tau)$ e $y(\tau)$
Se usa mucho en comunicaciones.

Propiedades (demostración casi trivial, inmediata; sólo sustituir la def.)

a) $R_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$

b) $R_{xy}(t) = R_{yx}(-t)$

Se cumple propiedad conmutativa si $R_{xy}(t)$ es par.

2.7

Autocorrelación

$$R_x(t) = R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(\tau - t) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t) x(\tau) d\tau$$

se usa para medir el parecido entre una señal y ella misma desplazada

Propiedades: (dem inmediata; sólo aplicar definición)

a)

$$R_x(0) = \text{Energía}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

b)

$$R_x(0) \geq R_x(t)$$

Lógico: una señal no puede parecerse más a otra que a sí misma.

desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int x(\tau) x(\tau - t) d\tau \leq \underbrace{\left[\int x^2(\tau) d\tau \right]}_E \cdot \underbrace{\left[\int x^2(\tau - t) d\tau \right]}_{E^2}^{1/2}$$

c)

$$R_z(t) = R_x(t) + R_y(t) + R_{xy}(t) + R_{yx}(t)$$

$\uparrow$
 $z(t) = x(t) + y(t)$

ejercicio 2.26

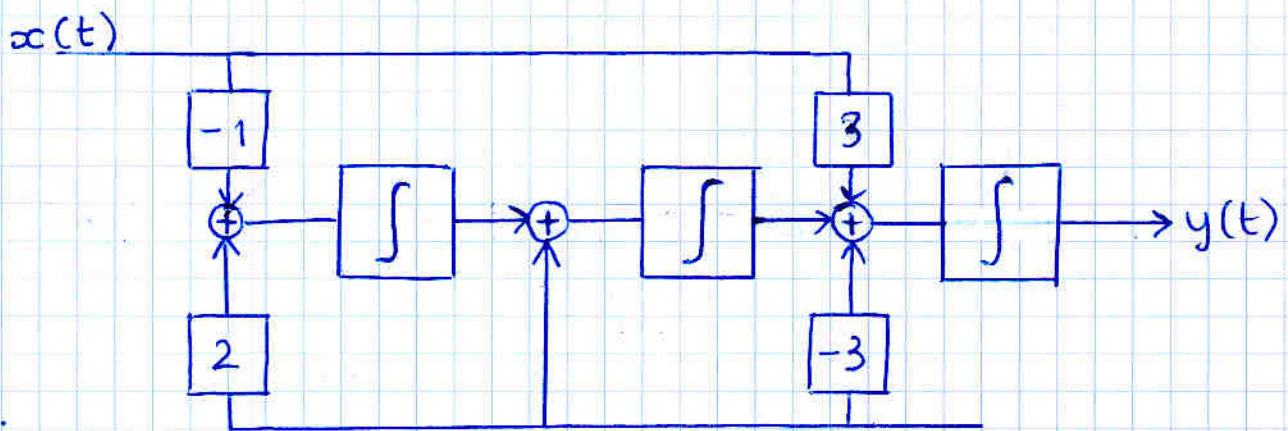
Dado un SLI descrito por

$$y'''(t) + 3y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 3x''(t) - x(t)$$

aplicamos D^{-3}

$$y(t) + 3D^{-1}y(t) - D^{-2}y(t) - 2D^{-3}y(t) = 3D^{-1}x(t) - D^{-3}x(t)$$

$$y(t) = D^{-3}[2y(t) - x(t)] + D^{-2}[y(t)] + D^{-1}[-3y(t) + 3x(t)]$$



$$y(t) = 3D_1^{-1}(t) - D_2^{-1}(t) - (t)D_3^{-1}(t) = (t)y$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3D_1^{-1}(t) - D_2^{-1}(t) - (t)D_3^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3D_1^{-1}(t) - D_2^{-1}(t) - (t)D_3^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t)$$

$$A$$

$$B$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3D_1^{-1}(t) - D_2^{-1}(t) - (t)D_3^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C$$

$$D$$

TEMA 3. SERIES DE FOURIER

Definición:

Sea $x(t)$ una señal periódica de periodo T , bajo ciertas condiciones se puede expresar

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left\{ j \frac{2\pi}{T} nt \right\}$$

Desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ (DSF)

siendo:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{T} nt \right\} dt$$

coeficientes (complejos en general) del DSF

un periodo

ω_0
pulsación fundamental

coeficientes del DSF: C_n

- En general serán complejos
- $|C_n|$ espectro de amplitud
- $\angle C_n$ espectro de fase
- C_0 es el nivel medio de $x(t)$
- C_1 es el contenido de la pulsación fundamental de $x(t)$
- C_2 es " " del segundo armónico de $x(t)$

Caso particular: $x(t)$ es real

conjugado

$$C_n^* = \left[\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{T} nt \right\} dt \right]^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot \exp \left\{ j \frac{2\pi}{T} nt \right\} dt = C_{-n}$$

$$C_n^* = C_{-n}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |C_n| &= |C_{-n}| \\ \angle C_n &= -\angle C_{-n} \end{aligned}$$

Por otra parte, para cualquier $x(t)$ sea real o no:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{-n} \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{T} nt \right\} + C_n \exp \left\{ j \frac{2\pi}{T} nt \right\}]$$

si $x(t)$ es real $\rightarrow C_{-n} = C_n^*$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[[C_n \exp \left\{ j \frac{2\pi}{T} nt \right\}]^* + C_n \exp \left\{ j \frac{2\pi}{T} nt \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[C_n \exp \left(j \frac{2\pi}{T} nt \right) \right] \\ &= 2 \left[\operatorname{Re}(C_n) \cdot \operatorname{Re}(e^{j \frac{2\pi}{T} nt}) - \operatorname{Im}(C_n) \operatorname{Im}(e^{j \frac{2\pi}{T} nt}) \right] \\ &= \underbrace{2 \operatorname{Re}(C_n)}_{b_n} \cos \frac{2\pi}{T} nt + \underbrace{-2 \operatorname{Im}(C_n)}_{a_n} \sin \frac{2\pi}{T} nt \end{aligned}$$

lo cual nos lleva a

2 formas alternativas de representar la expresión
($x(t)$ real)

$$\rightarrow C_n = \text{Re}(C_n) + j \text{Im}(C_n)$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right\}$$

$$a_n = 2 \text{Re}\{C_n\} = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

$$b_n = -2 \text{Im}\{C_n\} = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

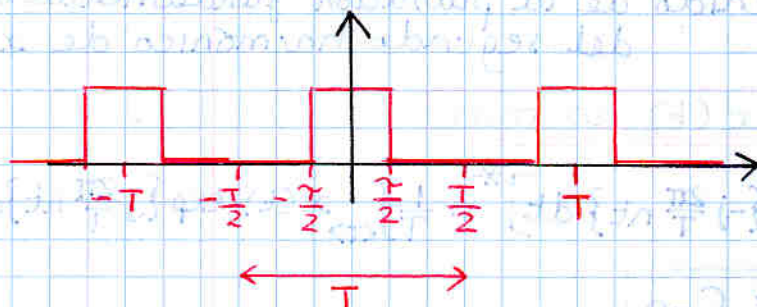
$$\rightarrow C_n = |C_n| e^{j \angle C_n}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt + \Phi_n\right)$$

$$A_n = 2|C_n|$$

$$\Phi_n = \angle C_n$$

ejercicio: Calcular DSF de $x(t)$



calculemos los coeficientes C_n , luego no habría más que sustituirlos en una de las fórmulas.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot \exp\left\{-j \frac{2\pi}{T} nt\right\} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} K \cdot \exp\left\{-j \frac{2\pi}{T} nt\right\} dt$$

$$= \frac{K}{T(-j \frac{2\pi}{T} n)} \left[\exp\left\{-j \frac{2\pi}{T} nt\right\} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-K}{j 2\pi n} \left[\exp\left\{-j \frac{2\pi}{T} n \frac{T}{2}\right\} - \exp\left\{-j \frac{2\pi}{T} n \left(-\frac{T}{2}\right)\right\} \right]$$

$$= \frac{K}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi \tau}{T}\right)$$

$$= \frac{K \tau / T}{n\pi \tau / T} \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

recuerda

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

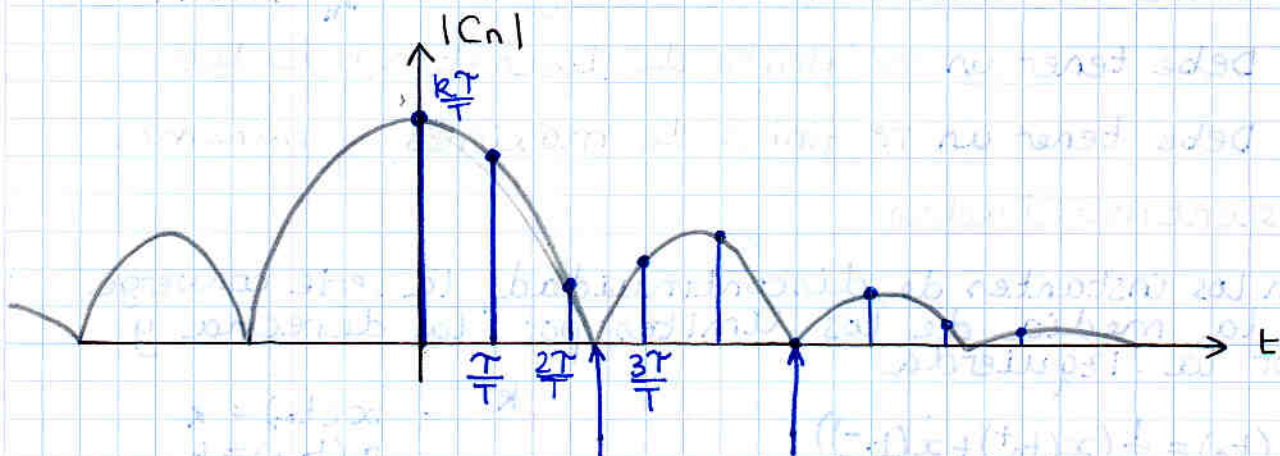
recuerda

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$C_n = \frac{K \tau}{T} \text{sinc}\left(n \frac{\tau}{T}\right)$$

dibuyemos el espectro de amplitud de C_n

$$C_n = \frac{k\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(n\frac{\tau}{T}\right)$$



$\operatorname{sinc}\left(n\frac{\tau}{T}\right)$ se anula en $\left(n\frac{\tau}{T}\right) = 1, 2, 3, \dots$
ya que $\operatorname{sinc}(x)$ se anula en $x = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{n\tau}{T} = N \rightarrow n = \frac{NT}{\tau}$$

si algún valor de $\frac{NT}{\tau}$ coincide con un número entero n , el C_n tendrá módulo cero

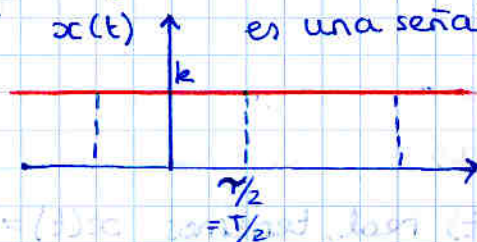
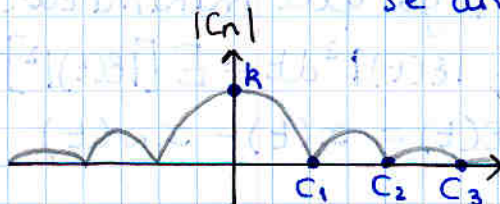
• Si $\tau = T$

$\frac{NT}{\tau}$ siempre coincide con un entero n

se anulan todos los C_n

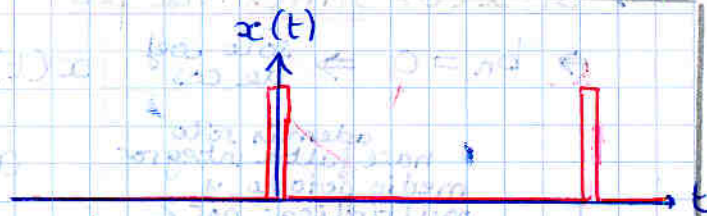
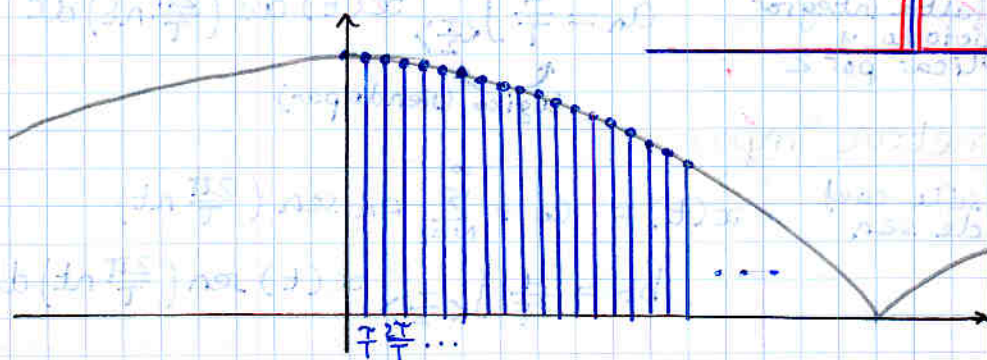
es lógico, pues

$x(t)$ es una señal continua



• si $\tau \ll T$

$\frac{T}{\tau} \uparrow \uparrow \quad \frac{\tau}{T} \downarrow \downarrow$



Condiciones de Dirichlet

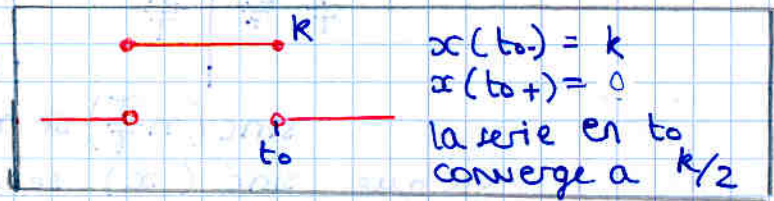
Las condiciones que debe cumplir un periodo de $x(t)$ para que admita DSF

- ① Debe ser absolutamente integrable $\int_h^{h+T} |x(t)| dt < \infty$
- ② Debe tener un n° finito de discontinuidades
- ③ Debe tener un n° finito de máximos y mínimos

Discontinuidades

En los instantes de discontinuidad, la serie converge a la media de los límites por la derecha y por la izquierda

$$\hat{x}(t_0) = \frac{1}{2}(x(t_0^+) + x(t_0^-))$$



Propiedades del DSF

Aproximación de mínimos cuadrados

Para $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp\{j \frac{2\pi}{T} n t\}$, $x_N(t) = \sum_{-N}^N C_n \exp\{j \frac{2\pi}{T} n t\}$ aprox de $x(t)$

la mejor aproximación que podemos hacer es cuando C_N son los coeficientes del DSF, ya que minimizan el error cuadrático medio

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |E(t)|^2 dt = E[|E(t)|^2]$$

$$E(t) = x(t) - x_N(t)$$

Simetrías

Para $x(t)$ real, tenemos $x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\frac{2\pi}{T} n t) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T} n t)\}$

→ si $x(t)$ simetría par

$$\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow \text{sólo coef de cos}$$

además sólo hace falta integrar medio periodo y multiplicar por 2

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} n t)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{\langle \frac{T}{2} \rangle} x(t) \cos(\frac{2\pi}{T} n t) dt$$

lógico (usando par)

→ si $x(t)$ simetría impar

$$\Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow \text{sólo coef de sen}$$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi}{T} n t)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{\langle \frac{T}{2} \rangle} x(t) \sin(\frac{2\pi}{T} n t) dt$$

- Linealidad

$x(t)$ e $y(t)$
periódicas

$x(t)$ con coef DSF β_n
 $y(t)$ " " " γ_n

NOTACIÓN

$$x(t) \leftrightarrow \beta_n$$

$$y(t) \leftrightarrow \gamma_n$$

$$z(t) = k_1 x(t) + k_2 y(t) \Rightarrow z(t) \leftrightarrow k_1 \beta_n + k_2 \gamma_n$$

- Producto

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{n-m} \cdot \gamma_m \quad \leftarrow \text{veremos en SLII que es la convolución discreta}$$

- Convolución

Definición: Convolución para señal periódica

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau$$

la convolución de dos señales de periodo T es también periódica de periodo T

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow \alpha_n = \beta_n \cdot \gamma_n$$

dominio del tiempo

mult. $\equiv$
conv. $\equiv$

dominio de la frecuencia

conv. $\equiv$
mult. $\equiv$

Teorema de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cdot y^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \cdot \gamma_n^*$$

caso particular
 $x(t) = y(t)$

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x(t - \tau) \leftrightarrow \beta_n e^{-j \frac{2\pi}{T} n \tau}$$

- Desplazamiento en frecuencia

$$x(t) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} n_0 t} \leftrightarrow \beta_{n-n_0}$$

Resumen:

$$x(t) \leftrightarrow \alpha_n$$

$$y(t) \leftrightarrow \beta_n$$

$$k_1 x(t) + k_2 y(t) \leftrightarrow k_1 \alpha_n + k_2 \beta_n$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \alpha_n * \beta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \beta_m$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow \alpha_n \cdot \beta_n$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow \beta_n \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} n t_0}$$

$$x(t) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} n_0 t} \leftrightarrow \beta_{n-n_0}$$

SLI con entradas periódicas Respuesta en frecuencia



Caso básico: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

$H(\omega)$: Respuesta en frecuencia

$$H(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot H(\omega_0)$$

$|H(\omega_0)| \rightarrow$ homotecia $\rightarrow$ ganancia/atenuación
 $\angle H(\omega_0) \rightarrow$ giro $\rightarrow$ cambio de fase

$$= |H(\omega_0)| \cdot e^{j(\omega_0 t + \angle H(\omega_0))}$$

$|H(\omega_0)| :=$ respuesta en amplitud del sistema

$\angle H(\omega_0) :=$ respuesta en fase " "

la pulsación de $y(t)$ es la misma que la de la entrada

Caso: $x(t)$ periódica T

$$x(t) \leftrightarrow C_n \Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_0 n t}$$

aplicando linealidad:



Es lógico:

si la salida a $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ es $y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}$

la salida a $x(t)$, siendo ésta una suma de exponenciales (serie de Fourier) $x(t) = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + C_n e^{jn\omega_0 t}$
la salida es, obviamente

$$y(t) = C_1 H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} + C_2 H(2\omega_0) e^{j2\omega_0 t} + \dots + C_n H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

los coef. de $y(t)$ del DSF son $C_n H(n\omega_0)$

Sistema sin distorsión

$$y(t) = K \cdot x(t - t_d)$$

K : amplificación / atenuación
 t_d : retardo

Sabemos que

$$x(t) \leftrightarrow C_n \Rightarrow y(t) \leftrightarrow H(n\omega_0)C_n$$

utilizando
propiedades
del DSF

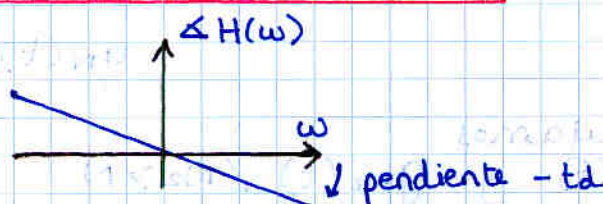
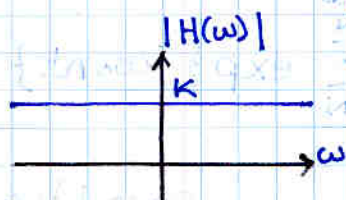
$$K \cdot x(t - t_d) \leftrightarrow K C_n e^{-j\omega_0 n t_d}$$

comparando :

$$H(\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_d}$$

$$|H(\omega)| = K$$

$$\angle H(\omega) = -\omega t_d$$

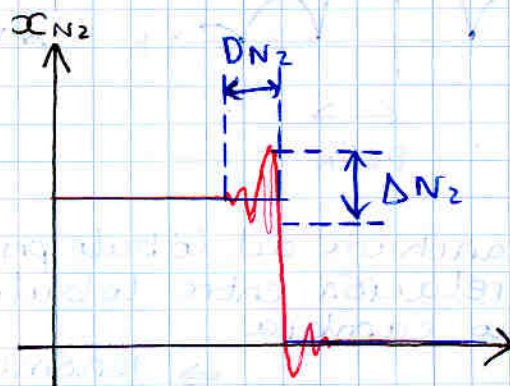


Fenómeno de Gibbs

Aparece en los puntos donde existen discontinuidades.

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n \exp\{j\omega_0 n t\}$$

$$x_{N_2}(t) / N_2 > N$$



$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{N_2} = \Delta_{N_1} \\ D_{N_2} < D_{N_1} \end{array} \right\} \text{ para } N_2 > N_1$$

la amplitud
nunca
disminuye.
sólo la
duración

Explicación fenómeno de Gibbs

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n \cdot \exp\left\{j \frac{2\pi}{T} nt\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \alpha_n \cdot \exp\left\{j \frac{2\pi}{T} nt\right\}$$
$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow C_n \\ x_N(t) &\longleftrightarrow C_n \cdot \alpha_n \end{aligned}$$

definimos $g_N(t) \longleftrightarrow \alpha_n$

producto en frecuencia $\Rightarrow$ convolución en tiempo

$$x_N(t) = x(t) * g_N(t)$$

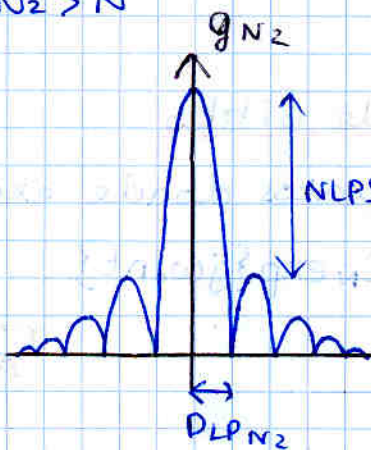
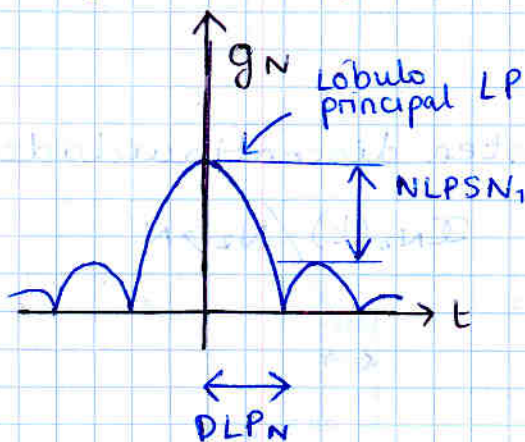
$$g_N(t) \longleftrightarrow \alpha_n = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$g_N(t) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n \exp\{j\omega_0 nt\}$$

$$g_N(t) = \sum_{n=-N}^N \exp\{j\omega_0 nt\}$$

si dibujamos

$g_N(t)$ y $g_{N_2}(t)$ / $N_2 > N$



Caso ideal

$$g_{\infty}(t)$$

$$= \delta(t)$$

$$x_{\infty}(t) = x(t) * \delta(t)$$

- la anchura del lóbulo principal va disminuyendo
- la relación entre lóbulo principal y secundario no cambia

$\Rightarrow$ fenómeno de Gibbs

Problemas

a) Determine los coeficientes C_{kx} de la señal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega_0 t))$$

pasando: $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 0 t} + \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} \right)$$

$$x(t) = \sum C_n e^{j\omega_n t}$$

Identificando términos:

$$\begin{cases} C_{0x} = \frac{1}{2} \\ C_{1x} = \frac{1}{2} = C_{-1x} \\ C_{2x} = -\frac{1}{4} = C_{-2x} \\ \text{resto } C_{kx} = 0 \end{cases}$$

b) Calcular la respuesta en frecuencia del SLI

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} \cdot u(t) \quad \alpha > 0$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{\alpha}{-(\alpha + j\omega)} \left[e^{-(\alpha + j\omega)t} \right]_0^{\infty}$$

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

c) $\frac{x(t)}{C_{kx}} \rightarrow h(t), H(\omega) \rightarrow \frac{y(t)}{C_{ky}} ?$

con $h(t)$ y $H(\omega)$ del apartado anterior

$$C_{ky} = H(k\omega_0) \cdot C_{kx}$$

$$C_{0y} = \frac{1}{2} \quad C_{1y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha + j\omega_0} \right) \quad C_{2y} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2j\omega_0} \right)$$

$$C_{-1y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - j\omega_0} \right) \quad C_{-2y} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 2j\omega_0} \right) = C_{2y}^* \\ = C_{1y}^*$$

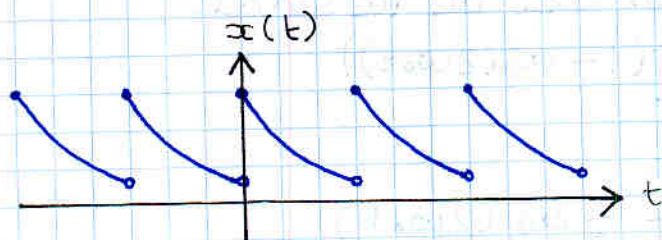
Problema

$x(t)$ cumple

$$x(t) = x(t+4)$$

$$x(t) = \exp(-t) \quad 0 \leq t < 4$$

a) $C_k x$



$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt$$

$$C_n^x = \frac{1}{4} \int_0^4 e^{-t} e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{4} \int_0^4 e^{-t(j\omega_n + 1)} dt$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$C_n^x = \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{(j\frac{\pi}{2}n + 1)} e^{-t(j\frac{\pi}{2}n + 1)} \right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{2j\pi n + 4} \left[e^{-4(j\frac{\pi}{2}n + 1)} - e^0 \right]$$

$$= -\frac{1}{2j\pi n + 4} \left[e^{-4} \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}n \cdot 4}}_{e^{-2\pi j n}} - 1 \right]$$

$$e^{-2\pi j n}$$

1 para n entero

$$= \frac{1 - e^{-4}}{2\pi j n + 4}$$

b) $y(t) = x(t) * x(t-2)$ ¿ $C_k y$?

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow C_n^x \\ x(t-2) &\longleftrightarrow C_n^x e^{-j\omega_n(2)} \end{aligned}$$

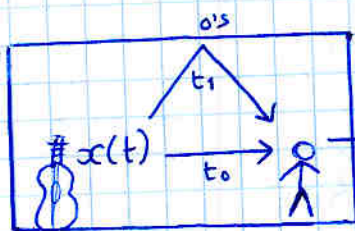
$$x(t) * x(t-2) \longleftrightarrow C_n^x \cdot C_n^x \cdot e^{-j\omega_n(2)}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{2}$$

$$(C_n^x)^2 \cdot \underbrace{e^{-j\pi n}}_{(-1)^n}$$

$$C_n^y = \left(\frac{1 - \exp(-4)}{4 + j2\pi n} \right)^2 (-1)^n$$

ejercicio. Sala de conciertos



$$x(t) = 10 \cos(\omega_0 t) + 5 \cos(2\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)$$

$$y(t) = x(t - t_0) + 0.5 x(t - t_1)$$

a) Coeficientes del DSF de $x(t)$

$$x(t) = 10 \cos(\omega_0 t) + 5 \cos(2\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$= 10 \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + 5 \frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}}{2}$$

$$= 5e^{j\omega_0 t} + 5e^{-j\omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{-j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j3\omega_0 t}$$

$$C_1 = 5 = C_{-1}$$

$$C_2 = 5/2 = C_{-2}$$

$$C_3 = 1/2 = C_{-3}$$

$$\text{resto} = 0$$

b) Calcular respuesta al impulso y respuesta en frecuencia de la sala

Recordando $x(t) \rightarrow \boxed{\delta(t - t_0)} \rightarrow x(t - t_0)$

y aplicando linealidad

$$\boxed{h(t) = \delta(t - t_0) + 0.5 \delta(t - t_1)}$$

$$\boxed{H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt}$$

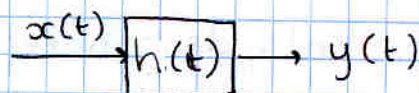
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt + 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) e^{-j\omega t} dt$$

aplicando la propiedad de la delta de Dirac

$$\boxed{H(\omega) = e^{-j\omega t_0} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t_1}}$$

Problema Junio 2003

$$h(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(10\pi(t-3))}{\pi(t-3)}$$



a) Calcular $y(t)$ cuando $x(t) = \delta(t)$

por definición. $y(t) = h(t)$

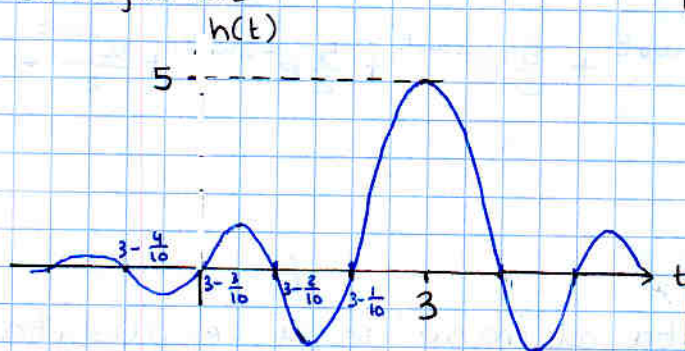
$$= \frac{1}{2} \frac{\sin 10\pi(t-3)}{\pi(t-3)}$$

$$= 5 \frac{\sin 10\pi(t-3)}{\pi 10(t-3)}$$

recuerda $\text{sinc}(kx) = \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi x}$

$$= 5 \text{sinc}(10(t-3))$$

(ii) Dibujarla



No es causal ($\neq 0$ $t < 0$)

(iii) Calcular $\max\{y_a(t)\}$

$$\max\{y_a(t)\} = 5$$

para $t = 3$

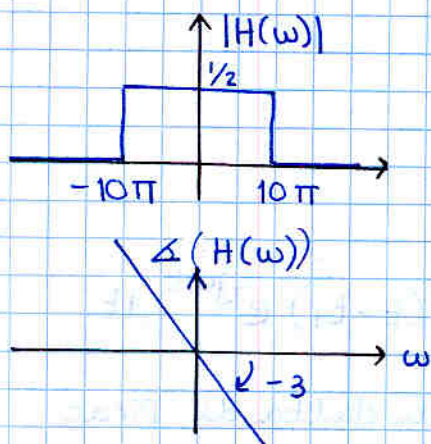
(iv) Calcular ceros

$$10(t-3) = k$$

$$t = \frac{k}{10} + 3 \quad k \in \mathbb{Z} \text{ excepto } k=0$$

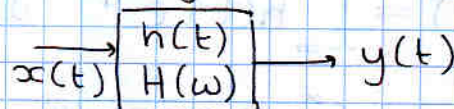
b) Calcular $H(\omega)$

(se necesita teoría del tema 4)



$$H(\omega) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{20\pi}\right) e^{-j3\omega}$$

c) Calcular $y(t)$ si $x(t) = \cos 2\pi t$



TRUCO:
respuesta a $e^{j\omega t}$
es $|H(\omega)| \cdot e^{j(\omega t + \angle H(\omega))}$

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t})$$

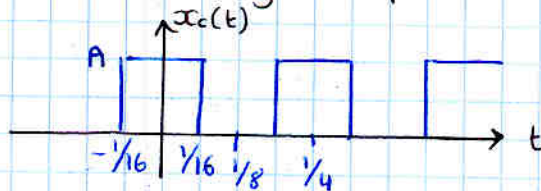
$$y(t) = \frac{1}{2} |H(2\pi)| e^{j(2\pi t + \angle H(2\pi))} + \frac{1}{2} |H(-2\pi)| e^{j(2\pi t + \angle H(-2\pi))}$$

de las gráficas $\left\{ \begin{array}{l} |H(2\pi)| = 1/2 = |H(-2\pi)| \\ \angle H(2\pi) = -6\pi \quad \angle H(-2\pi) = 6\pi \end{array} \right\}$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{j(2\pi t - 6\pi)} + \frac{1}{2} e^{j(2\pi t + 6\pi)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cos(2\pi t - 6\pi) = \frac{1}{2} \cos(2\pi t)$$

d) Calcular ^{DSF de} $y_c(t)$ para $x_c(t)$ siguiente:



en teoria hemos hecho el caso general:

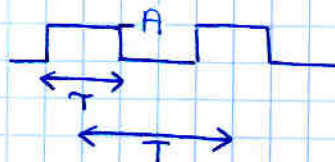
$$C_n^x = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(n\frac{\tau}{T}\right)$$

en nuestro caso

$$\tau = 1/8$$

$$T = 1/4$$

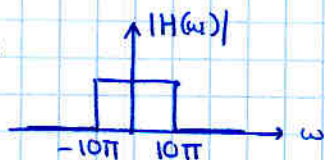
$$A =$$



podemos aplicar

$$C_n^y = C_n^x \cdot H(n\omega)$$

como



C_n^y no tendrá coeficientes cuando $|n\omega| > 10\pi$

$$n=0 \quad C_0^y = C_0^x \cdot H(0) = \frac{1}{2} C_0^x$$

$$n=1 \quad C_1^y = C_1^x \cdot H(8\pi) = \frac{1}{2} e^{-j3 \cdot 8\pi} C_1^x$$

$$n=2 \quad C_2^y = C_2^x \cdot H(16\pi) = 0$$

$$C_0^x = \frac{A\tau}{T} = \frac{A}{2}$$

$$C_1^x = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \frac{A}{2} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C_0^y = \frac{A}{4}$$

$$C_1^y = \frac{A}{4} \underbrace{e^{-j24\pi}}_1 \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A}{4} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}\right) = \frac{A}{\pi}$$

$$C_{-1}^y = (C_1^y)^* = C_1^y$$

e) calcular la potencia de $y_c(t)$

$$\text{Pot } y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n^y|^2 = |C_0^y|^2 + 2|C_1^y|^2 = \left(\frac{A}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{A}{2\pi}\right)^2$$

2012

12.12.2012

12.12.2012

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

12.12.2012

TEMA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER

- Aproximación a la TF

serie de Fourier para
señal periódica $\tilde{x}(t)$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) \cdot e^{-j\omega_0 n t} dt$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_n C_n \cdot e^{j\omega_0 n t}$$

coef por unidad
de frecuencia

$$\frac{2\pi C_n}{dw} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega) \frac{1}{2\pi} d\omega) e^{j\omega t}$$

$$TF[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Transformada
DIRECTA
de Fourier

$$TF^{-1}[X(\omega)] = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Transformada
INVERSA
de Fourier

$X(\omega) \begin{cases} \rightarrow |X(\omega)| \text{ espectro de amplitud de } x(t) \\ \rightarrow \angle X(\omega) \text{ espectro de fase de } x(t) \end{cases}$

Condiciones de existencia

las 3 condiciones de Dirichlet, en lugar de para un periodo, para $[-\infty, \infty]$

- ① $x(t)$ absolutamente integrable
- ② n° finito máximos y mínimos
- ③ n° finito de discontinuidades

en las discontinuidades: $TF^{-1}[X(\omega)] = \frac{x(t_-) + x(t_+)}{2}$

ejemplo:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

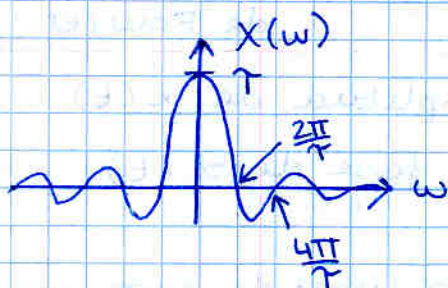
$$= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} + e^{j\frac{\omega\tau}{2}} = \frac{2}{2j\omega} \left[e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \frac{\tau \text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

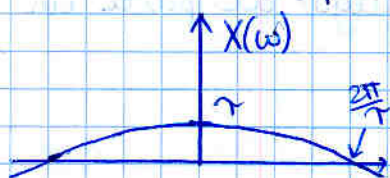
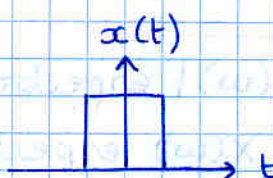
$$= \tau \cdot \underset{\substack{\text{función} \\ \text{sampling}}}{\text{SA}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

$$\text{SA}(x) = \text{sinc}\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

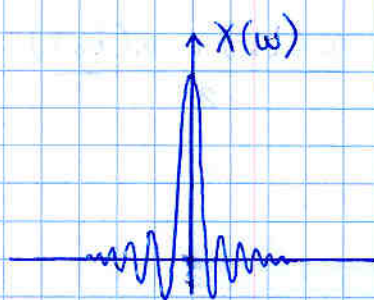
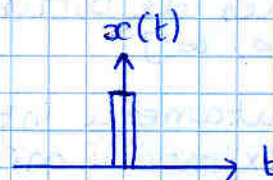
$$X(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$



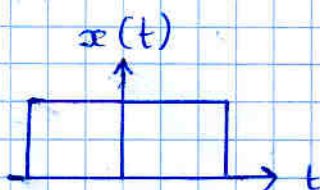
$\longleftrightarrow$



$\longleftrightarrow$



$\longleftrightarrow$



ejemplos:

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X(\omega) \\ \delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\ 1 &\longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega) \\ e^{j\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ \cos \omega_0 t &\longleftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

algunas son más fáciles de demostrar haciéndolo al revés.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\begin{aligned} \text{TF}^{-1}[2\pi \delta(\omega)] &= x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \exp^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} &= \text{TF}^{-1}[2\pi \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier de una señal periódica

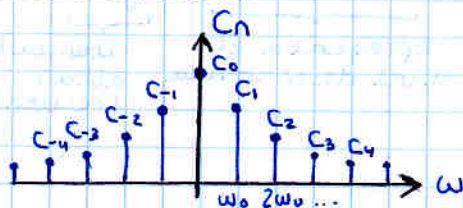
$x(t)$ periódica periodo T

Serie de Fourier $x(t) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

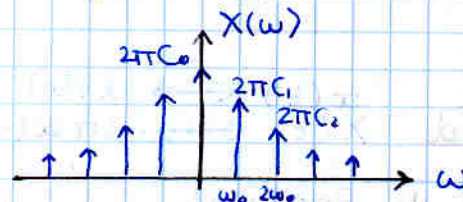
Transformada de Fourier

$$x(t) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega - n\omega_0)$$

Serie de Fourier



Transformada de Fourier



ejemplo: Tren de impulsos

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



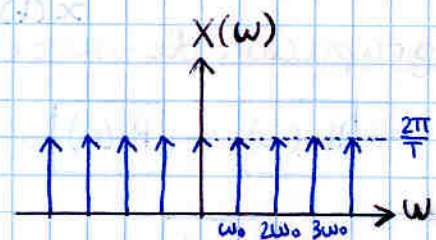
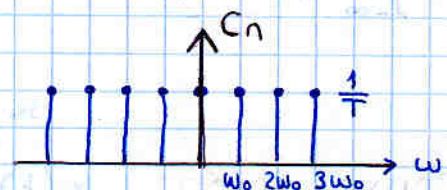
Serie de Fourier: C_n 's

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \exp[-j\omega_0 n t] dt = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[j\omega_0 n t]$$

Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - n\omega_0)$$



Propiedades de la TF

- Linealidad

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leftrightarrow X_1(\omega) \\ x_2(t) &\leftrightarrow X_2(\omega) \\ \alpha x_1 + \beta x_2 &\leftrightarrow \alpha X_1 + \beta X_2 \end{aligned}$$

- Simetrías

si $x(t)$ real $\Rightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| & \text{simetría par} \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) & \text{simetría impar} \end{cases}$$

si $x(t)$ real y par $\Rightarrow X(\omega)$ es real y par

- Desplazamiento

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

afecta sólo a la fase

- Escalado en el tiempo

$$x(kt) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

si uno se expande, el otro se comprime y viceversa

- Diferenciación

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

enfatisa altas frecuencias

- Integración

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

representa el nivel de continua atenúa las altas frecuencias

- Dualidad

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ X(t) &\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

- Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot Y^*(\omega) d\omega$$

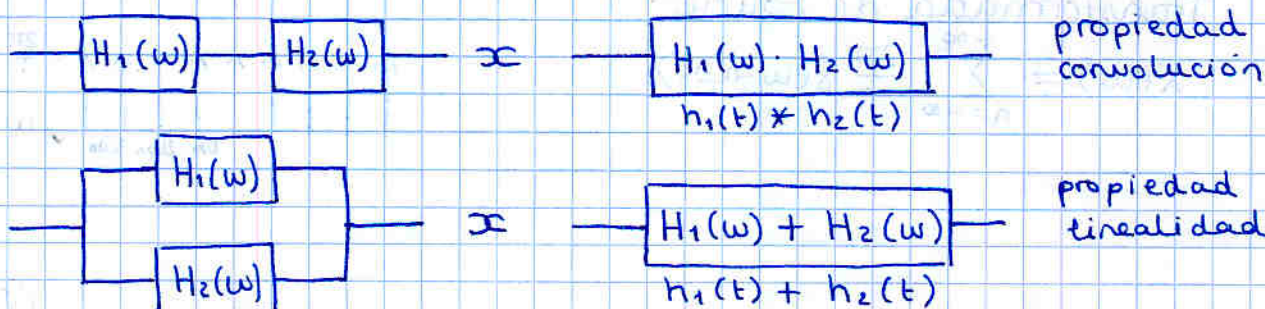
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \text{Energía}$$

densidad espectral de energía
se puede integrar entre ciertas bandas de frecuencia

- Convolución

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= X(\omega) \cdot Y(\omega) \\ x(t) \cdot y(t) &= \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * Y(\omega)] \end{aligned}$$

- Agrupación de sistemas



Demostraciones y ejemplos de propiedades

ejemplo linealidad:

$$TF[\cos \omega_0 t] = TF\left[\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}TF[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}TF[e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$


Nota: 1 tono = 2 deltas

Demostración $x(t)$ real y par $\Rightarrow X(\omega)$ real y par

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt}_{\text{par}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{par}} \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{impar}} dt}_{\text{impar}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

ejemplo: Integración

calcular $TF[u(t)]$ (función escalón)

$$\text{sabemos que } u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\text{y sabemos } TF[\delta(t)] = 1$$

$$\Rightarrow TF[u(t)] = \pi \cdot 1 \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \cdot 1$$

Convolución aplicada en sistemas lineales

$$\frac{X(\omega)}{x(t)} \boxed{H(\omega)} \frac{Y(\omega)}{y(t)}$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

además,

$$\text{Densidad Espectral de Energía: } |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$$

podemos alterar a voluntad la densidad espectral de energía eligiendo $|H(\omega)|^2 \Rightarrow$ filtrado

Ejemplo: de la propiedad convolución y derivación

$$x(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{¿}H(\omega)\text{?}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega X(\omega)}{Y(\omega)} = j\omega$$

en cualquier S.L.

Demostración propiedad convolución

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right] \cdot \exp(-j\omega t) dt &= \text{TF}[x(t) * y(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) \exp(-j\omega t) dt \right] d\tau \\ &= \text{TF}[y(t-\tau)] \\ &= \text{TF}[y(t)] \cdot e^{-j\omega \tau} \\ &= Y(\omega) \cdot e^{-j\omega \tau} \\ &= Y(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = Y(\omega) \cdot X(\omega) \end{aligned}$$

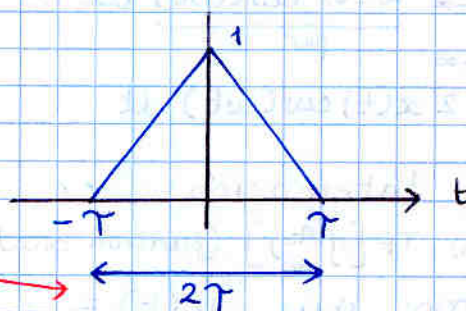
Nueva señal: Pulso triangular

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

↑
CUIDADO

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

aquí coinciden en Λ no.



se puede demostrar:

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} \left[\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

ejemplo:

$$\text{TF}\left[\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \frac{1}{\tau} \left(\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] \right)^2 = \frac{1}{\tau} \left[\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2\pi}\right) \right]^2$$

$$\text{TF}\left[\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \tau \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{2\pi}\right)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2\pi}\right)$$

Dualidad

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

supongamos ahora la misma función $X(\omega)$ pero en t

Dem:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega$$

$$\Rightarrow x(-t) \cdot 2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \exp(-j\omega t) d\omega$$

simple C.V. $t \leftrightarrow \omega$

$$\Rightarrow x(-\omega) \cdot 2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt = \text{TF}[X(t)] //$$

ejemplo (aplicando Dualidad)

Calcular $TF^{-1}[\text{rect}(\frac{\omega}{2\omega_B})]$

Estamos acostumbrados a ver rect en tiempo, no en frecuencia $\rightarrow$ dualidad

Sabemos de teoría $\text{rect}(\frac{t}{T}) \leftrightarrow T \text{sinc}(\frac{\omega T}{2\pi})$

$$T = 2\omega_B$$

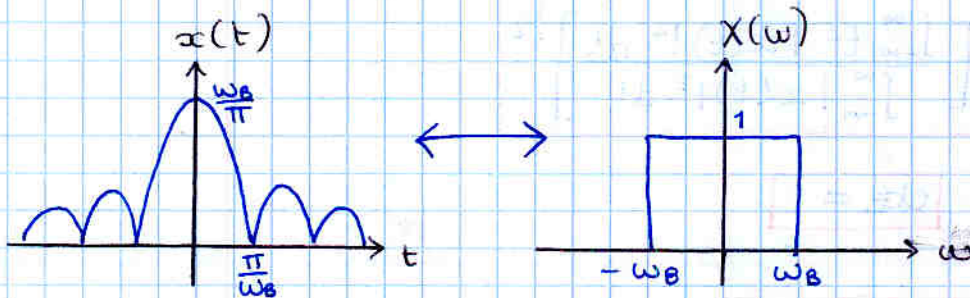
$$\text{rect}(\frac{t}{2\omega_B}) \leftrightarrow 2\omega_B \text{sinc}(\frac{\omega \omega_B}{\pi})$$

aplicamos dualidad:

$$2\omega_B \text{sinc}(\frac{t\omega_B}{\pi}) \leftrightarrow 2\pi \text{rect}(\frac{-\omega}{2\omega_B})$$

simetría par

$$\frac{\omega_B}{\pi} \text{sinc}(\frac{t\omega_B}{\pi}) \leftrightarrow \text{rect}(\frac{\omega}{2\omega_B})$$



Modulación

Dualidad $\delta(\omega - \omega_0) \leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$

$$\hookrightarrow e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Aplicando propiedad convolución

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Es decir, multiplicando una señal por $e^{j\omega_0 t}$ podemos desplazarla en la frecuencia

Caso práctico sabiendo $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Principio de Incertidumbre

→ Tiene que ver con el comportamiento "inverso" de las señales en el tiempo y en la frecuencia.

Principio de incertidumbre

$$T \cdot B \geq \text{cte}$$

T: medida de la duración temporal de la señal

B: medida del ancho de banda de la señal
(duración frecuencial)

La constante depende de la forma de medir la duración temporal / frecuencial.

T y B no pueden ser arbitrariamente pequeñas

Algunas fórmulas de medir B y T

→ si $B = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2}$ Ancho de Banda RMS

$$T = 2 \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \right]^{1/2}$$

$$\text{cte} = 1$$

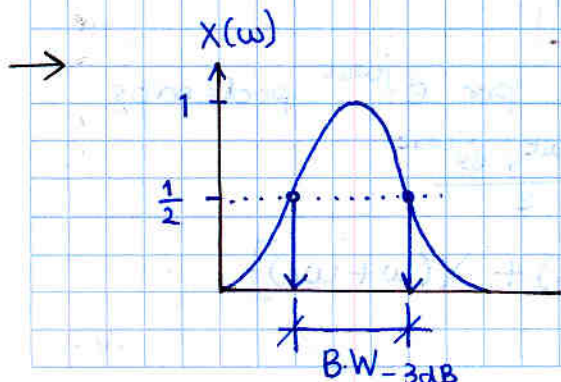
→ si $B = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega}{X(0)}$

Ancho de banda equivalente

considerando la señal como un rectángulo (la integral es el área) al dividir por $X(0)$, obtenemos la base

$$BT = \text{cte} = 2\pi$$

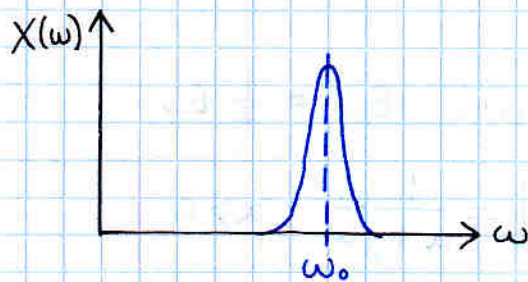
$$T = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt}{x(0)}$$



esta técnica en el tiempo es más difícil

Retardo grupo / fase

Supongamos una señal con toda su energía concentrada en torno a ω_0 .



* Consideremos que esa señal atraviesa un SLI de respuesta en frecuencia $H(\omega)$ y fase arbitraria $\angle H(\omega)$

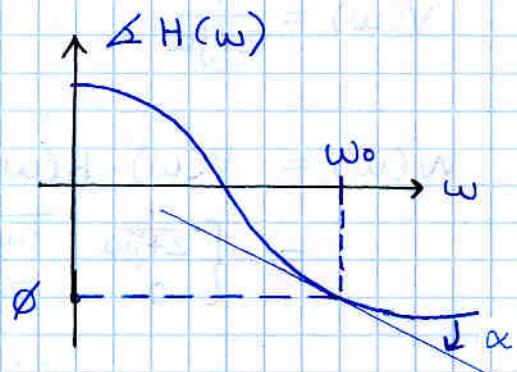
Podemos aproximar:

$$H(\omega) \approx |H(\omega)| \cdot e^{-j(\phi + \alpha \omega)}$$

$$\alpha = \left. \frac{d \angle H(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$$

$$\phi = \angle H(\omega) \big|_{\omega=\omega_0}$$

⇒ Retardo de Grupo



Como las frecuencias están muy concentradas en torno a ω_0 , se puede considerar $H(\omega)$ como lineal (recta), lo cual es un retardador.

A la salida tendríamos:

$$X(\omega) \rightarrow [H(\omega)] \rightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$Y(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{-j(\phi + \alpha \omega)} X(\omega)$$

$$y(t) = \text{TF}^{-1} \left[X(\omega) \cdot |H(\omega)| \cdot e^{-j(\phi + \alpha \omega)} \right]$$

es decir, sufre un retardo que depende de la derivada de $H(\omega)$ en ω_0 .

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{señal} \\ \text{filtrada}}}{x_f}(t - \alpha)$$

para señales de banda estrecha, retardo de grupo es el retardo de la envolvente de la señal

$$\text{Retardo de fase} = - \frac{\angle H(\omega)}{\omega} \quad \frac{(\text{rad})}{(\text{rad/s})} = (\text{s})$$

Si el sistema presenta fase lineal el retardo de grupo y el de fase coinciden

Proporciona el retardo en segundos que presenta el tono de una determinada frecuencia

Problema 4'14



$$v(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$H(w) = \begin{cases} 1 & |w| < w_B \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Calcular $V(w)$
- Calcular $W(w)$
- Cual debe ser w_B para que $E_w = \frac{1}{2} E_v$

a) Sabiendo:

$$\text{TF}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a+jw} \quad a > 0$$

$$V(w) = \frac{1}{2+jw}$$

b)

$$\begin{aligned} W(w) &= V(w) \cdot H(w) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2+jw} & |w| < w_B \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{aligned}$$

c)

$$E_w = \frac{1}{2} E_v$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(w)\|^2 dw$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-w_B}^{+w_B} \frac{1}{|2+jw|^2} dw = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|2+jw|^2} dw$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-w_B}^{w_B} \frac{1}{4+w^2} dw = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+w^2} dw$$

$$\frac{1/}{2\pi} \frac{1/}{4} \int_{-w_B}^{w_B} \frac{1}{1+(\frac{w}{2})^2} dw = \frac{1}{2} \frac{1/}{2\pi} \frac{1/}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{w}{2})^2} dw$$

$$\arctg\left(\frac{w}{2}\right) \Big|_{-w_B}^{w_B} = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{w}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

arctg función impar

$$2 \arctg\left(\frac{w_B}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctg\left(\frac{w_B}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$w_B = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$w_B = 2$$

Problema 4.17. Hallar $H_L(\omega)$ y $H_C(\omega)$

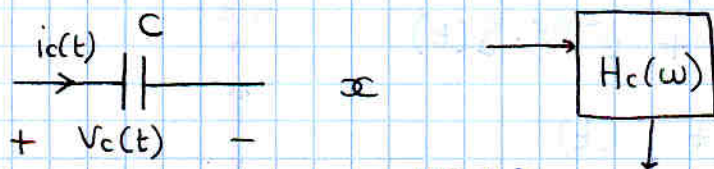


sabiendo $[v_L(t)] = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$

$$TF [v_L(t)] = L TF \left[\frac{di_L(t)}{dt} \right]$$

$$TF [v_L(t)] = L j\omega TF [i_L(t)]$$

$$H_L(\omega) = \frac{V_L(\omega)}{I_L(\omega)} = j\omega L \quad (z = \frac{V}{I})$$

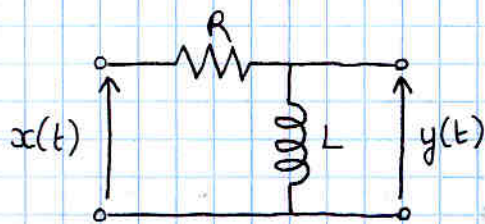


$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$I_C(\omega) = C j\omega V_C(\omega)$$

$$H_C(\omega) = \frac{V_C(\omega)}{I_C(\omega)} = \frac{1}{j\omega C}$$

Problema 4.18



a) Hallar $H(\omega)$



$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

forma más elaborada (pero más fundamental)

$$y(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \begin{matrix} \text{(expresión de una L)} \\ \text{/(ley de Ohm)} \end{matrix}$$

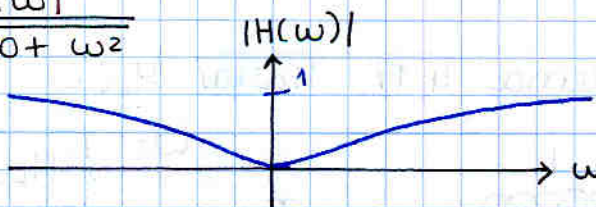
$$y(t) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{x(t) - y(t)}{R} \right)$$

$$Y(\omega) = \frac{L}{R} [j\omega X(\omega) - j\omega Y(\omega)]$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

b) Dibujar $|H(\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{100 + \omega^2}}$

$\omega = 0 \rightarrow |H(\omega)| = 0$
 $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |H(\omega)| = 1$



c) calcular $h(t)$

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{10 + j\omega}$$

$$H(\omega) = j\omega \left[\frac{1}{10 + j\omega} \right]$$

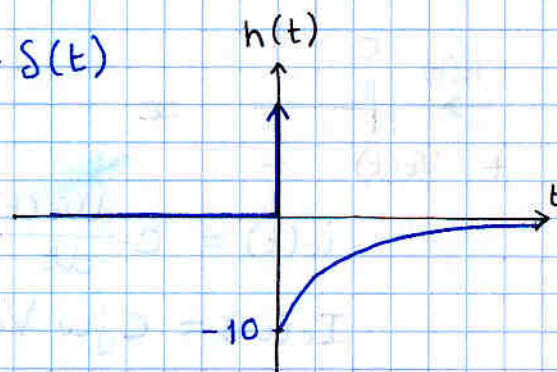
sabiendo $\frac{1}{a + j\omega} \leftrightarrow e^{-at} \cdot u(t)$

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left[\text{TF}^{-1} \left[\frac{1}{10 + j\omega} \right] \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[e^{-10t} u(t) \right]$$

$$= -10 e^{-10t} \cdot u(t) + e^{-10t} \cdot \delta(t)$$

$$h(t) = -10 e^{-10t} u(t) + \delta(t)$$



Problema 4.22

Demostrar que autocorrelación $R_x(t) \longleftrightarrow |X(\omega)|^2$

$$R_x(t) = x(t) * x^*(-t)$$

$$\text{TF} [R_x(t)] = \text{TF} [x(t) * x^*(-t)]$$

$$= X(\omega) \cdot \text{TF} [x^*(-t)]$$

$$= X(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

c.v. $-t = t_0$
 $= X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t_0) \cdot e^{j\omega t_0} dt$

$$= X(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) e^{-j\omega t_0} dt \right]^*$$

$$= X(\omega) \cdot X^*(\omega)$$

$$= |X(\omega)|^2$$

TEMA 5. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Introducción

- Aumenta el conjunto de señales y sistemas que tienen transformada $e^{-\sigma t} \cdot x(t)$
- Amplia las autofunciones de los SLI (a parte de $e^{j\omega t}$)
 $e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{st} \quad s \in \mathbb{C}$
- Permite caracterizar señales y sistemas con condiciones iniciales no nulas.

Definición: Transformada de Laplace bilateral

$$TL_B[x(t)] = X_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega$$

$$x(t) \leftrightarrow X_B(s)$$

$$(e^{-st} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t})$$

Definición aplicando transformada de Fourier:

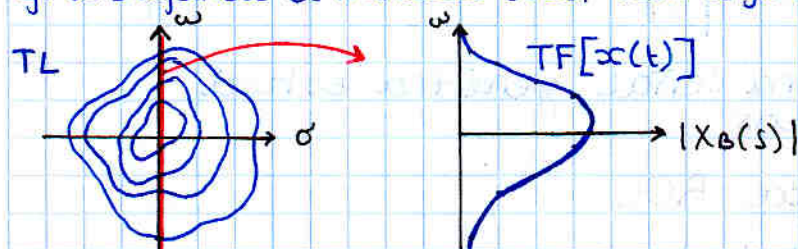
$$TL_B[x(t)] = TF[e^{-\sigma t} \cdot x(t)]$$

Es decir, la transformada de Laplace está definida en el plano complejo $s \in \mathbb{C}$, siendo la coordenada real $Re(s) = \sigma$ la pulsación y la coordenada imaginaria $Im(s) = \omega$ el exponente en $e^{-\sigma t} x(t)$

Fijando un valor de σ , la recta vertical en ω representa la transformada de Fourier de $e^{-\sigma t} x(t)$

Si $\sigma = 0$, el eje imaginario representa la $TF[x(t)]$ (tanto valores del módulo como del argumento)

ej. dibujando el módulo sólo. (con argumento tb serviría)



Definición: Transformada de Laplace unilateral

$$TL[x(t)] = X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$TL_B[x(t)] = TL[x(t) \cdot u(t)] + TL[x(-t) \cdot u(t)]_{s \rightarrow -s}$$

C.V.

De alguna forma, estamos quitando la parte negativa, donde $e^{-\sigma t}$ es grande y multiplicar por ello no ayuda a que la función tenga TF.

Ya no se cumple la relación con la TF; salvo señales causales.

Para señales causales ($x(t)=0 \quad \forall t < 0$)

$$TL[x] = TL_B[x] = TF[e^{-\sigma t} x(t)]$$

ademas:

• Región de convergencia (ROC)

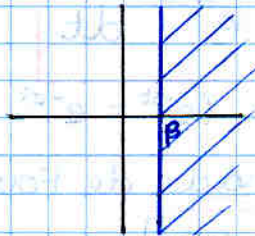
La región del plano $s \in \mathbb{C}$ donde $TL[x](s)$ converge
 = donde $TF[e^{-\sigma t} x(t)]$ converge
 Viene determinada únicamente por $\text{Re}\{s\} = \sigma$

• ROC de una señal causal

$$\text{Re}(s) > \beta$$

si $\beta = -\infty \Rightarrow$ todo el plano

$x(t)$ causal
 $\Rightarrow$ si converge en σ_0 ,
 converge en $\forall \sigma > \sigma_0$
 ya que $e^{-\sigma_0 t} > e^{-\sigma t}$
 $\forall \sigma > \sigma_0$
 $\forall t > 0$

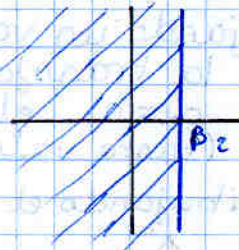
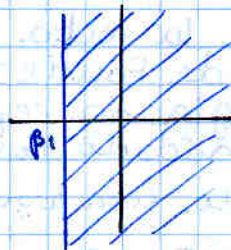
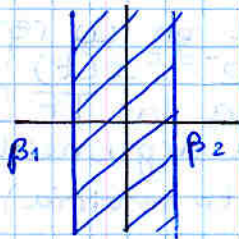


• ROC de una señal genérica

sabiendo $TL_B[x(t)] = TL[x(t) \cdot u(t)] + TL[x(-t)u(t)]_{s \rightarrow -s}$

$$ROC\{TL_B[x(t)]\} = ROC[TL[x(t) \cdot u(t)]] \cap ROC[TL[x(-t)u(t)]_{s \rightarrow -s}]$$

parte causal parte anticausal



En general, la ROC de una señal genérica estará limitada por dos lados

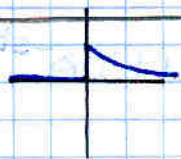
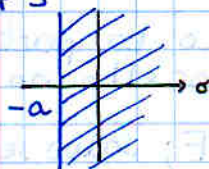
• Misma TL_B y distinta ROC

si NO imponemos causalidad puede ocurrir que dos señales tengan la misma TL_B y sólo se distingan en la ROC.

ej: $x(t) = e^{-at} u(t)$

$$X_B(s) = \frac{1}{a+s}$$

ROC
 $\text{Re}(s) > -a$



$x(t) = -e^{-at} u(-t)$

$$X_B(s) = \frac{1}{a+s}$$

ROC

$\text{Re}(s) < -a$



Algunos cálculos de TL

• $x(t) = e^{-at} u(t)$

$$X_B(s) = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(a+s)t} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s+a} \quad \text{si } a+\sigma > 0 \\ \text{ROC: } \sigma > -a$$

• $x(t) = e^{-3t} u(t) - 5e^{-(-1)t} u(-t)$

$$e^{-3t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3} \quad \text{ROC: } \text{Re}(s) > -3$$

$$-5e^{-(-1)t} u(-t) \longleftrightarrow \frac{5}{s-1} \quad \text{ROC: } \text{Re}(s) < 1$$

$$x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3} + \frac{5}{s-1} \quad \text{ROC: } -3 < \text{Re}(s) < 1$$

• $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0$

• $\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad \text{ROC: todo el plano } s$

Recuerda

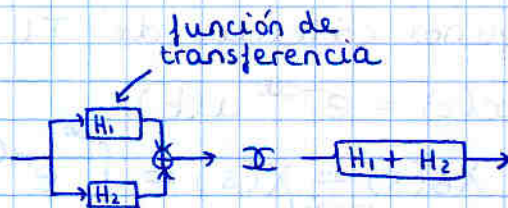
$$e^{at} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad \text{ROC: } \text{Re}(s) > a$$

Propiedades

Linealidad:

$$a x_1 + b x_2 \leftrightarrow a X_1 + b X_2$$

$ROC_1 \cap ROC_2$



Desplazamiento en t

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 s} X(s) \quad ROC_x \text{ misma}$$

Escalado en t

$$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad ROC \quad |Re(s)| > \alpha \beta$$

Desplazamiento en s.

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0) \quad ROC \quad |Re(s)| > \beta + Re(s_0)$$

Integración en t

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad ROC \text{ puede modificarse}$$

Diferenciación en t

$$\frac{d x(t)}{dt} \leftrightarrow s \cdot X(s) - x(0^-) \quad ROC \text{ puede modificarse}$$

en general

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x^{(1)}(0^-) - \dots$$

↑ derivadas

... $s x^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-)$

condiciones iniciales
(si son nulas no están)

Diferenciación en s

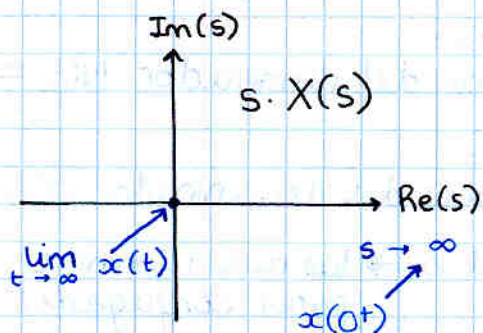
$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

Convolución:

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s) \cdot H(s)$$



Teorema del valor inicial / final



inicial:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

esto NO será cierto si el 0 está fuera de la ROC, aunque de un valor

ejemplo:

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

$$TL[x(t)] = \frac{1}{s+a}$$

$$x(0^+) = 1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+a}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+a} \quad (\text{con } a > 0)$$

ejemplo de aplicación de propiedades

$$x(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{2+s}$$

$H(s)$

$$y(t) = \frac{2}{3}(e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}) u(t)$$

$$Y(s) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right)$$

$$ROC_y = ROC_1 \cap ROC_2 \cap ROC_3 \\ Re > -1 = Re > -1 \cap Re > -2 \cap Re > -3$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{3} + \frac{2(s+2)}{3(s+1)} - \frac{2(s+2)}{3(s+3)}$$

T.L. Racionales

Aquellas que podemos expresar como cociente de polinomios en s

$$\frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot s^k} = \frac{N(s)}{D(s)} = X(s)$$

Ceros:

raíces del numerador $N(s) = 0$

Polos:

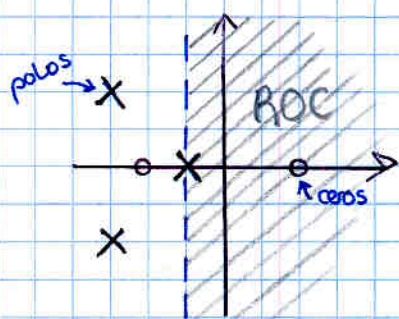
raíces del denominador $D(s) = 0$

si a_k y b_k (coeficientes) son reales $\Rightarrow$ las raíces forman pares conjugados.

* Polos y ceros permiten caracterizar $X(s)$

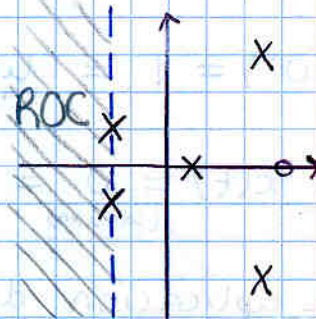
Los polos delimitan la ROC ($X(\text{polo}) = \infty$) están fuera de la ROC

si $x(t)$ causal



recuerda que la TL no tiene sentido fuera de la ROC, aunque converga

si $x(t)$ anticausal



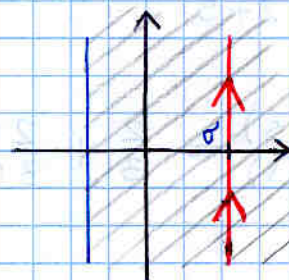
T.L. Inversa

hay 3 métodos:

- Utilizar propiedades y pares de TL conocidos $x(t) \leftrightarrow X(s)$
- Por integración:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

$\forall \sigma$ dentro de la ROC



- Sólo si $X(s)$ es racional $\Rightarrow$ descomposición en fracciones simples

$$X(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_M s^M}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_N s^N} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

donde p_i son los polos y

$$A_i = X(s) \cdot (s-p_i) \Big|_{s=p_i}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_1 e^{p_1 t} u(t) + A_2 e^{p_2 t} u(t) + \dots + A_n e^{p_n t} u(t)$$

otros casos: (ej) $\frac{3x+2}{(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x+3}$

polos
complejos

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

en este caso
falla el
método

polos
repetidos

$$\frac{5x+3}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

otro caso
 $M > N$
 $\text{ord}(\text{numerador}) > \text{ord}(\text{denom})$
hay que hacer
división de fracciones
 $\frac{P}{Q} = c, \text{ resto } R \Leftrightarrow P = Qc + R$
 $\frac{P}{Q} = c + \frac{R}{Q}$

ejemplo: $X(s) = \frac{2s+1}{s^3+3s^2-4s}$

Ceros: $s = -\frac{1}{2}$

Polos: $D(s) = s^3 + 3s^2 - 4s$

candidatos a polos: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

$D(-1) \neq 0$

$D(1) = 0$ ¡ es polo!

$D(s) = (s-1)(s^2+4s)$
 $= s(s-1)(s+4)$

que no se nos olvide incluir todos los términos aunque sean cero

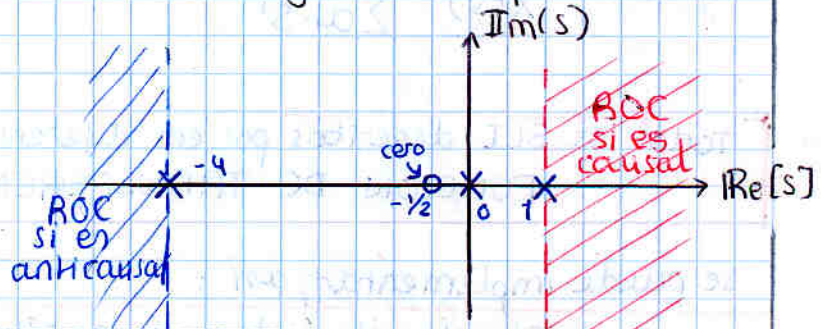
1	3	-4	0
1	1	4	0
1	1	4	0

polos $\begin{cases} s=0 \\ s=1 \\ s=-4 \end{cases}$

lo tomaremos como causal.

$\frac{2s+1}{s(s-1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+4}$

Diagrama de polos /ceros



sacar A:

- mult por s

$\frac{2s+1}{(s-1)(s+4)} = A + \frac{Bs}{s-1} + \frac{Cs}{s+4}$

- sustituir $s=0$

$\frac{1}{-4} = A$

sacar B

$\frac{2s+1}{s(s+4)} \Big|_{s=1} = B = \frac{3}{5}$

sacar C

$\frac{2s+1}{s(s-1)} \Big|_{s=-4} = C = -\frac{7}{20}$

$\frac{2s+1}{s(s-1)(s+4)} = -\frac{1}{4s} + \frac{3/5}{s-1} + \frac{-7/20}{s+4}$

$\Rightarrow x(t) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{5}e^t - \frac{7}{20}e^{-4t} \right) u(t)$

cuidado, es e elevado a el polo, no a menos el polo
 $e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$

SLI racionales de ecuaciones diferenciales

partimos de la expresion de un SLI ya vista (con C.I. nulas)

$$(\sum a_i D^i) y(t) = (\sum b_i D^i) x(t)$$

D^i operador derivada i -ésima
(o integral $-i$ -ésima)
Transformada de Laplace

$$\sum a_i s^i Y(s) = \sum b_i s^i X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$$

ej.

$$y'''(t) + 3y''(t) - y'(t) = 3x''(t) - x(t)$$

↓ TL

$$s^3 Y(s) + 3s^2 Y(s) - sY(s) = 3s^2 X(s) - X(s)$$

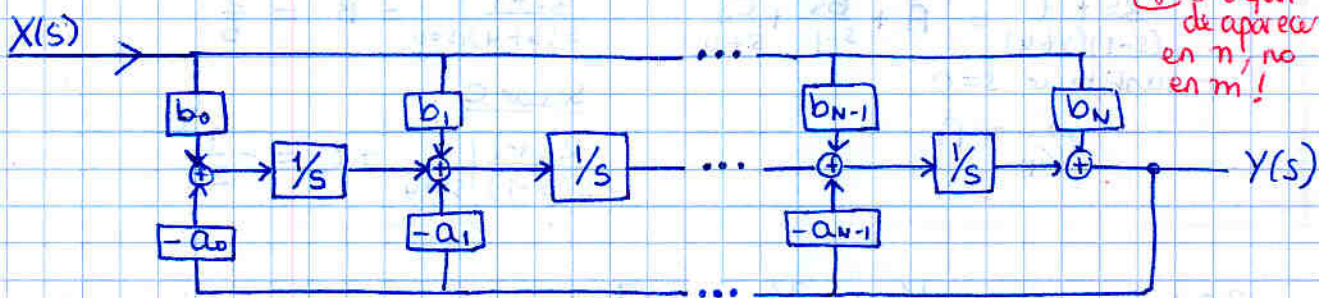
$$[s^3 + 3s^2 - s] Y(s) = [3s^2 - 1] X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s^2 - 1}{s^3 + 3s^2 - s}$$

Todos los SLI descritos por ecs. diferenciales con. c.I. nulas tienen
FUNCION DE TRANSFERENCIA RACIONAL

se puede implementar asi:

$$H(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$



! los coef b dejan de aparecer en n, no en m!

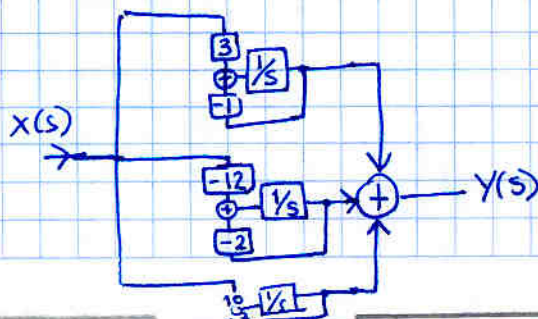
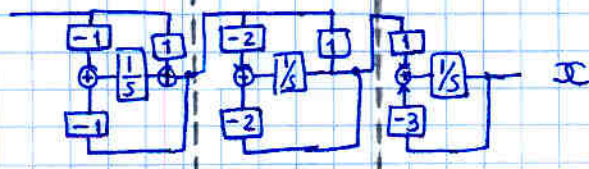
! a_n no aparece, así que no la pongas, sólo llega hasta a_{n-1}

En el dominio del tiempo, el $1/s$ era un integrador.

Esta es por tanto una forma más fácil de implementar un SLI que define una ec. diferencial que como lo vimos en el tema 2, (había que integrar y despejar cosas)

También podemos hacer multiplicaciones como conexiones en cascada, o reescribirlo en fracciones simples y que sea un paralelo.

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{s-2}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{3}{s+1} + \frac{-12}{s+2} + \frac{10}{s+3}$$



Estabilidad

Formas de comprobarlo:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists TF \Leftrightarrow \text{la ROC incluye el eje } j\omega}$$

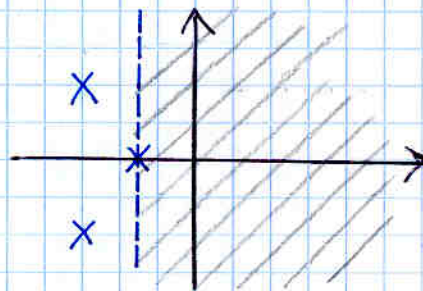
ya que
 $TF[h(t)] = H(s)|_{s=j\omega}$

Sistema Racional

↳ Causal

$$\operatorname{Re}[s_{\text{polos}}] < 0$$

los polos deben estar
en el semiplano
izquierdo



↳ Anticausal

$$\operatorname{Re}[s_{\text{polos}}] > 0$$

ejem
 $e^{10t} \cdot u(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{s-10}$

tiene polos en 10
es racional
es causal, $\operatorname{Re}(s_{\text{polos}}) > 0!$