T2. ONDAS PLANAS

Estudio de la expresión fasorial

si esto sea complejo permite tener fase inicial ($t=0, r=0$)

- **Estudio exponencial**: mantenemos signo <0 $\quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$
  sabiendo $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, sacamos $\vec{k}$
  $\hat{k}$ - dirección de propagación
  ↳ Param propagación
  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad f = \frac{c}{\lambda}$

- **Estudio de la amplitud**: $\vec{E}_0 = \vec{E}_r + j\vec{E}_i$
  ↳ Polarización
  → Lineal: $\vec{E}_i \times \vec{E}_r = 0$ $\qquad$ Elíptica: resto de casos
  → Circular $\begin{cases} \vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0 \\ |\vec{E}_r| = |\vec{E}_i| \end{cases}$
  $(\vec{E}_i \times \vec{E}_r)\cdot\hat{k} \begin{cases} >0: \text{dextrógira, a derechas, +va (mano derecha)} \\ <0: \text{levógira, a izquierdas, −va} \end{cases}$

  ↳ Descomposición:
  → Desc. en lineales: $\vec{E}_0 = \vec{E}_1\hat{e}_1 + \vec{E}_2\hat{e}_2$ $\quad \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ ortogonales
  → Desc. en circulares: $\vec{E}_0 = \vec{A}\underbrace{\frac{\hat{e}_1 + j\hat{e}_2}{\sqrt{2}}}_{\hat{e}_a} + \vec{B}\underbrace{\frac{\hat{e}_1 - j\hat{e}_2}{\sqrt{2}}}_{\hat{e}_b}$

  $\hat{e}_{im}\cdot\hat{e}_{re} = 0$, $|\hat{e}_{im}| = |\hat{e}_{re}|$ } pol. circ.
  para saber sentido $(\hat{e}_{im}\times\hat{e}_{re})\cdot\hat{k} \gtrless 0$

  ej. típico $\hat{k} = \hat{z}$
  $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + j\hat{y})$ → izquierdas
  $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - j\hat{y})$ → derechas
  $\vec{E} = A(\hat{x} + j\hat{y}) + B(\hat{x} - j\hat{y})$
  igualando coef → A, B

  caso general $\hat{e}_1 = \hat{b}_r$, $\hat{e}_2 = \hat{b}_i$
  si $\vec{E}_r\cdot\vec{E}_i = 0$ → tomar $\hat{e}_1 = \hat{e}_r$, $\hat{e}_2 = \hat{e}_i$

  ↳ Ejes de la elipse
  $\vec{E}_0 = \vec{E}_r + j\vec{E}_i$ ⟶ 1. si $\vec{E}_r\cdot\vec{E}_{im} = 0$ → son los ejes
  2. si $\vec{E}_r\cdot\vec{E}_{im} \neq 0$ $\quad \vec{E} = \vec{b}e^{j\psi}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{z}}$
  los ejes son b_{re} y b_{im}:
  $\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0 = |\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0|e^{-j2\psi_0}$ } sacamos ψ → $\vec{b} = \vec{E}_0 e^{-j\psi} = \underbrace{\vec{b}_{re} + j\vec{b}_{im}}_{\text{ejes}}$ orientación $\frac{b_{re}}{b_{im}}$
  complejo: escribimos módulo y fase, tb sirve $\psi_0 = \psi + n\frac{\pi}{2}$
  $\psi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\vec{E}_r\cdot\vec{E}_{im}}{E_r^2 + E_i^2}$
  ↳ Relación axial: $RA = \left(\frac{|b_{re}|}{|b_{im}|}\right)^{\pm 1} \geq 1$ — el semieje mayor será el de mayor módulo

  ↳ Campo $\vec{H}$ asociado $\quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ (MISMA exponencial)
  $\vec{H}_0 = \frac{\hat{k}\times\vec{E}_0}{\eta}$ $\;(\eta \to 120\pi)$ ⋯⋯> $\vec{E}_0 = \eta(\vec{H}_0\times\hat{k})$
  ¡no $\vec{H}$!

  ↳ Potencia transmitida
  $\vec{P}_m = \frac{1}{2}\frac{|\vec{E}_0|^2}{\eta}\hat{k}$ $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ $\quad$ CUIDADO: $|\vec{E}_0|^2 \overset{\text{módulo complejo}}{=} \vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*$
  si $\vec{E}_r\cdot\vec{E}_i = 0$: $|\vec{E}_0|^2 = |\vec{E}_r|^2 + |\vec{E}_i|^2$

Incidencia normal

C.C. Expresión general
$\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ → comp. tangencial $\vec{E}$ igual a ambos lados, i.e. continua
$\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$ → dif. en comp. tang. $\vec{H}$ es igual a $\vec{J}_s$

Incidencia normal sobre conductor perfecto

para pol. lineal (sino descomponer)

$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{oi}\,\hat{x}\,e^{-jkz} \\ \vec{H}_i = \frac{\hat{k}\times\vec{E}_i}{\eta} = \frac{E_{oi}}{\eta}\hat{y}e^{-jkz} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{E}_r = -E_{oi}\,\hat{x}\,e^{jkz} \\ \vec{H}_r = \frac{(-\hat{k})\times\vec{E}_r}{\eta} = \frac{E_{oi}}{\eta}\hat{y}e^{jkz} \end{cases}$

$\vec{J}_s = \hat{n}\times\vec{H}|_{z=0} = \frac{2E_{oi}}{\eta}\hat{x}$

Campo Total $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

$\vec{E} = E_{oi}\hat{x}\underbrace{\left[e^{-jkz} - e^{jkz}\right]}_{-2j\,\mathrm{sen}\,kz}$

$\vec{H} = \frac{E_{oi}}{\eta}\hat{y}\underbrace{\left[e^{-jkz} + e^{jkz}\right]}_{2\cos kz}$

Es una onda estacionaria $\quad \vec{P}_m = \vec{E}\times\vec{H}^* = 0$

Incidencia normal sobre dieléctrico perfecto

$\eta_x = \sqrt{\frac{\mu_x}{\varepsilon_x}}$, $k_x = \omega\sqrt{\mu_x\varepsilon_x}$

$\varepsilon_1, \mu_1 \quad \varepsilon_2, \mu_2$

$\vec{E}_i = E_{oi}\,\hat{x}\,e^{-jk_1z}$ $\qquad \vec{E}_t = E_{ot}\,\hat{x}\,e^{-jk_2z}$

$\vec{E}_r = E_{or}\,\hat{x}\,e^{jk_1z}$

$E_{or} = \rho E_{oi}$ $\quad \rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ coef. de reflex. $\qquad E_{ot} = \tau E_{oi}$ $\quad \tau = 1 + \rho$ coef. de transm.

$\vec{E}_1 = E_{oi}\hat{x}\left[e^{-jk_1z} + \rho e^{jk_1z}\right]$ $\qquad \vec{E}_2 = \tau E_{oi}\hat{x}e^{-jk_2z}$

En general $\rho = |\rho|e^{j\phi}$ (cte)

Onda semiestacionaria

(ϕ es cte)

$|\vec{E}_1| = \sqrt{[\cos k_1z + |\rho|\cos(k_1z + \phi)]^2 + [-\mathrm{sen}\,k_1z + |\rho|\,\mathrm{sen}(k_1z + \phi)]^2}\,|E_{ot}|$

$|\vec{E}_1| = |E_{oi}|\sqrt{1 + |\rho|^2 + 2|\rho|\cos(2k_1z + \phi)}$

$|\vec{E}_1|_{max} = (1 + |\rho|)|E_{oi}|$
$|\vec{E}_1|_{min} = (1 - |\rho|)|E_{oi}|$
$s = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$ relación de onda estacionaria
si $|\rho| = 1$ onda estacionaria total $s = \infty$

$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 = \vec{P}_{mi}(1 - |\rho|^2) = \frac{|\tau|^2|E_{oi}|^2}{2\eta_2}\hat{z}$

Resumen: Incidencia oblicua sobre conductor perfecto

- **Onda TE**

$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{oi}\,\hat{y}\,e^{-jk(\mathrm{sen}\theta x + \cos\theta z)} \\ \vec{H}_i = \frac{\hat{k}_i\times E_{oi}\hat{y}}{\eta}e^{-jk(\mathrm{sen}\theta x + \cos\theta z)} \end{cases}$ $\quad \frac{E_{oi}}{\eta}(\mathrm{sen}\,\theta_i\hat{z} - \cos\theta_i\hat{x})$

Aplicando la C.C. en $z=0$: $\vec{E}_i|_{z=0} + \vec{E}_r|_{z=0} = 0$ → $\boxed{E_{or} = -E_{oi}}$, $\theta_r = \theta_i$

$\begin{cases} \vec{E}_r = -E_{oi}\,\hat{y}\,e^{-jk(\mathrm{sen}\theta x - \cos\theta z)} \\ \vec{H}_r = -\frac{E_{oi}}{\eta}(\mathrm{sen}\theta\hat{z} + \cos\theta\hat{x})e^{-jk(\mathrm{sen}\theta x - \cos\theta z)} \end{cases}$

Al sumar campo total (agrupando e's en senos) da onda estacionaria que se propaga en x ($e^{-jkx\,\mathrm{sen}\theta}$)
$\vec{E}$ tiene ceros en $z = \frac{n\pi}{k\cos\theta}$

$\vec{P}_m = \frac{2|E_{oi}|^2}{\eta}\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}^2(kz\cos\theta)\hat{x}$

$Z_{TE} = \frac{E_{transv}}{H_{transv\,x}} = \frac{E_y}{H_z} = \frac{\eta}{\mathrm{sen}\theta}$

$\beta = k\,\mathrm{sen}\theta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$
$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\mathrm{sen}\theta}$ (similitud onda plana)

Guía ondas placas paralelas (TE)
conductor en $a = \frac{n\pi}{k\cos\theta}$
$\cos\theta = \frac{n\pi}{ka}$
$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{ka}\right)^2}$
└ complejo: aten.
└ real $k > \frac{n\pi}{a}$
$f_c = \frac{n}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Onda rectangular: añadir techo y suelo pues $E_{tang} = 0$

- **Onda TM**

$\begin{cases} \vec{H}_i = \frac{E_{oi}}{\eta}\hat{y}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} \\ \vec{E}_i = E_{oi}\underbrace{(\cos\theta_i\hat{x} - \mathrm{sen}\theta_i\hat{z})}_{\hat{e}_{Eoi}}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} \end{cases}$

aplicando C.C. $\boxed{E_{or} = E_{oi}}$

$\vec{E}_r = E_{oi}\underbrace{(-\cos\theta_i\hat{x} - \mathrm{sen}\,\theta_i\hat{z})}_{\hat{e}_{Eor}}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}$

Al sumar campo total, onda estacionaria q se propaga en x
$\vec{E}_x$ tiene ceros en $z = \frac{n\pi}{k\cos\theta}$ $\qquad \beta = k\,\mathrm{sen}\theta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ $\quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\mathrm{sen}\theta}$

$\vec{P}_m = \frac{|E_{transv\,x}|^2}{2Z_{TM}}\hat{x} = \frac{1}{2}Z_{TM}|H_{transv\,x}|^2\hat{x}$ $\qquad Z_{TM} = \frac{E_{transv\,x}}{H_{transv\,x}} = \eta\,\mathrm{sen}\theta$

Guía ondas placas paralelas (TM)
$a = \frac{n\pi}{k\cos\theta}$ — $\cos\theta = \frac{n\pi}{ka}$
$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{ka}\right)^2}$
└ complejo → aten.
└ real $k > \frac{n\pi}{a}$
$f > \frac{n}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

No se puede onda rectangular

Modo TEM
$n = 0$, $\cos\theta = 0$ → $\vec{E} = -2E_{oi}\hat{z}e^{-jkx}$, $\vec{H} = \frac{2E_{oi}}{\eta}\hat{y}e^{-jkx}$ $\quad f_c = 0$

Incidencia oblicua sobre dieléctrico perfecto

TE

$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{oi}\,\hat{y}\,e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} \\ \vec{H}_i = \frac{E_{oi}}{\eta_1}[-\cos\theta_i\hat{x} + \mathrm{sen}\theta_i\hat{z}]e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{E}_r = E_{or}\,\hat{y}\,e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}} \\ \vec{H}_r = \frac{E_{or}}{\eta_1}[\cos\theta_i\hat{x} + \mathrm{sen}\theta_i\hat{z}]e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{E}_t = E_{ot}\,\hat{y}\,e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}} \\ \vec{H}_t = \frac{E_{ot}}{\eta}[-\cos\theta_t\hat{x} + \mathrm{sen}\theta_t\hat{z}]e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}} \end{cases}$

$\vec{k}_i = k_1[\mathrm{sen}\theta_i\hat{x} + \cos\theta_i\hat{z}]$
$\vec{k}_r = k_1[\mathrm{sen}\theta_r\hat{x} - \cos\theta_r\hat{z}]$
$\vec{k}_t = k_2[\mathrm{sen}\theta_t\hat{x} + \cos\theta_t\hat{z}]$

Aplicando la C.C.
$E_{tang}|_{z=0}$ es continuo, se obtienen 2 resultados
$\theta_i = \theta_r$
$n_1\,\mathrm{sen}\theta_i = n_2\,\mathrm{sen}\,\theta_t$ (Ley de Snell)
índice de refracción: $n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ (mayor cuanto más denso)

Se obtiene: $E_{or} = \rho E_{oi}$, $E_{ot} = \tau E_{oi}$
$\rho = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_t + \eta_2\cos\theta_i}$
$\tau = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_t + \eta_2\cos\theta_i}$

Transmisión total (ángulo de Brewster)
cuando $\rho = 0$. si $\mu_1 = \mu_2$ (casi siempre) → $\mathrm{sen}^2\theta_i > 1$ no ∃ θ_B
si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ → $\mathrm{tg}\,\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

TM

aplicando las C.C. se obtiene
$\theta_i = \theta_r$
$n_1\,\mathrm{sen}\theta_i = n_2\,\mathrm{sen}\theta_t$
se llega a:
$E_{or} = \rho E_{oi}$, $E_{ot} = \tau E_{oi}$
$\rho = \frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$
$\tau = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$

Transmisión total (ángulo de Brewster)
cuando $\rho = 0$ $\quad$ si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$: $\mathrm{sen}^2\theta_i > 1$ → ∄ θ_B
si $\mu_1 = \mu_2$ (casi siempre) → $\mathrm{tg}\,\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ ← 2º medio, ← 1º medio

Reflexión Total entre dos medios dieléctricos (no es $\tau = 0$)
si $n_1 > n_2$ (más denso → menos denso) → $\theta_i < \theta_t$ → si $\mathrm{sen}\,\theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1}$ (ángulo crítico) → $\theta_t = 90°$, $|\rho| = 1$
si excedemos el ángulo crítico
$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen}\,\theta_{ic} > \frac{n_2}{n_1} \\ \mathrm{sen}\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\mathrm{sen}\theta_i\end{array}\right\}$ → $\mathrm{sen}\theta_t > \frac{n_1}{n_2}\frac{n_2}{n_1} = 1$ → $\cos\theta_t = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_t}$ imaginario
E_t será evanescente

Incidencia normal sobre discontinuidades planas

① ② ③ ...

Dato inicial:
- medio semiinfinito $\rho = 0$, $Z = \eta$
- conductor perfecto $\rho = -1$, $Z = 0$

def ρ y Z

A: $\rho(z) = \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta}$

B: $\rho(z) = \rho(d)\,e^{2jk(z-d)}$

C: $Z(z) = \eta\frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$

o la alternativa directa

A': $Z(z) = \eta\frac{Z(d)\cos k(z-d) - j\eta\,\mathrm{sen}\,k(z-d)}{\eta\cos k(z-d) - jZ(d)\,\mathrm{sen}\,k(z-d)}$

⟹ $Z(0) = \eta\frac{Z(d)\cos kd + j\eta\,\mathrm{sen}\,kd}{\eta\cos kd + jZ(d)\,\mathrm{sen}\,kd}$

$\rho(z) = \frac{E^-(z)}{E^+(z)} = \frac{E_0^-}{E_0^+}e^{j2kz}$
esta vez no es constante por los medios
$\vec{Z}(z) = \frac{\hat{k}\times\vec{E}}{\vec{H}}$
- ρ es cont. en un mismo medio
- Z es cont. siempre (para pasar de medios)

Potencia:
$\vec{P}_{m_1} = \vec{P}_{m_2} = \ldots = \vec{P}_i(1 - |\rho|^2)$ cuidado $(1 - |\rho_0|^2) \neq (1 - |\rho_1|^2)$ ha de ser del PRIMER medio

Caso particular
· último medio es conductor $\rho = -1$, $Z = 0$ } $|\rho| = 1$
· medios sin pérdidas: $k \in \mathbb{R}$ → $|\rho|$ es cte
$|\rho| = 1$ → $\vec{P}_m = 0$ → no hay flujo de potencia neto en ningún medio
⇒ Onda estacionaria en cada medio.

distancia z tal que
$Z(z) = \infty$, $\rho(z) = 1$ ⇒ $\vec{H}$ se anula, $\vec{E}$ es máximo
y
$Z(z) = 0$, $\rho(z) = -1$ ⇒ $\vec{E}$ se anula, $\vec{H}$ es máximo

nota útil: Z es periódica cada $\lambda/2$ (por lo que si $d = n\lambda/2$, la $Z(0) = Z(d)$)

Propagación en materiales con pérdidas

Caso general

$\varepsilon = \varepsilon' - j\underbrace{\varepsilon''}_{\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}$

$\mu = \mu' - j\mu''$

tangente de pérdidas $tg\,\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$

$k = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ → dos raíces. Tomar $Im(k) < 0 \rightarrow \alpha > 0$

β [rad/m], α [Np/m]; $\alpha\,[dB/m] = 10 \log e^{2\alpha}$

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta' - j\eta''$ $[\Omega]$ dos raíces: Tomar $Re(\eta) > 0$ (resistencia positiva)

En incidencia siguen valiendo $\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\rho| e^{j\phi}$, $s = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$

El campo queda: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\beta z} e^{-\alpha z}$ → atenuación

β: cte de fase $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ $f = \frac{c}{\lambda}$ pseudofrecuencia, pseudoperiodo

Buen dieléctrico

$\mu'' = 0$, $tg\,\delta \ll 1$ → Buen dieléctrico $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$

$k = \beta - j\alpha$

cte de fase: $\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}$

atenuación: $\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}$

Buen conductor

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

$\mu'' = 0$, $\varepsilon \simeq -j\frac{\sigma}{\omega}$ $(\sigma \gg \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''})$ → Buen conductor $\boxed{k = \frac{1-j}{\delta}}$, $\beta = \frac{1}{\delta}$, $\alpha = \frac{1}{\delta}$

siendo Profundidad de penetración pelicular [m] (nada que ver con $tg\,\delta$): $\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}}$

$\boxed{\eta = (1+j)R_s}$

Resistencia superficial $\boxed{R_s = \frac{1}{\sigma\delta}}$

$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{-j\frac{1}{\delta}z} e^{-\frac{1}{\delta}z}$

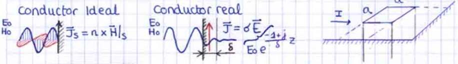
$\vec{H} = \frac{E_0}{\eta}\hat{y} e^{-j\frac{1}{\delta}z} e^{-\frac{1}{\delta}z}$

$H_0 = \frac{E_0}{\eta} = \frac{E_0}{(1+j)R_s} = E_0 \frac{1-j}{2R_s} = \frac{\delta\sigma}{1+j} E_0$

Efecto pelicular en conductor

Conductor ideal: $\vec{J}_s = n \times \vec{H}|_s$

Conductor real: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $E_0 e^{-\frac{1+j}{\delta}z}$



$P_m = \frac{|E_0|^2}{4R_s} = P_d$

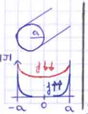
pot tx hacia dentro de conductor por unid. sup. / pot. disipada en el cond. (calor) en prisma a

Impedancia por cuadrado $Z_\square = (1+j)R_s = \eta$

Resistencia por cuadrado $Re(Z_\square) = R_s = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$ ($L \rightarrow a$, $S \rightarrow a\delta$)

Admite la interpretación de la ley de Ohm en una película espesor δ

Conductor cilíndrico



Aproximaciones a $Z_\ell = R_\ell + j\omega L_\ell$ impedancia por unidad de long

1. calcular $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}}$ cambia según frec. y material

$\left(\frac{a}{\delta}\right) < 1'5 \Rightarrow$ Baja Frecuencia $\begin{cases} R_\ell = \frac{1}{\sigma S} \\ L_\ell = \frac{\mu}{8\pi} \end{cases}$ no depende del radio

$S = \pi a^2$ (area) trans a propag. $P = 2\pi a$ (perímetro)

$\left(\frac{a}{\delta}\right) > 9 \Rightarrow$ Alta Frecuencia $\begin{cases} R_\ell = \frac{R_s}{P} \\ L_\ell = \frac{R_s}{P\omega} \end{cases}$

aproximación de conductor plano, Ley Ohm $\boxed{R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{2\pi a d}}$

Las aprox. de R_ℓ sirven para cualquier hilo conductor (S, P)

Campos Electromagnéticos II - Referencia Rápida

TEMA 3. ONDAS GUIADAS

Caso general

Modos TEM

$\nabla_t^2 \phi = 0$ $\phi|_c = cte$

N conductores ⇒ N-1 modos TEM

$\vec{E}_{ot} = -\nabla_t \phi$

$\vec{H}_{ot} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_{ot}}{\eta}$ $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$\vec{E} = \vec{E}_{ot} e^{-j\gamma}$ $\gamma = jk$

$\vec{H} = \vec{H}_{ot} e^{-j\gamma}$ $= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \begin{cases} \alpha & k < k_c \\ j\beta & k > k_c \end{cases}$

$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$

$\boxed{k_c^2 = \begin{cases} k^2 + \alpha^2 & k < k_c \\ k^2 - \beta^2 & k > k_c \end{cases}}$

Modos TE

· Resolver $\nabla_t^2 H_{oz} + k_c^2 H_{oz} = 0$; aplicar c.c. $\frac{\partial H_{oz}}{\partial n}|_s = 0$ → H_{oz}, k_c (autofunciones, autovalores)

· obtener $\vec{H}_{ot} = -\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t H_{oz}$

· obtener $\vec{E}_{ot} = Z_{TE}\vec{H}_{ot} \times \hat{z}$ $Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta\frac{k}{\beta}$

$\vec{E} = \vec{E}_{ot} e^{-\gamma z}$ $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$

$\vec{H} = (\vec{H}_{ot} + \vec{H}_{oz}) e^{-\gamma z}$ $\gamma = \begin{cases} \alpha & k < k_c \\ j\beta & k > k_c \end{cases}$

Modos TM

· Resolver $\nabla_t^2 E_{oz} + k_c^2 E_{oz} = 0$; Aplicar C.C. $E_{tg}|_{sup\,cond} = 0$ → E_{oz}, k_c

· obtener $\vec{E}_{ot} = -\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t E_{oz}$

· obtener $\vec{H}_{ot} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_{ot}}{Z_{TM}}$ $Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} = \eta\frac{\beta}{k}$, $\frac{\beta}{k} = \sqrt{1-(f_c/f)^2}$

$\vec{E} = (\vec{E}_{ot} + \vec{E}_{oz}) e^{-\gamma z}$

$\vec{H} = \vec{H}_{ot} e^{-\gamma z}$

características de propagación

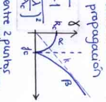
tenemos $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\gamma z}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-\gamma z}$

$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2 - f^2} = \begin{cases} \alpha & k < k_c \Rightarrow e^{-\alpha z} \rightarrow \text{atenuación} \\ j\beta & k > k_c \Rightarrow e^{-j\beta z} \rightarrow \text{propagación} \end{cases}$

TEM $f_c = 0$ ⇒ $\gamma = j\beta = jk$. Constante de propagación $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

TE o TM: $k < k_c \rightarrow \alpha = k\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} = k\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}$

$k > k_c \rightarrow \beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$



Longitud de onda en la guía λ_g separación mínima entre 2 puntos en direcc de propag con misma fase

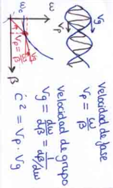
$f > f_c \Rightarrow e^{-j\beta z}$ $\beta\lambda_g = 2\pi$

TEM: $\lambda_g = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{f} = \lambda$ ($k = \beta$)

TE o TM: (sólo si $f > f_c$) $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}}$

aparece mucho: $\frac{\beta}{k} = \sqrt{1-(f_c/f)^2} = \sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}$

Velocidad de propagación



Velocidad de fase $v_p = \frac{\omega}{\beta}$

Velocidad de grupo $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega}$

$c^2 = v_p \cdot v_g$

TEM	TE y TM
$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c$	$\frac{c}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} > c$
$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c$	$c\sqrt{1-(f_c/f)^2} < c$

Potencia transmitida (cont. caso general)

$P_T = \frac{1}{2}Re\left\{\iint_s (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot d\vec{s}\right\}$

modos TEM: $P_T = \frac{1}{2\eta}\iint_s |E_{ot}|^2 ds = \frac{\eta}{2}\iint_s |H_{ot}|^2 ds$

modos TE: $P_T = \frac{\eta^2}{2Z_{TE}}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \iint_s |H_{oz}|^2 ds$, $Z_{TE} = k\frac{\eta}{\beta}$

modos TM: $P_T = \frac{Z_{TM}}{2\eta^2}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \iint_s |E_{oz}|^2 ds$, $Z_{TM} = \eta\frac{\beta}{k}$

Medios con pérdidas

La cte de propagación toma la forma $\gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ (atenuación)

$P_T(z) = P_T e^{-2\alpha z}$

Pot perdida por unidad de longitud $P_{\ell} = -\frac{dP_T}{dz} = 2\alpha P_T$ → $\boxed{\alpha = \frac{P_\ell}{2P_T} = \alpha_d + \alpha_c = \frac{P_{\ell d}}{2P_T} + \frac{P_{\ell c}}{2P_T}}$

Pérdidas en el dieléctrico

caso general, para cualquier geometría $\gamma \simeq \underbrace{\frac{k'\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)}{2\sqrt{1-(f_c/f)^2}}}_{\alpha} + j\underbrace{k'\sqrt{1-(f_c/f)^2}}_{\beta}$, $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = tg\,\delta$

$k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

particularizando TEM ($f_c = 0$) $\gamma \simeq \frac{k' tg\,\delta}{2} + jk'$

$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$

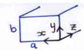
Pérdidas en el conductor

no existe fórmula general. Lo veremos en cada caso

$\alpha = \frac{P_{\ell c}}{2P_T}$ siendo $P_{\ell c} = \frac{1}{2}R_s \oint_c |\vec{H}|^2 dl$

ej. guía onda rectangular: $\oint |\vec{H}|^2 dl = \int_0^a |H(y=0)|^2 dx + \int_0^b |H(x=a)|^2 dy + \int_a^0 |H(y=b)|^2 dx + \int_b^0 |H(x=0)|^2 dy$

Guía de ondas rectangular



Modos TE

$\boxed{H_{oz} = G\cos(k_x x)\cos(k_y y)}$ $(m,n) \neq (0,0)$

$\vec{H}_{ot} = -\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t H_{oz}$, $\nabla_t = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$

$\vec{E}_{ot} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}\vec{H}_{ot} \times \hat{z} = Z_{TE}[H_{oy}\hat{x} - H_{ox}\hat{y}]$

$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \eta\frac{k}{\beta}$

Modos TM

$\boxed{E_{oz} = F\,sen(k_x x)\,sen(k_y y)}$ $m \neq 0$, $n \neq 0$

$\vec{E}_{ot} = -\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t E_{oz}$

$\vec{H}_{ot} = \frac{j\omega\varepsilon}{\gamma}\hat{z} \times \vec{E}_{ot} = \frac{1}{Z_{TM}}[-E_{oy}\hat{x} + E_{ox}\hat{y}]$

$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} = \eta\sqrt{1-(f_c/f)^2} = \eta\frac{\beta}{k}$

$k_x = \frac{m\pi}{a}$ $k_y = \frac{n\pi}{b}$

$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$

$k_c = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

$k_c = \omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}$

$f_{c\,m,n} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2}$

$\lambda_{c\,m,n} = \frac{c}{f_{c\,m,n}} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}$

Frecuencia y longitud de onda de corte (λ_c no depende del diel.)

Modo dominante / modo fundamental (TE_{10})

$\boxed{f_{c10} = \frac{c}{2a}}$ $\boxed{\lambda_{c10} = 2a}$

· Expresiones de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ (Polarización Lineal según $\hat{y}$)

$\vec{E} = E_M\,sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{y}\,e^{-j\beta z}$ valor máximo: $\boxed{E_M = -j \cdot G \cdot \eta \cdot \frac{f}{f_c}}$

$\vec{H} = -\frac{E_M}{Z_{TE}}sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{x}\,e^{-j\beta z} + j\frac{E_M}{\eta}\frac{f_c}{f}\cos\frac{\pi x}{a}\hat{z}\,e^{-j\beta z}$

cte. multiplicativa se halla con condiciones al inicio/final de la guía

Densidades de carga: $\sigma = \varepsilon \cdot E_n = \begin{cases} \varepsilon E_y & \text{en } y=0 \\ -\varepsilon E_y & \text{en } y=b \end{cases}$

Corrientes superficiales: $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}|_s$; $-H_z\hat{x} + H_x\hat{z}$, $H_z\hat{y}$, $-H_z\hat{y}$, $H_z\hat{x} - H_x\hat{z}$

Potencia transmitida: $P_T = \frac{|E_{Max}|^2}{4Z_{TE}}ab = \frac{|E_{Max}|^2}{4\eta}\frac{\lambda}{\lambda_g}ab$ (mayor ab ⇒ mayor P_T)

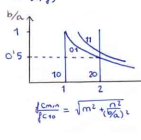
Atenuación debida a: - dieléctricos: fórmula general

- conductores $\alpha_c = \frac{P_{\ell c}}{2P_T} = \ldots = \frac{R_s}{b\eta}\frac{1 + 2\frac{b}{a}(f_c/f)^2}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ $P_{\ell c} = \frac{R_s}{2}\frac{|E_M|^2}{\eta^2}[a + 2b(f_c/f)^2]$

Frecuencias de corte:

$f_{c\,m,n} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

$f_{c10} = \frac{c}{2a}$ (no depende de b)

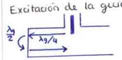


$\frac{f_{c\,m,n}}{f_{c10}} = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{(b/a)^2}}$

conviene tener buen margen $f_c < f < f_c$ modo inmediatamente superior

$f_{trabajo} = cte \cdot f_c$ (factor de seguridad)

Excitación de la guía:



Parámetros circuitales de una línea de tx

TEM:

$V(z) = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V(z) = V_0 e^{-\gamma z}$

$I_a(z) = \oint_{C_a} \vec{J}_{s,a}(z) \cdot \hat{z}\,dl \Rightarrow I(z) = I_0 e^{-\gamma z}$

· con conductor y dieléctrico perfectos

$\sqrt{\mu\varepsilon}V_0 = L I_0$, $\sqrt{\mu\varepsilon}I_0 = C V_0$

Relación: $\boxed{LC = \mu\varepsilon}$

Impedancia característica $\boxed{Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}}$

Potencia transmitida: $\boxed{P_T = \frac{1}{2}Re\{V_0 I_0^*\}} = \frac{1}{2}\frac{|V_0|^2}{Z_0}$

· Dieléctrico no perfecto

corriente de fugas $I_d = \omega\,tg\delta\,C V_0$ ⇒ conductancia de pérdidas p.u. de longitud $G = \frac{I_d}{V_0} = \omega\,tg\delta\,C$

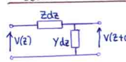
$LC = \mu'\varepsilon'$

· Conductor no perfecto

Impedancia por unidad de longitud de conductor ⇒ (Tema 2) $Z_\ell = R + j\omega L_i \simeq R$ ($L_i \ll L$)

R se calcula como en tema 2 según R_s y geometría

Modelo circuital



$Z = R + j\omega L$

$Y = G + j\omega C$

resolviendo ec. dif se obtiene $Z_0 = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$

Línea de bajas pérdidas ($R \ll j\omega L$, $G \ll j\omega C$) ⇒ $Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}$

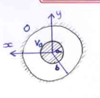
Podemos aproximar la constante de propagación:

$$\gamma \simeq \underbrace{\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}_{\alpha_c} + \underbrace{\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}_{\alpha_d} + \underbrace{j\omega\sqrt{LC}}_{\beta}$$

$\alpha_d = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega\,tg\delta\sqrt{LC}}{2} = \frac{k'\,tg\delta}{2}$ $\beta = j\omega\sqrt{\mu'\varepsilon'} = jk'$

coinciden con las expresiones que teníamos para TEM con pérdidas

Guía coaxial



Modo TEM

$\nabla_t^2\phi = 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) = 0 \xrightarrow{c.c.} \phi = V_0\frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)}$

$\boxed{\vec{E}_{ot} = \frac{V_0}{\ln(b/a)}\frac{\hat{\rho}}{\rho}}$ $\boxed{\vec{H}_{ot} = \frac{V_0}{\eta\ln(b/a)}\frac{\hat{\varphi}}{\rho}}$

$\vec{E} = \vec{E}_{ot} e^{-\gamma z}$ $\vec{H} = \vec{H}_{ot} e^{-\gamma z}$

Potencia transmitida: $P_T = \frac{1}{2\eta}\iint_s |\vec{E}_{ot}|^2 ds = \boxed{\frac{\pi}{\eta}\frac{|V_0|^2}{\ln\frac{b}{a}}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $R_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$

Atenuación conductores

$\alpha_c = \frac{P_{\ell c}}{2P_T} = \boxed{\frac{R_s}{2\eta\ln(b/a)} \cdot \frac{a+b}{ab}}$ no depende de V_0 $P_{\ell c} = \frac{R_s\pi(a+b)}{ab}\left[\frac{|V_0|^2}{\eta\ln(b/a)}\right]$

Modos TE y TM no los usamos en el coaxial

$\lambda_{c\,TE_{10}} \simeq 2\pi r_0$ $r_0 = \frac{a+b}{2}$ hay que intentar no estar por debajo de esa λ_c (por encima de f_c) para propagar sólo TEM

Estudio circuital del cable coaxial

condensador cilíndrico $C = \frac{2\pi\varepsilon'}{\ln(b/a)}$ ⇒ $L = \frac{\mu'\varepsilon'}{C} = \frac{\mu'}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ⇒ $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\eta}{2\pi}\ln(b/a)$

$P_T = \frac{1}{2}\frac{|V_0|^2}{Z_0} = \frac{\pi}{\eta}\frac{|V_0|^2}{\ln(b/a)}$

Resist. conductores: asociación serie 2 cond. cilíndricos: $R = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ $\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R_s}{2\eta\ln(b/a)}\frac{a+b}{ab}$

ej. Línea Biplaca

cond plano $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r' a}{h}$ ⇒ $L = \frac{\mu\varepsilon'}{C}$ $R_{biplaca} = R_1 + R_2 = \frac{1}{a\sigma_1\delta_1} + \frac{1}{a\sigma_2\delta_2}$

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ $G_{biplaca} = \omega C\,tg\,\delta$

$\beta = \omega\sqrt{LC}$ $\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ $\alpha_d = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Línea triplaca: ≡ (2 biplacas en paralelo) $C_{tri} = 2C_{bi}$ $R_{tri} = \frac{1}{2}R_{bi}$ $L_{tri} = \frac{1}{2}L_{bi}$ $G_{tri} = 2G_{bi}$